This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

LSoc1726.5

BOUGHT WITH
THE BEQUEST OF
HORACE APPLETON HAVEN,
Of Portsmouth, N. H.
(Class of 1842.)

Recd 14 Oct. 1871.

ABHANDLUNGEN

VIERZEHNTER BAND.

ABHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

VIERZEHNTER BAND.

MIT SECHS TAFELN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1871.

ABHANDLUNGEN

DER MATHEMATISCH-PHYSISCHEN CLASSE

Leipzig –

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

NEUNTER BAND.

MIT SECHS TAFELN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1871.

LSoc 1726.5

1871, Oct. 14.

Haven Fund.

INHALT.

P. A. HANSEN, Fortgesetzte geodätische Untersuchungen, bestehend in zehn Supplementen zur Abhandlung von der Methode der kleinsten Quadrate im Allgemeinen und in ihrer Anwendung auf die Geodäsie. S. 1

P. A. HANSEN, Entwickelung eines neuen veränderten Verfahrens zur Ausgleichung eines Dreiecksnetzes mit besonderer Betrachtung des Falles, in welchem gewisse Winkel voraus bestimmte Werthe bekommen sollen . . . . . - 185

P. A. HANSEN, Supplement zu der geodätische Untersuchungen benannten Abhandlung, die Reduction der Winkel eines sphäroidischen Dreiecks betreffend . . . . . - 289

W. G. HANKEL, elektrische Untersuchungen. Achte Abhandlung. Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Topases. Mit 4 Tafeln . . - 357

P. A. HANSEN, Bestimmung der Sonnenparallaxe durch Venusvorübergänge vor der Sonnenscheibe mit besonderer Berücksichtigung des im Jahre 1874 eintreffenden Vorüberganges. Mit zwei Planigloben . . . - 455

G. T. FECHNER, zur experimentalen Aesthetik. Erster Theil . . . . - 553

FORTGESETZTE
GEODÄTISCHE UNTERSUCHUNGEN

BESTEHEND

IN ZEHN SUPPLEMENTEN

ZUR ABHANDLUNG

VON DER METHODE

DER

KLEINSTEN QUADRATE IM ALLGEMEINEN

UND

IN IHRER ANWENDUNG AUF DIE GEODÄSIE.

VON

P. A. HANSEN.

INHALT.

Seite

Suppl. 1. Reflexionen über die Anlage und die Ausführung eines Dreiecksnetzes. 3

Suppl. 2. Von der Bestimmung des mittleren Fehlers der nackten Beobachtungen. 59

Suppl. 3. Ableitung einer bisher unbekannten Bedingungsgleichung, die im zweiten Theile der Ausgleichung eines Dreiecksnetzes statt findet. 80

Suppl. 4. Von der Behandlung etwa vorhandener, überzähligen Richtungen. 84

Suppl. 5. Entwickelung eines besonderen Falles, in welchem die für die Ausgleichungen auf den Stationen aufzulösenden Gleichungen sich in zwei oder mehrere, von einander völlig unabhängige Systeme zerlegen lassen. 102

Suppl. 6. Ableitung der Bedingungsgleichungen in besonderen Fällen, mit Beibehaltung der im Vorhergehenden stets angewandten Form derselben. 153

Suppl. 7. Berichtigung eines in der Abhandlung vorkommenden kleinen Misgriffs. 162

Suppl. 8. Berechnung der $f(r,I)_s$, etc. und der (I,M), etc. ohne Zuziehung der $\eta(r,I)_s$, etc. 163

Suppl. 9. Die mit α, β, γ etc. nebst angehängten Strichen bezeichneten Grössen betreffend 165

Suppl. 10. Das Beobachtungsverfahren betreffend, welches Gauss in der Hannöverschen Gradmessung angewandt hat. 169

Suppl. 1. Reflexionen über die Anlage und die Ausführung eines Dreiecksnetzes.

§ 1. Allgemeine Betrachtungen.

1.

In früherer Zeit, wo die Ausgleichungstheorie unbekannt war, und man die Dreiecke, aus welchen ein Dreiecksnetz besteht, gemeiniglich blos an einander reihte, war es strenge, und der damaligen Sachlage vollkommen angemessene Vorschrift, dass in jedem Dreieck alle drei Winkel beobachtet werden mussten. Die Summe der aus den Beobachtungen hervorgehenden Werthe der Winkel eines Dreiecks war damals die einzige Controle, die man sich in Bezug auf die Ausführung der Beobachtungen verschaffen konnte, und die gleichmässige Vertheilung des Unterschiedes zwischen dem Betrage dieser Summe und dem theoretischen Werthe derselben auf alle drei Winkel die einzige Ausgleichung, die man kannte.

In Bezug auf die Grösse der Winkel der Dreiecke schrieb man ein Minimum vor, welches nicht überschritten werden durfte, man verordnete z. B. dass, ohne Ausnahmen zu gestatten, in keinem Dreiecke Winkel vorkommen dürften, die kleiner wie 24° wären, welche Zahl man hie und da auch auf 30° erhöht hat. In dieser Beziehung ist man zu weit gegangen, denn es lässt sich beweisen, dass unter Umständen auch in an einander gereihten Dreiecken die kleinsten Winkel zulässig sind, indem sie auf die Genauigkeit der daraus folgenden Dreiecksseiten nicht den geringsten nachtheiligen Einfluss ausüben; dieses wird weiter unten bewiesen werden.

Auch die erlaubte Grösse des Unterschiedes zwischen der beobachteten Summe der Winkel der Dreiecke und dem theoretischen Werthe

derselben bestimmte man. Es ist dieses freilich in gewissem Sinne eine Bestimmung der erlaubten Gränze des mittleren Fehlers der Beobachtungen an sich, aber eine sehr mangelhafte und unvollkommene. Es lässt sich indess nichts dagegen sagen, da sie in einer Zeit getroffen wurde, in welcher die Bestimmung des mittleren Fehlers der Beobachtungen entweder unbekannt, oder doch nur Wenigen bekannt war.

Man bestimmte ferner die erlaubte Fehlergränze der Dreiecksseiten, die man, ohne auf die Lage dieser Seiten im Netze Rücksicht zu nehmen, durch eine unveränderliche Verhältnisszahl ausdrückte. Man hat z. B. verordnet, dass in den Dreiecken erster Ordnung diese Fehlergränze $\frac{1}{100000}$ der Länge der Dreiecksseiten nicht übersteigen dürfe. Wie man grade auf diese Zahl gekommen ist, lässt sich schwer einsehen, da man in jener Zeit keine Hülfsmittel besass, den mittleren Fehler eines durch geodätische Operationen erlangten Resultats berechnen zu können. Aber abgesehen davon, ist jede derartige Bestimmung unhaltbar, denn davon konnte man sich doch wohl in jener Zeit schon überzeugen, dass die mittleren Fehler der Dreiecksseiten, von der gemessenen Grundlinie an, sich immer mehr und mehr vergrössern müssen, je grösser die Anzahl der Dreiecke ist, die zwischen der Grundlinie und der betreffenden Dreiecksseite liegen. Man gab hiemit eine Fehlergränze an, die wenn sie auch für Dreiecksseiten, die in der Nähe der Grundlinie liegen, eingehalten werden konnte, bei Dreiecksseiten, die von dieser sehr entfernt liegen, gewiss nie hat eingehalten werden können. Wenn man solche Dreiecksseiten aufweisen können sollte, die um weniger, wie die oben genannte Zahl, von einander abweichen, so ist gewiss der Zufall zu Hülfe gekommen, und der zufällige Fehler, den die directe Vergleichung gegeben hat, ist grade weit kleiner gewesen, wie der mittlere. Man wird weiter unten die Zunahme der mittleren Fehler der Dreiecksseiten untersucht finden.

Die Festsetzung einer Fehlergränze der Dreiecksseiten neben der der Beobachtungen bildet aber, auch wenn man sie von Dreieck zu Dreieck veränderlich annehmen wollte, einen theoretischen Widerspruch. Denn aus den mittleren Fehlern der Winkel allein folgen schon in jedem einzelnen Falle die mittleren Fehler der Seiten durch bestimmte und unabänderliche, mathematische Relationen. Indem man also beide Fehlergränzen im Voraus bestimmte, betrachtete man zwei Fehlerbestimmungen von einander als unabhängig, die in der That von einander

abhängig sind, und konnte somit dem geschicktesten und gewissenhaftesten Trigonometer die Verlegenheit bereiten, dass er, obgleich seine Winkelmessungen unter der erlaubten Fehlergränze geblieben waren, dennoch die vorgeschriebene Fehlergränze in den Seiten nicht inne halten konnte. Es waren noch dazu die Mittel, deren man sich bediente, um die Fehler der Seiten zu erkennen sehr unvollkommen und mangelhaft. Man verglich die Werthe einer und derselben Dreiecksseite, die aus zwei verschiedenen Triangulationen hervorgegangen waren, mit einander, ohne zu berücksichtigen, welchen Werth jede dieser beiden Bestimmungen hatte. Es ist sogar bei solchen Vergleichungen vorgekommen, dass man die eine Bestimmung der Seite stillschweigend als absolut richtig betrachtet, und den Unterschied, den die Vergleichung ergab, der anderen Bestimmung derselben ausschliesslich zur Last gelegt hat. Es lassen sich von solcher Behandlung dieser Sache Fälle anführen.

2.

Seit der Einführung der Ausgleichungstheorie haben sich die vorbenannten Umstände sehr geändert, in der Anlage und Ausführung eines Dreiecksnetzes ist jetzt ein weit grösserer Spielraum gestattet, und man kann sich von dem Erfolge, den man erreicht hat, eine sichere und vollständige Vorstellung verschaffen. Die Fälle in welchen ein kleiner Winkel vermieden werden muss, stehen jetzt viel vereinzelter da, die Nothwendigkeit in jedem Dreiecke alle drei Winkel beobachten zu müssen fällt weg, und man kann daher in Gegenden, wo die Beschaffenheit der Erdoberfläche früher der Ausführung eines guten Dreiecksnetzes fast unüberwindliche Schwierigkeiten darbot, ein solches mit weit grösserer Leichtigkeit herstellen. Die Ursache davon liegt in dem Umstande, dass man eine grössere Anzahl von Bedingungsgleichungen verschiedener Gattung in das Dreiecksnetz nicht nur einführen, sondern auf die vortheilhafteste Weise benutzen kann*). Die sichere Vorstellung von dem Erfolge der Arbeit erlangt man dadurch, dass man sich in den Stand gesetzt sieht, die Gewichte und die mittleren Fehler der einzelnen Stücke

*) Man hat vor der Einführung der Ausgleichungstheorie zwar auch in einzelnen Fällen die Anlage eines Dreiecksnetzes so ausgeführt, dass es eine grössere Anzahl von Bedingungsgleichungen darbot, wie die, die aus der Summe der Winkel der einzelnen Dreiecke hervorgehen, aber man hat diese Bedingungsgleichungen nur auf sehr unvollkommene Art zu benutzen verstanden.

des Dreiecksnetzes berechnen zu können. Das einzige Kriterion, welches die Wissenschaft besitzt, um die Sicherheit zu bestimmen, mit welcher irgend eine Function der Beobachtungen, vermöge der Abhängigkeit derselben von den Beobachtungen, durch die letzteren bestimmt wird, bietet die Berechnung des Gewichts der Function dar. Der mittlere Fehler der Bestimmung dieser Function ergiebt sich hierauf durch die Verbindung dieses Gewichts mit dem mittleren Fehler der Gattung von Beobachtungen, deren Gewicht der Einheit gleich gesetzt worden ist.

3.

Die Formeln für die Berechnung, sowohl der Gewichte irgend welcher bestimmten Function der bei der Messung eines Dreiecksnetzes erhaltenen Beobachtungen, wie der mittleren Fehler sind in der Abhandlung abgeleitet und gegeben worden; wir wollen hier die Wirkung der Bedingungsgleichungen des Dreiecksnetzes auf die Gewichte untersuchen. Bezeichnen wir irgend ein Gewicht wieder mit P, so ist zufolge der Abhandlung

$$P = \frac{1}{R-S}$$

wo R und S Grössen sind, deren jede aus einem Aggregat von Gliedern besteht, deren jedes nothwendiger Weise positiv ist. Denn in jedem ist der Zähler ein Quadrat, und der Nenner eine Grösse, die der Natur der Sache nach stets positiv ist. Ferner ist R immer von den Bedingungsgleichungen unabhängig, während S eine Function dieser ist. Die Zahl der Glieder, aus welchen S besteht, ist im Allgemeinen der Zahl der Bedingungsgleichungen gleich, es kann sich jedoch ereignen, dass von diesen Gliedern Eins oder mehrere gleich Null werden. Ja es giebt sogar einzelne besondere Fälle, in welchen alle Glieder, und folglich auch S selbst, gleich Null werden. Hieraus folgt schon, dass das Vorhandensein von Bedingungsgleichungen die Gewichte im Allgemeinen immer vergrössert, denn dem Vorhergehenden zufolge ist immer $R > R-S$. Man kann in vielen Fällen die Gewichte auf mehrere Arten berechnen, indem sich oft die Gleichungen, von welchen man ausgehen muss, auf verschiedene Arten aufstellen lassen, und dadurch kann der Fall eintreten, dass bei diesen verschiedenen Berechnungsarten beide Grössen R und S verschiedene Werthe annehmen, aber die Werthe, die sie annehmen, sind immer so beschaffen, dass für jede einzelne,

bestimmte Function der Werth von $R—S$, und folglich auch der von P derselbe bleibt.

Nehmen wir nun an, dass man von den vorhandenen Bedingungsgleichungen Eine weglässt, so besteht die einzige Veränderung, die der Ausdruck des Gewichts erleidet, darin, dass das betreffende Glied des Ausdrucks von S wegfällt, wenn es nicht ohnehin Null war. Es wird daher das Gewicht P der betreffenden Function kleiner, wenigstens nie grösser. Im entgegengesetzten Falle, nemlich wenn zu den bisher vorhandenen Bedingungsgleichungen eine neue hinzukommt, lässt sich eben so beweisen, dass das Gewicht P grösser, wenigstens nie kleiner wird. Da die Fälle, in welchen weggelassene, oder hinzugefügte Bedingungsgleichungen keine Wirkung auf ein Gewicht haben, immer vereinzelt dastehen, und wenn eine solche Bedingungsgleichung auf Ein gewisses Dreiecksstück keine Wirkung ausübt, gewiss andere Dreiecksstücke vorhanden sind, in Bezug auf welche die Wirkung statt findet, so kann man den allgemeinen Satz aussprechen, dass die Vermehrung der Anzahl der Bedingungsgleichungen immer die Gewichte der Dreiecksstücke vergrössert, und die Verminderung derselben immer die Gewichte verkleinert.

4.

Die eben erhaltenen Sätze ergaben sich ohne dass die Berücksichtigung der besonderen Form der Bedingungsgleichungen nöthig wurde, sie finden also bei jeder Bedingungsgleichung statt, mag die Form derselben sein wie sie will, sie haben daher in jedem Dreiecksnetze volle Geltung, wie gross oder wie klein auch die Winkel sein mögen, die darin vorkommen. Man wird weiter unten an Beispielen sehen, dass Seitengleichungen z. B. in welchen sehr kleine Winkel vorkommen, sehr günstige Wirkungen ausüben können. Behauptungen daher, dass solche Bedingungsgleichungen das Resultat unsicher oder gar unrichtig machen könnten, entbehren jedes Grundes. Aus demselben Grunde, dass die Vergrösserung der Gewichte nicht an die Form der Bedingungsgleichungen gebunden ist, folgt ferner dass es nunmehr nicht nothwendig ist in jedem Dreieck alle drei Winkel zu beobachten, so fern nur die Anlage des Netzes so eingerichtet wird, dass statt der fehlenden Winkelgleichungen eine gnügende Anzahl von Seitengleichungen vorhanden sind. Die Weglassung einer Winkel- oder Richtungsbeobachtung

hie und da kann durch die Umstände geboten werden. Wenn von zwei Gegenständen A und B der erste vom zweiten aus gesehen werden kann, so kann gewiss auch der zweite vom ersten aus gesehen werden, aber es ereignet sich manchmal, dass von dem einen Punkte aus das Absehen gut ist, und gute Beobachtungen erwarten lässt, dass aber von dem anderen Punkte aus das Absehen schlecht ist, und nur schlechte Beobachtungen zu erwarten sind; man thut in diesem Falle besser die schlechten Beobachtungen unausgeführt zu lassen. Es lässt sich freilich behaupten, dass auch die schlechteste Beobachtung benutzt werden kann, wenn man ihr das richtige Gewicht beilegt, und hiegegen lässt sich theoretisch nichts einwenden, aber in der Praxis ist es immer unmöglich ein solches Gewicht mit der nöthigen Genauigkeit zu bestimmen, denn es fehlt stets hiezu die erforderliche Anzahl der Daten. Die Anwendung unrichtiger Gewichte kann aber das Resultat schädigen, und es ist daher stets vorzuziehen solche Fälle zu vermeiden.

5.

Es kann hierauf nothwendig werden, bei der Berechnung des Dreiecksnetzes Winkel hinzu zu ziehen, die nicht unmittelbar beobachtet sind, sondern aus den beobachteten berechnet werden müssen, aber hierin liegt nicht der mindeste Grund zur Befürchtung einer Ungenauigkeit, da oftmals die berechneten Winkel grössere Gewichte bekommen wie die beobachteten, und jedenfalls nach der Ausgleichung des Netzes für die Seiten, mag man sie aus beobachteten oder berechneten Winkeln ableiten, dieselben Werthe hervorgehen müssen.

6.

Kommen wir nun nach diesem auf die wesentlichsten Vorschriften, die dem zur Ausführung einer Haupttriangulation bestimmten Personal zu ertheilen sind, so möchten, nachdem die Ausdehnung der Triangulation, ihre Anfangs- und Endpunkte, so wie etwaige Zwischenpunkte, die sie berühren soll, bestimmt, auch die Zahl und Lage der zu messenden Grundlinien angegeben sind, ferner der ganze Arbeitsplan auf eine Zeit- und Kostenaufwand möglichst schonende Art festgesetzt, specielle Instruction über die Behandlung der Instrumente u. dgl. m. ertheilt worden sind, nur das Maximum des erlaubten mittleren Fehler der Beobachtungen an sich, den ich weiter unten den mittleren Fehler der

nackten Beobachtungen nennen werde, und das Minimum der zu bewirkenden Bedingungsgleichungen in Bezug auf die Anzahl der Dreiecks-punkte vorzuschreiben sein. Vorschriften über das Minimum der Seiten der Dreiecke der verschiedenen Ordnungen sind unangemessen, da die Beschaffenheit des Terrains so sehr hiebei in Betracht kommt, und gewisse Gegenden zwar die Anlage von grossen Dreiecken erlauben, aber andere Gegenden die Anlage kleinerer Dreiecke zur Nothwendigkeit machen. Eher liesse sich ein Maximum der Seiten bestimmen, da bei allzu grosser Länge derselben leicht eine Undeutlichkeit in der Sichtbarkeit der Objekte eintreten kann, die auf die Güte der Beobachtungen nachtheilig einwirkt. Die Grösse der anzuwendenden Instrumente, und namentlich die optische Kraft der Fernröhre derselben ist hiebei in Betracht zu ziehen. Auch verlangen grössere Dreiecke grössere Genauigkeit der Winkelmessungen wie kleinere, um zu vermeiden, dass die mittleren Fehler solcher Seiten selbst nicht zu sehr anwachsen. Es möchten bei Triangulationen, die durch Gegenden geführt werden, die die Anlage sehr grosser Dreiecke erlauben, grössere und mit grösseren Fernröhren versehene Instrumente anzuwenden sein, wie bisher der Fall gewesen ist.

7.

Vorschriften über die erlaubte Fehlergränze der Seiten zu geben ist gänzlich unstatthaft, denn aus den oben erwähnten Bestimmungen über den mittleren Fehler der Beobachtungen und der Zahl der Bedingungsgleichungen folgen die mittleren Fehler der verschiedenen Seiten von selbst, und es ist nicht zu umgehen dass diese in gewissen, speciellen Fällen, die zu vermeiden unmöglich ist, grösser, hingegen in anderen Fällen kleiner werden. Die mittleren Fehler der Seiten, die man schliesslich erhält müssen als gut betrachtet werden, wenn nur die obigen Grundbestimmungen erfüllt sind. In Bezug auf den Anschluss der Resultate, die aus zwei verschiedenen Triangulationen für eine und dieselbe Dreiecksseite hervor gehen, darf nicht ausser Betracht gelassen werden, dass aus diesem Anschluss sich die Summe oder der Unterschied der zufälligen Fehler, die diese beiden Resultate besitzen, heraus stellt, und der zufällige Fehler irgend einer Bestimmung je nach den Umständen grösser oder kleiner werden kann, wie der mittlere Fehler.

Endlich ist zu bewirken, dass alle Dreieckspunkte auf möglichst sichere Art in der Erde festgelegt werden. Denn man kann ausserdem in den Fall kommen, nach Verlauf einer nicht grossen Anzahl von Jahren die Triangulation als kaum, oder gar nicht mehr vorhanden betrachten zu müssen, wovon leider Beispiele vorhanden sind.

8.

Bei der Bekanntmachung der Resultate einer Triangulation müssen, wie bisher geschehen ist, alle Beobachtungen, nebst dem Tage an welchem sie angestellt worden sind, einzeln angeführt, und der Name des Beobachters, so wie das angewandte Instrument angegeben werden. Es ist anzuempfehlen immer Richtungen zu beobachten, und die Beobachtungen vollständig anzuführen, nemlich jedem einzelnen Gyrus die Lage des Fernrohrs, ob links oder rechts, wenn es excentrisch ist, oder ob der Höhenkreis links oder rechts, ferner ob vorwärts oder rückwärts beobachtet worden ist, auch welchem Punkt des Horizontalkreises der angenommene Nullpunkt der Richtungen entspricht (letzterer nur in Graden und Minuten) anzugeben. Den Nullpunkt der Richtungen wählt man meines Erachtens nach am Zweckmässigsten so, dass diese die Azimuthe der Gegenstände, vom Südpunkt an nach Westen, nahe angeben; für die erste Richtung jedes Gyrus kann man demohngeachtet dieselbe Zahl von Secunden ansetzen. Die Sitte der ersten Richtung jeder Station den Werth Null zu geben kann zwar statt der Angabe der Azimuthe beibehalten werden, jedoch sollte man nicht, wie zu geschehen pflegt, in den Gyris, in welchen die erste Richtung nicht beobachtet worden ist, wieder mit Null anfangen, sondern die entsprechende Anzahl von Graden, Minuten und Secunden ansetzen, die der Richtung nahe entspricht, deren Werth man ein für alle Mal gleich Null angenommen hat.

Um jedem, der Nachrechnungen anstellen will, Anhaltspunkte darzubieten, halte ich es für das Angemessenste ausser den oben angeführten Einzelnheiten die Ausgleichungen auf den Stationen so anzugeben, wie ich es in dem Hauptbeispiel der Abhandlung von Art. 85 bis 88 für die Stationen (2) bis (5) gethan habe. Es wären demzufolge, ausser den oben angegebenen Einzelnheiten, die zwei Täfelchen für die zusammen gezogenen Beobachtungen, das Täfelchen für die (pp) (pp') etc. die Werthe der N, N', etc., das Täfelchen der daraus folgenden Coefficienten (1, 1), (2, 2, 1), etc. nebst den $(1, l)$, etc. bis (ll), die Werthe

der Grössen (1,1), (2,2,1), (3,3,2), etc. nebst (ll,n), so wie die der $\beta''',\gamma''', \beta^{v},\gamma^{v}$, etc., die aus der Auflösung der Gleichungen hervorgehen, und im zweiten Theil der Auflösung gebraucht werden, so wie endlich die Werthe der $w(r)$ und $y(r)$ anzusetzen.

Im zweiten Theile der Auflösung sind zuerst die Bedingungsgleichungen, und die daraus folgenden Werthe der $F(I)$, $F(II)$, etc. anzugeben, und hierauf eine tabularische Aufstellung der Logarithmen der Differentialquotienten $q(r,I)_s$, $q(r,II)_s$, etc., so wie der Hülfsgrössen $\eta(r,I)_s$, $\eta(r,II)_s$, etc. und der $f(r,I)_s$, $f(r,II)_s$, etc. folgen zu lassen. Die Anführung der Werthe der $Q(r,I)_s$, $Q(r,II)_s$, etc. scheint mir überflüssig, da sie auf die einfachste Weise aus den $\eta(r,I)_s$, $\eta(r,II)_s$, etc. folgen. Es haben hierauf die Coefficienten der Endgleichungen (I,I), (I,II), etc. (II,II), etc. etc. und die Werthe der $(2)_1$, $(3)_1$, $(4)_1$, etc. $(3)_2$, $(4)_2$, etc. $(4)_3$, etc. etc.

und der

$(II,II,1)$, $(III,III,2)$, etc. bis Fq

zu folgen, die sich durch die Auflösung dieser Gleichungen ergeben, worauf die Werthe der $z(r)$, $x(r)$ und der mittlere Fehler einer einzelnen Beobachtung einer Richtung anzugeben sind, welcher letzte aus der Summe der Fehlerquadrate, deren Ausdruck $\Sigma(ll,n)+Fq$ ist, nach dem Art. 150 der Abhandlung zu berechnen ist.

Mit dem Vorstehenden ist noch nicht Alles gegeben, welches im jetzigen Zustande der Wissenschaft verlangt werden muss, sondern es kommt noch die Berechnung, wenigstens einiger, der Gewichte hinzu. Ich halte es für zu weit gegangen, wenn man verlangen wollte, dass in der Darlegung eines ausgeführten Dreiecksnetzes die Gewichte aller Stücke desselben angegeben werden müssten, und meine, dass es hinreichend ist, wenn die Gewichte einiger Stücke, die in der Nähe der Anfangs- und Endpunkte liegen, so wie überdiess die Gewichte solcher Stücke, die einige Verwickelung in der Anlage darbieten gegeben werden. Eine jedenfalls schätzbare Zugabe bildet indess die Angabe der Gewichte einer grösseren Anzahl von Stücken. Durch die Anführung der oben genannten Grössen, namentlich der $(2)_1$, etc. und der $(II,II,1)$, etc. setzt man jeden in den Stand, mit geringer Mühe die Gewichte so vieler Stücke berechnen zu können, wie er will. Dass der mittlere Fehler der Dreiecksstücke, deren Gewichte man berechnet hat, mit anzuführen ist, versteht sich von selbst.

9.

Es ist noch eine wichtige Frage zu behandeln, zumal mehrmals dagegen gefehlt worden ist. Es ist dieses die Frage, von welchen Grundsätzen man bei der wissenschaftlichen Beurtheilung eines ausgeführten Dreiecksnetzes auszugehen habe, um zu einer möglichst richtigen Würdigung der Resultate desselben zu gelangen, ohne einestheils den Werth desselben zu überschätzen, oder anderen Theils durch unrichtige Beurtheilung desselben ein Unrecht zu begehen. Ich meine, dass es selbstverständlich ist, dass man in dieser Hinsicht die einzelnen Operationen, die die Ausführung eines Dreiecksnetzes verlangt, sich vergegenwärtigen, und einzeln untersuchen muss. Diese Operationen lassen sich eintheilen in:

1) Die Anlage des Dreiecksnetzes, und die Verbindung der einzelnen Dreiecke mit einander;
2) Die Messungen und Beobachtungen, und zwar
   a) Die Messungen der Grundlinien;
   b) Die Messungen oder Beobachtungen der Richtungen;
   c) Die Ausführungen der Centrirungen;
3) Die Berechnung

und auf die Beschaffenheit der Ausführung dieser Operationen hat man bei der Prüfung sein Augenmerk zu richten. Sollten etwaige Mängel gefunden werden, so ist ihre Bedeutung zu berücksichtigen, und richtig zu würdigen. In Bezug hierauf kann Folgendes angemerkt werden:

ad 1) Sollte gefunden werden, dass an einer oder mehreren Stellen des Dreiecksnetzes eine zu geringe Anzahl von Controlen oder Bedingungsgleichungen vorhanden wären, so kann diesem in der Regel durch nachträgliche Einmessung neuer Richtungen, oder durch Einschaltung eines neuen Dreieckspunkts abgeholfen werden, aber es werden hiedurch manchmal nicht unbeträchtliche neue Kosten verursacht.

ad 2, *a*) Fände man, dass die Grundlinien nicht mit der erforderlichen Umsicht gemessen worden wären, so wäre dieser Uebelstand durch neue Messungen freilich zu entfernen, aber es würden wieder nicht unbedeutende nachträgliche Kosten erwachsen.

ad 2, *b*) Wären die Beobachtungen der Richtungen nicht mit erforderlicher Genauigkeit ausgeführt, so müsste diese ganze Hauptarbeit von Neuem vorgenommen werden.

ad 2, *c*) Etwaige Mängel in der Ausführung der Centrirungen zu heben, würde ohne grossen nachträglichen Kostenaufwand zu beseitigen sein, so ferne nur bei den Beobachtungen jeder Punkt dauernd fest gelegt worden ist.

ad 3) Fehler in der Berechnung lassen sich gemeiniglich mit weit geringeren Kosten, wie Mängel in den vorbenannten Punkten, entfernen, da blos Arbeiten im Zimmer in Betracht kommen.

10.

Zur Beurtheilung des Punkts 1) hat man vorzüglich auf die Anzahl und die Vertheilung der vorhandenen Bedingungsgleichungen zu sehen. Es können hiebei verschiedenartige Umstände eintreten. In einigen Gegenden, namentlich da wo man sehr grosse Dreiecke hat auswählen können, kann es nicht möglich geworden sein Diagonalen einzuschneiden, hier muss man sich mit der Winkelgleichung begnügen, die jedes einzelne Dreieck darbietet, aber diese auch fordern. Etwaige kleine Winkel, die in solchen Dreiecken vorkommen bilden nicht unbedingt einen Gegenstand des Tadels; es wird hierüber weiter unten das Nähere erklärt werden. Uebergrosse Seiten solcher Dreiecke könnten, aus dem oben angeführten Grunde wohl zu tadeln sein, namentlich wenn bei den Beobachtungen kein Heliotropenlicht oder zu kleine Instrumente angewandt worden sein sollten. In anderen Gegenden, wo namentlich bei Anwendung kleinerer Dreiecke Diagonalen haben eingeschnitten werden können, ist an die Zahl der Bedingungsgleichungen, die vorhanden sind, eine höhere Forderung zu stellen. Findet man die Zahl und die Vertheilung dieser so, dass für jeden hier in Betracht kommenden Dreieckspunkt wenigstens Eine Bedingungsgleichung vorhanden ist, so muss man schon die Anlage für gut anerkennen, sind noch mehr Bedingungsgleichungen vorhanden, so ist um so mehr die Anlage als gut zu bezeichnen.

11.

Die Beurtheilung der Ausführung des Punkts 1, *a*) ist die schwierigste, da von der Messung der Grundlinien nicht so viele Erfahrungen vorliegen, wie von den anderen bei einer Triangulation erforderlichen Operationen. Man muss, wenn die Beurtheilung ausführlich und gründlich sein soll, die einzelnen Messungen untersuchen, und hieraus sich ein Urtheil über die Sorgfältigkeit bilden, mit welcher sie ausgeführt

worden sind. Vorzugsweise ist hier darauf Acht zu haben, wie die Berücksichtigung der Temperatur der Messstangen in Folge der Einrichtung des Messapparats hat statt finden können, und wie sie statt gefunden hat. Auch die Vergleichung der Messstangen mit dem Grundmaasse ist in Bezug auf seine Einzelnheiten zu berücksichtigen. Es werden wohl bei dem gegenwärtigen Stande dieser Sache individuelle Ansichten nicht immer ganz zu vermeiden sein.

12.

Die Beurtheilung der Ausführung des Punkts 2, *b*) steht gegenwärtig auf fester Grundlage. Der mittlere Fehler der nackten Beobachtungen ist es, welcher hier den Ausschlag giebt. Die Berechnung dieses Fehlers, und die Vergleichung desselben mit demjenigen, welcher sich aus den anderen schon vorhandenen Triangulationen ergiebt, bildet einen sicheren Maassstab zur Beurtheilung des in Rede stehenden Punkts.

13.

Die Beurtheilung der Ausführung des Punkts 2, *c*) kann im Allgemeinen nicht direct ausgeführt werden, es wäre denn, dass man sich auf wenigstens einige der Stationen begäbe, dort die Centrirungen nachmässe, und hievon auf das Ganze schlösse. Die Theorie bietet aber hier ein indirectes Mittel dar. Der mittlere Fehler der nackten Beobachtung ist unabhängig von den Fehlern der Centrirung, der Phasen der Signale, u. s. w., aber der schliessliche mittlere Fehler schliesst diese Fehlerquellen in sich, die Vergleichung dieser beiden mittleren Fehler mit einander lässt also schon einen Schluss auf die Ausführung der Centrirungen u. s. w. zu.

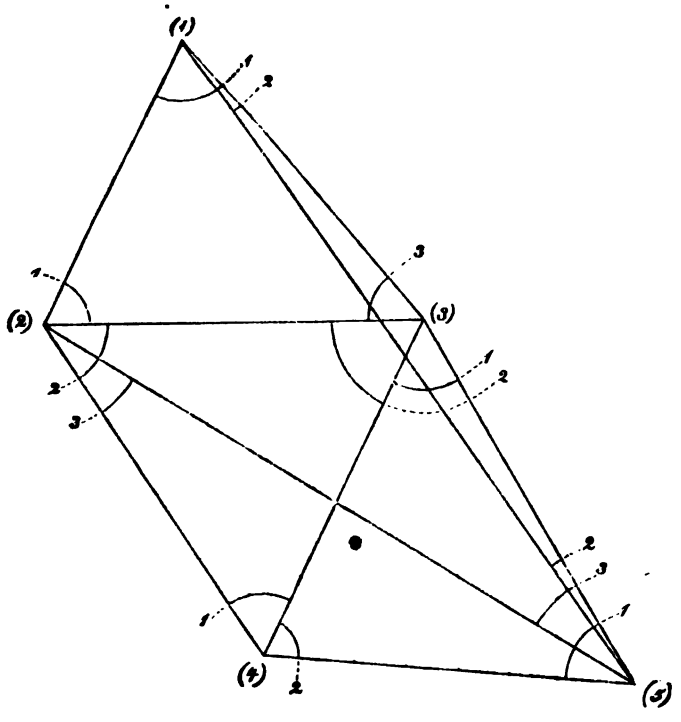
14.

Die Beurtheilung endlich der Ausführung des Punkts 3) ist einfach. Es ist erstlich zu untersuchen, ob in der Berechnung den theoretischen Bedingungen überall Gnüge geleistet worden ist, und zweitens ob die numerischen Rechnungen sorgfältig und richtig ausgeführt worden sind. Das in der Abhandlung entwickelte erste Verfahren bietet vermöge der Controlgleichungen, die es besitzt, und die in einem der unten folgenden Supplemente um Eine vermehrt werden sollen, ein angemessenes Hülfsmittel dazu dar.

§ 2. Specielle Betrachtungen.

15.

Ich beabsichtige hier an einigen Beispielen zu zeigen welche Wirkungen die Ausgleichungstheorie in gewissen Fällen ausübt. Ich habe dazu absichtlich fingirte Beispiele gewählt, da ich diese so stellen konnte, dass die grössere oder kleinere Wirkung, die die Bedingungsgleichungen ausüben, am deutlichsten hervortritt. Das erste Beispiel soll folgende Figur geben,



in welcher die Winkel wie folgt bezeichnet werden sollen

$$(2)(1)(3)=(1)_1\ ,\quad (5)(3)(4)=(1)_3\ ,\quad (3)(5)(4)=(1)_5$$
$$(5)(1)(3)=(2)_1\ ,\quad (4)(3)(2)=(2)_3\ ,\quad (3)(5)(1)=(2)_5$$
$$(1)(2)(3)=(1)_2\ ,\quad (2)(3)(1)=(3)_3\ ,\quad (3)(1)(2)=(3)_5$$
$$(3)(2)(4)=(2)_2\ ,\quad (2)(4)(3)=(1)_4$$
$$(5)(2)(4)=(3)_2\ .\quad (3)(4)(5)=(2)_4$$

Ich werde ferner annehmen, dass diese Winkel selbst unabhängig von einander beobachtet oder gemessen worden seien, weil dieses für den hier zu verfolgenden Zweck auf eine etwas einfachere Rechnung führt. Der Fall übrigens, in welchem statt der Winkel die Richtungen

beobachtet worden sind, ist jenem ganz analog, und die sich ergebenden Gewichte werden von denen jenes Falles um wenig oder nichts verschieden sein.

16.

Fürs Erste soll angenommen werden, dass die beiden Diagonalen (2)(5) und (1)(5), die die Figur enthält, nicht eingeschnitten worden sind, und folglich das Netz aus den drei an einander gereihten Dreiecken (1)(2)(3), (2)(3)(4), (3)(4)(5) besteht.

Suchen wir hierauf die Gewichte der Winkel und verschiedener Seiten nach der Ausgleichung dieses Netzes.

Die Figur liefert nur drei Bedingungsgleichungen, welche alle Winkelgleichungen sind, nemlich

$$(1)_1 + (1)_2 + (3)_3 = 180^0$$
$$(2)_2 + (2)_3 + (1)_4 = 180$$
$$(1)_3 + (2)_4 + (1)_5 = 180$$

auf deren rechten Seiten in der Anwendung noch die sphärischen Ueberschüsse hinzu zu fügen wären, auf die es aber hier nicht ankommt. Die Tafel für die Differentialquotienten dieser Gleichungen steht wie folgt,

r	s	$q(r,I)_s$	$q(r,II)_s$	$q(r,III)_s$
1	1	1	—	—
1	2	1	—	—
2		—	1	—
1	3	—	—	1
2		—	1	—
3		1	—	—
1	4	—	1	—
2		—	—	1
1	5	—	—	1

und setzt man die ursprünglichen Gewichte aller Winkel einander gleich, und $=1$, so werden für alle Bedingungsgleichungen

$$\eta(r,I)_s = Q(r,I)_s = f(r,I)_s = q(r,I)_s$$
$$\eta(r,II)_s = Q(r,II)_s = f(r,II)_s = q(r,II)_s$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

die auch bei den unten folgenden Abänderungen des Beispiels statt finden werden.

17.

Suchen wir nun zuerst die Coefficienten der Endgleichungen, so ergeben sich

$$(I,I) = 3,\ (II,II) = 3,\ (III,III) = 3$$

und alle übrigen Coefficienten sind Null. Bezeichnet man ferner wie in der Abhandlung die Resultate der Substitution der beobachteten Werthe der Winkel in die Bedingungsgleichungen mit $F(I)$, $F(II)$, $F(III)$, so ergeben sich

$$\varphi_1 = \frac{F(I)}{3} = z(1)_1 = z(1)_2 = z(3)_3$$
$$\varphi_2 = \frac{F(II)}{3} = z(2)_2 = z(2)_3 = z(1)_4$$
$$\varphi_3 = \frac{F(III)}{3} = z(1)_3 = z(2)_4 = z(1)_5$$

Die Verbesserung eines jeden Winkels ist also mit entgegengesetztem Zeichen dem dritten Theil des ganzen Fehlers, den das betreffende Dreieck nach der Substitution der Beobachtungen zeigt, gleich; mit einem längst bekannten Satze übereinstimmend*). Man findet ferner leicht die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler, wenn sie wie oben mit W bezeichnet wird,

$$W = \tfrac{1}{3}\{F(I)^2 + F(II)^2 + F(III)^2\}$$

18.

Das zunächst Vorhergehende habe ich nur beiläufig angeführt, und werde mich hierauf zur Berechnung der Gewichte wenden. Ich bemerke dazu im Voraus, dass hier immer

$$k(r)_s = (M,r)_s = Q(M,r)_s$$

ist, und dass folglich die betr. Ausdrücke des Art. 143 der Abhandlung in die folgenden übergehen

$$R = \Sigma\{(M,1)_s^2 + (M,2)_s^2 + (M,3)_s^2 + \ldots\}$$
$$(I,M) = \Sigma\{(M,1)_s \cdot q(1,I)_s + (M,2)_s \cdot q(2,I)_s + (M,3)_s \cdot q(3,I)_s + \ldots\}$$
$$(II,M) = \Sigma\{(M,1)_s \cdot q(1,II)_s + (M,2)_s \cdot q(2,II)_s + (M,3)_s \cdot q(3,II)_s + \ldots\}$$
$$(III,M) = \Sigma\{(M,1)_s \cdot q(1,III)_s + (M,2)_s \cdot q(2,III)_s + (M,3)_s \cdot q(3,III)_s + \ldots\}$$
etc. etc.

Wenden wir uns nun zuerst zur Ermittelung der Gewichte der Winkel, so lässt sich voraussehen, dass diese für jeden Winkel den-

*) Ich bemerke hiezu, dass dieser Satz nicht mehr statt findet, wenn man statt der unabhängigen Winkel die Richtungen beobachtet hat.

selben Werth erhalten werden; wir brauchen daher nur Einen Winkel z. B. $(1)_1$ zu betrachten. Hier wird

$$(M,1)_1 = .1$$

und alle übrigen Grössen dieser Gattung sind Null, es wird folglich auch

$$R = 1$$

Es wird ferner den vorstehenden Ausdrücken gemäss $(I,M) = 1$, und alle übrigen Grössen dieser Gattung werden auch Null. Folglich wird

$$S = \frac{(I,M)^2}{(I,I)} = \frac{1}{8}$$

und das Gewicht

$$P = \tfrac{8}{7}$$

welches Resultat für alle beobachteten Winkel gilt. Es folgt hieraus dass der mittlere Fehler eines jeden ausgeglichenen Winkels im Verhältniss wie

$$1 : \sqrt{\tfrac{8}{7}}$$

kleiner ist, wie das Gewicht des beobachteten Winkels, und da dieses Resultat erhalten worden ist, ohne eine Annahme über die Grösse der Winkel zu machen, so findet es in jedem, aus blos an einander gereihten Dreiecken bestehenden, Dreiecksnetze statt, die Winkel der verschiedenen Dreiecke mögen so gross oder so klein sein wie sie wollen.

19.

Gehen wir nun zur Ermittelung der Gewichte einiger der Seiten des Dreiecksnetzes über, so kann man im Voraus schon erkennen, dass hiebei ein anderes Verhalten eintritt. Diese Gewichte werden im Allgemeinen für die verschiedenen Seiten verschieden ausfallen, und namentlich werden sie desto kleiner werden, je mehr sie sich von der Grundlinie entfernen, auch kann man diese Gewichte nicht berechnen, ohne die Winkel des Dreiecksnetzes ihrer Grösse nach zu kennen. Seien jetzt im Dreiecksnetze, welches durch die Figur des Art 15 dargestellt ist, in den drei Dreiecken, die hier betrachtet werden, die Werthe der Winkel die folgenden, die den Dimensionen dieser Figur sehr nahe entsprechen.

$(1)_1 = 66^0$	$(2)_2 = 58^0$	$(1)_3 = 56^0$
$(1)_2 = 64$	$(2)_3 = 64$	$(2)_4 = 70$
$(3)_3 = 50$	$(1)_4 = 58$	$(1)_5 = 54$

20.

Es wird von nun an die Seite (1)(2) der Figur als Grundlinie angesehen, und es soll in Bezug auf diese zuerst das Gewicht der Seite

(2)(3) ermittelt werden. Ich werde indess hier, wie im Folgenden von dem Inhalt der Abhandlung eine Abweichung machen und nicht die Gewichte der Seiten selbst, sondern die der ihnen zukommenden Logarithmen bestimmen, da diese Gewichte unabhängig von dem absoluten Maasse der Seiten sind. Für die oben genannte Seite bekommen wir demgemäss die Gleichung

$$\log(2)(3) = \log(1)(2) + \log\sin(1)_1 - \log\sin(3)_3$$

Nehmen wir ferner an, dass die siebente Decimale des Briggischen Logarithmus und die Secunde die Einheiten bilden sollen, so ist die erste Behandlung dieser Gleichung, die nemlich wodurch ihr Differential erlangt wird, genau dieselbe, die im Art. 92 der Abhandlung in Betreff der Seitengleichungen erklärt wurde, nur darf jetzt die resultirende Gleichung mit keinem von plus oder minus Eins verschiedenen Factor multiplicirt werden. Durch Zuziehung der oben angegebenen Werthe der Winkel bekommen wir daher

$$\Omega = +9.38\,\delta(1)_1 - 17.67\,\delta(3)_3$$

folglich

$$\left.\begin{aligned}(M,1)_1 &= +9.38\\ (M,3)_3 &= -17.67\end{aligned}\right\} \text{ und hieraus } R = 400.1$$

Es wird ferner $(I,M) = -8.29$, und die anderen Grössen dieser Gattung sind Null. Hiemit, und da im gegenwärtigen Falle die Coefficienten $(2)_1$, $(3)_1$, etc. etc., die sich aus der Auflösung der Endgleichungen ergeben, alle Null sind, erhält man

$$S = 22.9 \text{ und } P = 0{,}002652$$

21.

Suchen wir hierauf das Gewicht der Seite (3)(4) des zweiten Dreiecks, so ist die Grundformel

$$\log(3)(4) = \log(1)(2) + \log.\sin(1)_1 \sin(2)_2 - \log.\sin(3)_3 \sin(1)_4$$

woraus

$$\Omega = +9.38\delta(1)_1 + 13.16\delta(2)_2 - 17.67\delta(3)_3 - 13.16\delta(1)_4$$

also

$$\begin{aligned}(M,1)_1 &= +9.38\\ (M,2)_2 &= +13.16\\ (M,3)_3 &= -17.67\\ (M,1)_4 &= -13.16\end{aligned}$$

und

$$(I,M) = -8\,.\,29,\ (II,M) = 0\ ,\ (III,M) = 0$$

folgen. Es ergiebt sich hieraus

$$R = 746.5,\ S = 22.9 \text{ und } P = 0{,}001382$$

22.

Zur Erlangung des Gewichts der Seite (4)(5) des dritten Dreiecks ergiebt sich

$$\log(4)(5) = \log(1)(2) + \log.\sin(1)_1 \sin(2)_2 \sin(1)_3 - \log.\sin(3)_3 \sin(1)_4 \sin(1)_5$$

$$\Omega = +9{,}38\delta(1)_1 + 13{,}16\delta(2)_2 + 14{,}20\delta(1)_3 - 17{,}67\delta(3)_3 - 13{,}16\delta(1)_4 - 15{,}30\delta(1)_5$$

$$(M,1)_1 = +\ 9{,}38\ ,\ (M,3)_3 = -\ 17{,}67$$
$$(M,2)_2 = +\ 13{,}16\ ,\ (M,1)_4 = -\ 13{,}16$$
$$(M,1)_3 = +\ 14{,}20\ ,\ (M,1)_5 = -\ 15{,}30$$
$$R = 1182{,}3$$
$$(I,M) = -\ 8{,}29\ ,\ (II,M) = 0\ ,\ (III,M) = -\ 1{,}10$$
$$S = 23{,}3\ ,\ P = 0{,}000863$$

23.

Betrachten wir diese Gewichte näher, so finden wir, dass sie von Dreieck zu Dreieck sehr nahe in dem Verhältniss von

$$1 : \tfrac{1}{4} : \tfrac{1}{4}$$

abnehmen, und diese Progression wird sich nahe in demselben Verhältniss fortsetzen, wenn mehr Dreiecke vorhanden sind, die nahe dieselben Dimensionen haben, wie die obigen, und die man gemeiniglich für die günstigsten hält. Wenn also ein Dreiecksnetz aus vielen solchen an einander gereihten Dreiecken besteht, so kann man sich schon eine Vorstellung davon machen, wie klein die Gewichte der Seiten der Dreiecke werden, die von der Grundlinie am Entferntesten liegen. Hieraus sieht man, wie unrichtig es ist, von jeder Dreiecksseite dieselbe Genauigkeit verlangen zu wollen.

Es lässt sich leicht beweisen, dass die obige Progression in einem Dreiecksnetze, welches aus lauter an einander gereihten, sehr nahe gleichseitigen Dreiecken besteht, strenge statt findet. Sei die Anzahl dieser Dreiecke n, und die zwei Winkel, die von jedem Dreiecke gebraucht werden um die Seiten fortgesetzt zu berechnen, (a), (a'), (b), (b'), etc. (n) (n'), die einander sehr nahe gleich sind, und von welchen (a) und (a') zum ersten Dreieck gehören, dessen eine Seite als Grundlinie be-

trachtet wird. Wegen der sehr nahen Gleichheit aller Winkel können wir in der Differentialgleichung die Coefficienten als einander völlig gleich betrachten, da ein kleiner Unterschied in diesen nur eine kleine Grösse erster Ordnung hervorbringen kann. Sei daher der gemeinschaftliche Werth dieser Coefficienten c, dann wird

$$\Omega = c\delta(a) + c\delta(b) + \ldots + c\delta(n) - c\delta(a') - c\delta(b') - \ldots - c\delta(n')$$

und es ergeben sich daher

$$(M,a) = (M,b) = \text{etc.} = (M,n) = \quad c$$
$$(M,a') = (M,b') = \text{etc.} = (M,n') = -c$$

folglich

$$R = 2nc^2$$

Da nun aus dem Täfelchen der Bedingungsgleichungen des Art. 16, und aus der vorstehenden Berechnung der Gewichte mehrerer Seiten sich leicht ergiebt, dass der Ausdruck eines jeden der Coefficienten (I,M) , (II,M) , etc. aus zwei gleichen, mit entgegengesetzten Zeichen behafteten Gliedern besteht, so werden

$$(I,M) = (II,M) = \text{etc.} = 0$$

und der allgemeine Ausdruck der gesuchten Gewichte wird

$$P = \frac{1}{R}$$

woraus hervorgeht, dass die Bedingungsgleichungen im gegenwärtigen Falle gar keine Wirkung auf die Gewichte ausüben *). Bezeichnen wir nun das gemeinschaftliche Gewicht der Logarithmen der beiden zu berechnenden Seiten des ersten Dreiecks mit P_1 , das der beiden zu berechnenden Seiten des zweiten Dreiecks mit P_2 , u. s. w., so geben die vorstehenden Entwickelungen sogleich

$$P_n = \frac{1}{2nc^2} , \; P_{n-1} = \frac{1}{2(n-1)c^2} , \; P_{n-2} = \frac{1}{2(n-2)c^2} ,$$
$$\text{etc. } P_3 = \frac{1}{6c^2} , \quad P_2 = \frac{1}{4c^2} , \; P_1 = \frac{1}{2c^2} ,$$

folglich

$$P_1 : P_2 : P_3 : P_4 : \text{etc.} = 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \text{etc.}$$

w. z. b. w.

---

*) Dieser gehört also unter die Fälle, die oben im Art. 2 im Allgemeinen angedeutet worden sind.

24.

Um zur Kenntniss der mittleren Fehler zu gelangen, die in Folge der vorstehenden Ermittelungen den Dreiecksseiten beizulegen sind, bedarf es der Kenntniss des mittleren Fehlers der Beobachtungen, denen das Gewicht = 1 beigelegt worden ist, aber aus unserem Beispiele selbst kann man diesen nicht erlangen, da es ein fingirtes ist. Es hindert uns aber nichts aus irgend einer wirklich ausgeführten Triangulation diesen mittleren Fehler zu entnehmen, und hier anzuwenden.

Im Art. 151 der Abhandlung wurde in Bezug auf das Hauptbeispiel derselben der mittlere Fehler einer einzelnen Beobachtung einer Richtung = 1″,984 gefunden, und obgleich diese Bestimmung auf einer zu kleinen Anzahl von Beobachtungen beruht, als dass man sie für ganz sicher halten könnte, so will ich sie doch im gegenwärtigen Beispiel anwenden. Durch die Multiplication der eben angeführten Zahl mit $\sqrt{2}$ erhält man den mittleren Fehler einer einzelnen Beobachtung eines Winkels = 2″,806, aber es muss jedenfalls voraus gesetzt werden, dass man bei einer Triangulation, bei welcher Winkel gemessen werden, sich nicht begnügt jeden Winkel nur Einmal zu messen, sondern dass man das Resultat der gemessenen Winkel aus einer angemessenen Anzahl von einzelnen Messungen ableitet. Demzufolge will ich annehmen, dass jeder Winkel, von welchem in diesem Aufsatze die Rede ist, 25 Mal gemessen worden sei, woraus hervorgeht, dass der mittlere Fehler eines jeden der Winkel, welchen oben das Gewicht = 1 beigelegt wurde, dem fünften Theil des oben angegebenen Fehlers der einzelnen Winkelmessung gleich gesetzt werden muss. Es soll daher hier der mittlere Fehler der Winkelmessungen oder Beobachtungen, denen das Gewicht = 1 beigelegt worden ist,

$$= 0'',561$$

angenommen werden, und hieraus folgen die mittleren Fehler der Logarithmen der Seiten der verschiedenen Dreiecke, deren Gewichte im Vorhergehenden berechnet worden sind, bez.

$$= 10{,}9 \ , \ = 15{,}1 \ , \ = 21{,}5$$

in Einheiten der siebenten Decimale. Wenn die Längen der Seiten bekannt sind, so kann man hieraus die mittleren Fehler der Seiten selbst finden, denn nennt man die Länge irgend einer Seite ϱ , so wird

$$\delta\varrho = \frac{\varrho}{Mod.} \cdot \frac{\delta \log \varrho}{1000000}$$

wo $\delta \log \varrho$ in Einheiten der siebenten Decimale, gleich wie oben geschehen, auszudrücken ist.

Nehmen wir z. B. an, die Länge der Seite (1)(2) unserer Figur, die als Grundlinie in den Berechnungen der Gewichte angenommen worden ist, sei 20000 Meter, so findet man die Seiten

$$(2)(3) = 23581^m\,,\ (3)(4) = 23581^m\,,\ (4)(5) = 24441^m$$

und die mittleren Fehler dieser Seiten bez.

$$= 0^m,0594\,,\ = 0^m,0829\,,\ = 0^m,1210$$

oder nahe

$$= \frac{1}{398500}\,,\ = \frac{1}{287600}\,,\ = \frac{1}{202000}$$

der Längen derselben. Nehmen wir an, dass von der letzten dieser Seiten an, das Netz sich durch eine Anzahl sehr nahe gleichseitiger Dreiecke fortsetze, so wird der mittlere Fehler der zwei letzten Seiten des sechzehnten Dreiecks schon

$$= \frac{1}{87500}$$

der Länge derselben. Die mittleren Fehler der ersten Seiten sind hier sehr klein, aber es darf nicht ausser Acht gelassen werden, dass die ganze Länge einer dieser Seiten als Grundlinie betrachtet worden ist. In der Praxis sind die gemessenen Grundlinien gemeiniglich weit kleiner wie die Seiten der grossen Dreiecke, und es werden daher in der Wirklichkeit die mittleren Fehler der Seiten wesentlich grösser ausfallen wie oben.

25.

Um diese Untersuchungen fortzusetzen sollen jetzt die Gewichte der Diagonalen (2)(4) und (1)(5) nebst denen der Winkel, die sie mit den anliegenden Seiten machen, ermittelt werden. Da diese Winkel bis jetzt noch zu den nicht beobachteten gehören, so bedarf die Berechnung der Gewichte derselben einer besonderen Vorbereitung. Aus den Dreiecken (3)(4)(5), (2)(4)(5), (2)(3)(4) der Figur bekommt man

$$1 = \frac{\sin(1)_2 \sin(3)_2 \sin(2)_2}{\sin(1)_2 \sin\{(3)_2 + (1)_4 + (2)_4\} \sin(2)_2}$$

die nachdem sie in Bezug auf $(3)_2$ aufgelöst worden ist,

$$\operatorname{tg}(3)_2 = \frac{\sin(1)_2 \sin(2)_2 \sin\{(1)_4 + (2)_4\}}{\sin(1)_2 \sin(2)_2 - \sin(1)_2 \sin(2)_2 \cos\{(1)_4 + (2)_4\}}$$

giebt. Hieraus erhielt ich

$$(3)_2 = 25^0\ 31',75$$

und hierauf durch die Gleichung $(3)_5 = (3)_2 + (1)_4 + (2)_4 + (1)_5 - 180^0$

$$(3)_5 = 27^0\ 31',75$$

Behandelt man nun zuerst die erste der obigen Gleichungen als ob sie eine der Bedingungsgleichungen wäre, so bekommt man

$$0 = -(1.11914)\delta(2)_2 + (1.64428)\delta(3)_2 - (1.15234)\delta(1)_3$$
$$+(1.01153)\delta(2)_3 + (1.62617)\{\delta(3)_2 + \delta(1)_4 + \delta(2)_4\} + (1.18461)\delta(1)_5$$

wo die in Klammern eingeschlossenen Zahlen die Logarithmen der Coefficienten sind, und löst man diese Gleichung in Bezug auf $\delta(3)_2$ auf, so erhält man

$$\Omega = \delta(3)_2 = +0.15233\delta(2)_2 + 0.16444\delta(1)_3 - 0.11890\delta(2)_3$$
$$-0.48958\delta(1)_4 - 0.48958\delta(2)_4 - 0.17712\delta(1)_5$$

also

$$(M,2)_2 = +0.1523\ ,\ (M,2)_3 = -0.1189\ ,\ (M,2)_4 = -0,4896$$
$$(M,1)_3 = +0.1644\ ,\ (M,1)_4 = -0.4896\ ,\ (M,1)_5 = -0.1771$$

und hieraus folgt $R = 0.5751$. Ferner erhält man

$$(I,M) = 0\ ,\ (II,M) = -0.4562\ ,\ (III,M) = -0.5023$$

welche $S = 0.1535$, und endlich

$$P = 2.372$$

geben, welches das Gewicht des Winkels $(3)_2$ ist.

26.

Um das Gewicht des Winkels $(3)_5$ zu finden, bediene ich mich der Gleichung

$$\delta(3)_5 = \delta(3)_2 + \delta(1)_4 + \delta(2)_4 + \delta(1)_5$$

aus welcher ich durch den Ausdruck für $\delta(3)_2$ des vor. Art. diese Aenderung eliminire. Es wird also hier

$$\Omega = \delta(3)_5 = +0.15233\,\delta(2)_2 + 0.16444\,\delta(1)_3 - 0.11890\,\delta(2)_3$$
$$+0.51042\,\delta(1)_4 + 0.51042\,\delta(2)_4 + 0.82288\,\delta(1)_5$$

folglich

$$(M,2)_2 = +0.1523\ ,\ (M,2)_3 = -0.1189\ ,\ (M,2)_4 = +0.5104$$
$$(M,1)_3 = +0.1644\ ,\ (M,1)_4 = +0.5104\ ,\ (M,1)_5 = +0.8229$$

$$R = 1.2708$$

$$(I,M) = 0,\ (II,M) = +0.5438\ ,\ (III,M) = +1.4977$$

$$S = 0.8463$$

$$P = 2.356$$

welches das Gewicht des Winkels $(3)_5$ ist. Es verdient angemerkt zu werden, dass die Gewichte der beiden berechneten Winkel $(3)_2$ und

$(3)_5$ beträchtlich, im Verhältnisse nahe wie 1 : 1,6 grösser sind wie die Gewichte der beobachteten Winkel deren jedes = 1.5 ist.

27.

Zur Berechnung des Gewichts der Diagonale (2)(5) giebt die Figur zuerst

$$\log(2)(5) = (\log(1)(2) + \log.\sin(1)_1 \sin\{(1)_3 + (2)_3\} - \log.\sin(3)_3 \sin(3)_5$$

woraus man durch die Differentiation

$$\Omega = +\,9.374\,\delta(1)_1 - 12.156\,\{\delta(1)_3 + \delta(2)_3\} - 17.667\,\delta(3)_3 - 40.396\,\delta(3)_5$$

findet.

Da aber $(3)_5$ kein beobachteter Winkel ist, so muss dessen Variation durch die im vor. Art. dafür erhaltene Gleichung eliminirt werden. Nachdem dieses geschehen ist, wird

$$\Omega = +9.374\delta(1)_1 - 6.154\delta(2)_2 - 18.799\delta(1)_3 - 7.353\delta(2)_3 - 17.667\delta(3)_3 - 20.619\delta(1)_4 - 20.619\delta(2)_4 - 33.242\delta(1)_5$$

Es wird daher im jetzigen Falle

$$(M,1)_1 = +\,9.374\,,\ (M,1)_4 = -\,20.619$$
$$(M,2)_2 = -\,6.154\,,\ (M,2)_4 = -\,20.619$$
$$(M,1)_3 = -\,18.799\,,\ (M,1)_5 = -\,33.242$$
$$(M,2)_3 = -\,7.353$$
$$(M,3)_3 = -\,17.667$$
$$R = 2800.6$$
$$(I,M) = -\,8.293\,,\ (II,M) = -\,34.126\,,\ (III,M) = -\,72.660$$
$$S = 2171.1$$
$$P = 0.001588$$

für das Gewicht von log (2)(5). Dieses ist merklich grösser wie das Gewicht des log der Seite (3)(4).

28.

Behandeln wir nun die Diagonale (1)(5) eben so, so bekommen wir nach und nach

$$1 = \frac{\sin\{(1)_3+(2)_3+(3)_3+(2)_5\}\sin(1)_3\sin(1)_4\sin(1)_5}{\sin(2)_5\sin(1)_4\sin(2)_3\sin(2)_4}$$

$$\operatorname{tg}(2)_5 = \frac{\sin(1)_3\sin(1)_4\sin(1)_5\sin\{(1)_3+(2)_3+(3)_3\}}{\sin(1)_4\sin(2)_3\sin(2)_4 - \sin(1)_3\sin(1)_4\sin(1)_5\cos\{(1)_3+(2)_3+(3)_3\}}$$

$$(2)_5 = 4^\circ 35' 5''\,,\ (2)_1 = 5^\circ 24' 55''$$

$$0 = -(0.97193)\,\delta(1)_1 + (1.01153)\,\delta(1)_2 - (1.11914)\,\delta(2)_2$$
$$-(2.34656)\{\delta(1)_3 + \delta(2)_3 + \delta(3)_3 + \delta(2)_5\} + (1.11914)\,\delta(1)_4$$
$$-(0.88442)\,\delta(2)_4 + (1.18461)\,\delta(1)_5 - (2.41922)\,\delta(2)_5$$

$$\Omega = \delta(2)_5 = -0.01934\,\delta(1)_1 + 0.02119\,\delta(1)_2 - 0.02715\,\delta(2)_2$$
$$-0.45828\,\delta(1)_3 - 0.45828\,\delta(2)_3 - 0.45828\,\delta(3)_3$$
$$+0.02715\,\delta(1)_4 - 0.01581\,\delta(2)_4 + 0.03156\,\delta(1)_5$$

$$(M,1)_1 = -0.0193\,,\quad (M,1)_3 = -0.4583\,,\quad (M,1)_4 = +0.0271$$
$$(M,1)_2 = +0.0212\,,\quad (M,2)_3 = -0.4583\,,\quad (M,2)_4 = -0.0158$$
$$(M,2)_2 = -0.0271\,,\quad (M,3)_3 = -0.4583\,,\quad (M,1)_5 = +0.0316$$
$$R = 0.6338$$
$$(I,M) = -0.4563\,,\quad (II,M) = -0.4583\,,\quad (III,M) = -0.4424$$
$$S = 0.2046$$
$$P = 2.331$$

welches das Gewicht des Winkels $(2)_5$ ist.

29.

Ferner

$$\Omega = \delta(2)_1 = -\delta(1)_3 - \delta(2)_3 - \delta(3)_3 - \delta(2)_5$$

und nach der Elimination von $\delta(2)_5$ durch die betr. Gleichung des vor. Art.

$$(M,1)_1 = +0.0193\,,\quad (M,1)_3 = -0.5417\,,\quad (M,1)_4 = -0.0271$$
$$(M,1)_2 = -0.0212\,,\quad (M,2)_3 = -0.5417\,,\quad (M,2)_4 = +0.0158$$
$$(M,2)_2 = +0.0271\,,\quad (M,3)_3 = -0.5417\,,\quad (M,1)_5 = -0.0316$$
$$R = 0.8840$$
$$(I,M) = -0.5437\,,\quad (II,M) = -0.5417\,,\quad (III,M) = -0.5576$$
$$S = 0.3000$$
$$P = 1.712$$

für das Gewicht des Winkels $(2)_1$. Hier finden wir wieder die Gewichte der beiden berechneten Winkel grösser als das Gewicht der beobachteten, und zwar das des Einen im Verhältniss wie

$$1 : 1{,}554$$

und das des Anderen wie

$$1 : 1{,}142$$

30.

Ferner wird

$$\log(1)(1') = \log(1)(2) + \log.\sin(1)_2 \sin\{(1)_3 + (2)_3 + (3)_3\} - \log.\sin(3)_3 \sin(2)_5$$

$$\Omega = + 10.269\,\delta(1)_2 - 119.408\,\{\delta(1)_3 + \delta(2)_3 + \delta(3)_3\} - 17.667\,\delta(3)_3 - 262.56\,\delta(2)_5$$

und nach der Elimination von $\delta(2)_5$

$$(M,1)_1 = + 5.078\,,\quad (M,1)_3 = + 0.914\,,\quad (M,1)_4 = - 7.127$$
$$(M,1)_2 = + 4.706\,,\quad (M,2)_3 = + 0.914\,,\quad (M,2)_4 = + 4.152$$
$$(M,2)_2 = + 7.127\,,\quad (M,3)_3 = - 16.753\,,\quad (M,1)_5 = + 8.287$$
$$R = 517{,}5$$
$$(I,M) = - 6.969\,,\quad (II,M) = + 0.914\,,\quad (III,M) = - 3.221$$
$$S = 20.6$$
$$P = 0.002010$$

für das Gewicht des log. der Seite (1)(5), und dieses Gewicht liegt also zwischen den Gewichten der logg. der Seiten (2)(3) und (3)(4) nahe in der Mitte; es ist grösser wie das Gewicht der kürzeren Diagonale (2)(5). Da die Linie (1)(5) die längste ist, die man in der Figur von einem Dreieckpunkt zu einem andern ziehen kann, und durch zwei sehr kleine Winkel mit den weit kürzeren Dreiecksseiten (1)(3) und (3)(5) verbunden ist, so könnte man leicht im Voraus die Ansicht fassen, dass sowohl das Gewicht dieser Linie, wie die Gewichte der beiden genannten, anliegenden Winkel sehr klein werden müssten. Die vorstehenden Rechnungen geben aber ein entgegengesetztes Resultat, und zeigen also, wie sehr man sich in solchen, auf keine mathematische Untersuchungen gegründeten Ansichten irren kann.

31.

Es soll nun angenommen werden, dass ausser den bisher als beobachtet angenommenen Winkeln, auch der Winkel (4)(2)(5), der in der Figur mit $(3)_2$ bezeichnet worden ist, beobachtet sei. Diese Annahme fügt den drei bisher vorhandenen Bedingungsgleichungen eine vierte hinzu, die keine andere ist, wie die erste Gleichung des Art. 25. Da die Coefficienten der Variationen dieser Gleichung schon dort berechnet worden sind, so können wir das neue Täfelchen der Differentialquotienten sogleich aufstellen, zur einfacheren Behandlung dieser Gleichung sollen jedoch alle Coefficienten derselben mit der Zahl 40 dividirt werden. Somit erhalten wir das folgende Täfelchen.

r	s	$q(r.I)_s$	$q(r.II)_s$	$q(r.III)_s$	log $q(r.IV)_s$	$q(r.IV)_s$
1	1	1	—	—	—	—
1	2	1	—	—	—	—
2		—	1	—	9.51708n	−0.3289
3		—	—	—	0.33429	+2.1592
1	3	—	—	1	9.55028n	−0.3550
2		—	1	—	9.40947	+0.2567
3		1	—	—	—	—
1	4	—	1	—	0.02411	+1.0571
2		—	—	1	0.02411	+1.0571
1	5	—	—	1	9.58255	+0.3824

Hieraus bekommt man folgende Werthe der Coefficienten der Endgleichungen,

$$(I,I) = 3\ ,\ (I,II) = 0\ ,\ (I,III) = 0\ ,\ (I,IV) = 0$$
$$(II,II) = 3\ ,\ (II,III) = 0\ ,\ (II,IV) = +\ 0.9849$$
$$(III,III) = 3\ ,\ (III,IV) = +\ 1.0845$$
$$(IV,IV) = 7.3434$$

und diese geben

$$(2)_1 = 0\ ,\quad (3)_1 = 0\ ,\quad (4)_1 = 0$$
$$(3)_2 = 0\ .\quad (4)_2 = -\ (9.51627)$$
$$(4)_3 = -\ (9.55811)$$
$$(I,I) = 3\ ,\ (II,II,1) = 3\ ,\ (III,III,2) = 3\ ,\ (IV,IV,3) = 6.6281$$

32.

Es ist klar, dass hierauf die Gewichte der Stücke des Dreiecks (1)(2)(3) sich nicht ändern können, da dieses Dreieck an der hinzugekommenen Bedingungsgleichung keinen Theil hat. Untersuchen wir aber die Gewichte einiger anderen Winkel und Seiten. Zuerst soll das Gewicht des Winkels $(3)_2$ berechnet werden. Hiefür wird

$$(M,3)_2 = 1\ ,\ R = 1\ ,\ (IV,M) = (IV,M,3) = +\ 2.1592$$
$$S = 0.7034\ ,\quad P = 3.372$$

Dieses Gewicht hat sich durch die hinzugekommene Bedingungsgleichung im Verhältniss von

$$1 : 1{,}421$$

vergrössert.

33.

Für das Gewicht von $(3)_5$ könnten wir jetzt die Gleichung

$$\delta(3)_5 = \delta(3)_2 + \delta(1)_4 + \delta(2)_4 + \delta(1)_5$$

anwenden, aber es ist eben so richtig, und einfacher dieselbe Gleichung anzuwenden, die im Art. 26 nach der Elimination von $\delta(3)_2$ gedient hat, auch hier zu gebrauchen. Alle dort berechneten Zahlen bleiben bis auf S und P dieselben, es kommt aber

$$(IV,M) = +1.3049$$

hinzu, und hiemit werden

$$(I,M) = 0\ ,\ (II,M,1) = +0.5438\ ,\ (III,M,2) = +1.4977$$

wie dort, hingegen

$$(IV,M,3) = +0.5849\ ,\ S = 0.8979$$
$$P = 2.682$$

im Verhältniss von

$$1 : 1.138$$

grösser wie vorher.

34.

Berechnung des Gewichts des Winkels $(2)_2$.

$$(M,2)_1 = 1\ ,\ R = 1\ ,\ (II,M) = 1\ ,\ (IV,M) = -0.3289$$
$$(II,M,1) = 1\ ,\ (IV,M,3) = -0.6572\ ,\ S = 0.3985$$
$$P = 1.663$$

im Verhältniss von

$$1 : 1.108$$

grösser wie vorher.

35.

Gewicht des Winkels $(1)_4$.

$$(M,1)_4 = 1\ ,\ R = 1\ ,\ (II,M) = 1\ ,\ (IV,M) = +1.0571$$
$$(II,M,1) = 1\ ,\ (IV,M,3) = +0.7308\ ,\ S = 0.4139$$
$$P = 1.706$$

im Verhältniss von

$$1 : 1.137$$

grösser wie vorher.

36.

Gewicht der Seite (2)(5). Zu den Zahlen des Art. 27 kommt

$$(IV,M) = -49.52$$

hinzu, und es werden demzufolge

$$(I,M) = -8.293\ ,\ (II,M,1) = -34.126\ ,\ (III,M,2) = -72,660$$
$$R = 2800,6$$

gleichwie a. a. O., aber ausserdem

$$(IV,M,3) = -12.04$$

und hiemit bekommt man

$$S = 2193.0$$
$$P = 0.001646$$

im Verhältniss von

$$1 : 1{,}036$$

grösser wie vorher.

37.

Gewicht der Seite (4)(5). Ausser den Zahlen des Art. 22 wird hier noch

$$(IV,M) = -29.13\ ,\ (IV,M,3) = -28.73$$
$$S = 147.9$$
$$P = 0.000967$$

im Verhältniss von

$$1 : 1{,}120$$

grösser wie vorher. Man sieht hieraus, dass die neu hinzugekommene Bedingungsgleichung alle Gewichte vergrössert, und im gegenwärtigen Falle ist die Vergrösserung am Ansehnlichsten bei dem Winkel $(3)_2$, der als beobachteter Winkel hinzugekommen ist.

38.

Nehmen wir jetzt an, dass ausser den bisher als beobachtet betrachteten Winkeln, auch der Winkel $(2)(5)(3) = (3)_5$ beobachtet worden ist, und untersuchen wir wieder die Gewichte die hieraus hervorgehen. Die neue Bedingungsgleichung ist nun

$$0 = \delta(3)_2 + \delta(1)_4 + \delta(2)_4 + \delta(1)_5 - \delta(3)_5$$

und das Täfelchen der Differentialquotienten wird in Folge dessen das folgende

r	s	$q(r.I)_s$	$q(r.II)_s$	$q(r.III)_s$	$\log q(r.IV)_s$	$q(r.IV)_s$	$q(r.V)_s$
1	1	1	—	—	—	—	—
1	2	1	—	—	—	—	—
2		—	1	—	9.51708*n*	−0.3289	—
3		—	—	—	0.33429	+2.1592	1
1	3	—	—	1	9.55028*n*	−0.3550	—
2		—	1	—	9.40947	+0.2567	—
3		1	—	—	—	—	—
1	4	—	1	—	0.02411	+1.0571	1
2		—	—	1	0.02411	+1.0571	1
1	5	—	—	1	9.58255	+0.3824	1
3		—	—	—	—	—	−1

Die Coefficienten der Endgleichungen, die hieraus folgen, sind in der folgenden Tafel zusammengestellt,

i	(i,I)	(i,II)	(i,III)	(i,IV)	(i,V)
I	3	0	0	0	0
II		3	0	+ 0.9849	+ 1
III			3	+ 1.0845	+ 2
IV				7.3434	+ 1.6558
V					5

und hieraus bekommt man

$$(2)_1 = 0\ ,\ (3)_1 = 0\ ,\ (4)_1 = 0\ ,\ (5)_1 = 0$$
$$(3)_2 = 0\ ,\ (4)_2 = -(9.51627),\ (5)_2 = -(9.52288)$$
$$(4)_3 = -(9.55811),\ (5)_3 = -(9.82391)$$
$$(5)_4 = -(9.73546)$$
$$(I,I)=3,\ (II,II,1)=3,\ (III,III,2)=3,\ (IV,IV,3)=6.6281,\ (V,V,4)=1.3731$$

39.

Es sollen jetzt wieder die Gewichte derselben Stücke des Netzes berechnet werden, wie im vorhergehenden Falle.

Gewicht des Winkels $(3)_2$. Zu den Zahlenwerthen des Art. 32 kommt hinzu

$$(V,M) = 1$$

und hieraus folgen

$$(V,M,4) = -0{,}1742\ ,\ S = 0{,}7255$$
$$P = 3.644$$

im Verhältniss von

$$1 : 1.081$$

grösser wie vorher.

40.

Gewicht des Winkels $(3)_5$. Hiefür bekommen wir jetzt, nachdem dieser Winkel zu den beobachteten gehört,

$$(M,3)_5 = 1\ ,\ R = 1\ ,\ (V,M) = (V,M,4) = -1\ ,\ S = 0.7283$$
$$P = 3.681$$

im Verhältniss von

$$1 : 1.373$$

grösser wie vorher.

41.

Gewicht des Winkels $(2)_2$. Hier findet man ausser den Zahlenwerthen des Art. 34

$$(V,M) = 0$$
$$(V,M,4) = + 0.0240\ ,\ S = 0.3989$$
$$P = 1.664$$

Der Zuwachs dieses Gewichts ist sehr klein.

42.

Gewicht des Winkels $(1)_4$. Zu den Zahlenwerthen des Art. 35 kommt hinzu

$$(V,M) = 1$$
$$(V,M,4) = + 0.2702\ ,\ S = 0.4671$$
$$P = 1.877$$

im Verhältniss von

$$1 : 1.100$$

grösser wie vorher.

43.

Gewicht der Seite (2)(5). Zu Art. 36 kommt hinzu

$$(V,M) = - 74.48$$
$$(V,M,4) = - 8.11\ ,\ S = 2240.9$$
$$P = 0.001786$$

im Verhältniss von

$$1 : 1.086,$$

grösser wie vorher.

44.

Gewicht der Seite (4)(5). Zu den Zahlen des Art. 37 kommen hinzu

$$(V,M) = - 28.46$$
$$(V,M,4) = - 12.10\ ,\ S = 254.5$$
$$P = 0.001078$$

im Verhältniss von

$$1 : 1.115$$

grösser wie vorher. Die zweiseitige Beobachtung der Diagonale hat also hier die Gewichte, die aus der einseitigen Beobachtung derselben hervorgehen, mit Ausnahme des Gewichts der hinzugekommenen Beobachtung, nur wenig vergrössert.

45.

Um endlich auch die Wirkung einer Bedingungsgleichung numerisch darlegen zu können, in welcher sehr kleine Winkel vorkommen, soll noch angenommen werden, dass der Winkel $(5)(1)(3) = (2)_1$ gemessen worden ist, welcher nach dem Art. 28 nur $5^0\ 25'$ beträgt.

Die Bedingungsgleichung, die hieraus entsteht, ist schon im Art. 28 aufgestellt, und das neue Täfelchen der Differentialquotienten wird daher, nachdem die neue Bedingungsgleichung mit der Zahl 200 dividirt und $\delta(2)_5$ daraus eliminirt worden ist, das folgende.

r	s	$q(r.I)_s$	$q(r.II)_s$	$q(r.III)_s$	$\log q(r.IV)_s$	$q(r.IV)_s$	$q(r.V)_s$	$\log q(r.VI)_s$	$q(r.VI)_s$
1	1	1	—	—	—	—	—	8.67090n	— 0.0469
2		—	—	—	—	—	—	0.38440	+ 2.4233
1	2	1	—	—	—	—	—	8.71050	+ 0.0513
2		—	1	—	9.51708n	— 0.3289	—	8.81811n	— 0.0658
3		—	—	—	0.33429	+ 2.1592	1	—	—
1	3	—	—	1	9.55028n	— 0.3550	—	0.11819	+ 1.3128
2		—	1	—	9.10947	+ 0.2567	—	0.11819	+ 1.3128
3		1	—	—	—	—	—	0.11819	+ 1.3128
1	4	—	1	—	0.02411	+ 1.0571	1	8.81811	+ 0.0658
2		—	—	1	0.02411	+ 1.0571	1	8.58339n	— 0.0383
1	5	—	—	1	9.58255	+ 0.3824	1	8.88358	+ 0.0765
3		—	—	—	—	—	—1	—	—

Zu den Coefficienten der Endgleichungen des Art. 38 kommen jetzt die folgenden hinzu.

$(I,VI) = +\ 1.3172$, $(II,VI) = +\ 1.3128$, $(III,VI) = +\ 1.3510$
$(IV,VI) = -\ 0.0492$, $(V,VI) = +\ 0.1040$, $(VI,VI) = \ \ 11.0631$

und die für die folgenden Rechnungen erforderlichen Hülfsgrössen sind in vollständiger Zusammenstellung die folgenden.

$(2)_1 = 0, (3)_1 = 0, (4)_1 = 0$, $(5)_1 = 0$, $(6)_1 = -(9.64254)$
$(3)_2 = 0, (4)_2 = -(9.51627), (5)_2 = -(9.52288), (6)_2 = -(9.64107)$
$(4)_3 = -(9.55811), (5)_3 = -(9.82391), (6)_3 = -(9.65354)$
$(5)_4 = -(9.73546), (6)_4 = +(9.16475)$
$(6)_5 = +(9.71209)$

$(I,I) = 3$, $(II,II,1) = 3$, $(III,III,2) = 3$
$(IV,IV,3) = 6.6281$, $(V,V,4) = 1.3731$, $(VI,VI,5) = 8.7956$

46.

Berechnen wir nun wieder die Gewichte derselben Stücke des Dreiecksnetzes, wie vorher, aber mit Hinzufügung der Stücke des Dreiecks (1)(2)(3).

Gewicht des Winkels $(1)_1$. Hier erhalten wir

$$\Omega = \delta(1)_1 \ , \ (M,1)_1 = 1$$

und alle übrigen Grössen dieser Gattung sind Null.
Ferner

$$R = 1$$
$$(I,M) = 1 \ , \ (VI,M) = - \ 0.0469$$

und hieraus

$$(VI,M,5) = - \ 0.4859 \ , \ S = 0.3601$$
$$P = 1.563$$

im Verhältniss von 1 : 1.042 grösser wie das ursprüngliche Gewicht.

47.

Gewicht des Winkels $(1)_2$.

$$(M,1)_2 = 1 \ , \ (I,M) = 1 \ , \ (VI,M) = + \ 0.0513 \ , \ R = 1$$
$$(VI,M,5) = - \ 0.3877 \ , \ S = 0.3504$$
$$P = 1.540$$

im Verhältniss von 1 : 1.037 grösser wie das ursprüngliche Gewicht. Es ist leicht einzusehen, dass die Gewichte dieser beiden Winkel durch die hinzugekommene Beobachtung des Winkels $(2)_1$ nicht sonderlich vergrössert werden können.

48.

Gewicht des Winkels $(3)_3$. Man findet hier

$$(M,3)_3 = 1 \ , \ (I,M) = 1 \ , \ (VI,M) = + \ 1.3128 \ , \ R = 1$$
$$(VI,M,5) = + \ 0.8738 \ , \ S = 0.4201$$
$$P = 1.725$$

im Verhältniss von 1 : 1.150 grösser wie das ursprüngliche Gewicht. Die Vergrösserung dieses Gewichts ist schon bedeutender, wie die der beiden vorher betrachteten.

49.

Gewicht des hinzugekommenen, beobachteten Winkels $(2)_1$. Hier sind

$$(M,2)_1 = 1 \ , \ (VI,M) = (VI,M,5) = + \ 2.4233$$
$$R = 1 \ , \ S = 0.6676$$
$$P = 3.009$$

im Verhältniss von 1 : 1.758 grösser wie das ursprüngliche, im Art. 29 berechnete, Gewicht. Die Vergrösserung des Gewichts dieses kleinen Winkels ist also bedeutend.

50.

Knüpfen wir hieran sogleich die Berechnung des Gewichts des bis jetzt noch nicht beobachteten Winkels $(2)_5$, der zufolge der Art. 28 $= 4^0 45'$ ist. Wir könnten hier zur Berechnung die Gleichung für $\Omega = \delta(2)_5 =$ etc. des Art. 28 anwenden, allein es ist einfacher sich der folgenden zu bedienen,

$$\Omega = \delta(2)_1 + \delta(1)_3 + \delta(2)_3 + \delta(3)_3$$

die auf einfache Weise aus dem Dreiecke (1)(3)(5) entspringt. Diese Gleichung giebt

$$(M,2)_1 = 1\ ,\ (M,1)_3 = 1\ ,\ (M,2)_3 = 1\ ,\ (M,3)_3 = 1\ ,\ R = 4$$

Ferner

$$(I,M) = 1\ ,\ (II,M) = 1\ ,\ (III,M) = 1\ ,\ (IV,M) = -0.0983,\ (V,M) = 0$$
$$(VI,M) = +6.3617$$

und hieraus

$$(II,M,1) = 1\ ,\ (III,M,2) = 1\ ,\ (IV,M,3) = -0.7881,$$
$$(V,M,4) = -0.5715,\ (VI,M,5) = +4.6251\ ,\ S = 3.7636$$
$$P = 4.231$$

im Verhältniss von 1 : 1.814 grösser wie das im Art. 28 berechnete ursprüngliche Gewicht dieses Winkels. Zu bemerken ist hier, dass wieder nicht nur das Gewicht des berechneten Winkels $(2)_5$ grösser ist wie das des beobachteten $(2)_1$, sondern das Verhältniss der Vergrösserung desselben grösser ist, wie das jenes.

51.

Zur Berechnung des Gewichts des log. der Seite (1)(5) dient wieder die im Art. 30 erhaltene Gleichung, nachdem die Variation $\delta(2)_5$ daraus eliminirt worden ist. Dieses ist a. a. O. schon geschehen, und die dortigen numerischen Werthe gelten auch hier, nur dass

$$(IV,M) = -8.748\ ,\ (V,M) = -11.262\ ,\ (VI,M) = -21.320$$

hinzu kommen. Es werden nun hier

$$(I,M) = -6.969\ ,\ (II,M,1) = +0.914\ ,\ (III,M,2) = -3.221$$
$$(IV,M,3) = -7.884\ ,\ (V,M,4) = -5.133\ ,\ (VI,M,5) = -21.009$$
$$S = 98.7$$
$$P = 0.002388$$

Dieses Gewicht hat sich im Verhältniss von 1 : 1.188 gegen das a. a. O. berechnete vergrössert. Also ungeachtet der kleinen Winkel, auf welchen die neu hinzugekommene Bedingungsgleichung beruht, hat diese doch

wesentlich zur Vergrösserung der Gewichte der zunächst damit in Verbindung stehenden Dreiecksstücke beigetragen.

52.

Gewicht des Winkels $(3)_2$. Zu den Zahlenangaben der Artt. 32 und 39 kommt hinzu

$$(VI,M) = 0$$

und hiemit werden

$$(IV,M,3) = +\ 2.1592\,,\ (V,M,4) = -\ 0.1742\,,\ (VI,M,5) = +\ 0.2257$$

$$S = 0.7313$$

$$P = 3.726$$

und das Verhältniss der Vergrösserung von P gegen die Bestimmung des Art. 39 wie 1 : 1.022.

53.

Gewicht des Winkels $(3)_5$. Zu den Zahlenwerthen des Art. 40 kommt hinzu

$$(VI,M) = 0$$

und hiemit

$$(V,M,4) = -\ 1\,,\ (VI,M,5) = -\ 0.5154$$

$$S = 0.7585$$

$$P = 4.141$$

mit dem Vergrösserungsverhältniss 1 : 1.125 gegen die Bestimmung des Art. 40.

54.

Gewicht des Winkels $(2)_2$. Zu den Artt. 34 und 41 kommt hinzu

$$(VI,M) = -\ 0.0658$$

also

$$(II,M,1) = 1\,,\ (IV,M,3) = -\ 0.6572\,,\ (V,M,4) = +\ 0.0240$$

$$(VI,M,5) = -\ 0.5871\,,\ S = 0.4381$$

$$P = 1.780$$

mit dem Vergrösserungsverhältniss 1 : 1.070 gegen die Bestimmung des Art. 41.

55.

Gewicht des Winkels $(1)_4$. Zu den Angaben der Artt. 35 und 42 kommt hinzu

$$(VI,M) = + 0.0658$$

also

$$(II,M,1) = 1\ ,\ (IV,M,3) = + 0.7308\ ,\ (V,M,4) = + 0.2702$$
$$(VI,M,5) = - 0.1260\ ,\ S = 0.4689$$
$$P = 1.883$$

mit dem Vergrösserungsverhältniss 1 : 1.003 gegen die Bestimmung des Art. 42.

56.

Gewicht des log. der Seite (2)(5). Zu den Artt. 36 und 43 kommt hinzu

$$(VI,M) = - 60.68$$

also

$$(I,M) = - 8.293,\ (II,M,1) = - 34.126,\ (III,M,2) = - 72.660$$
$$(IV,M,3) = - 12.04,\ (V,M,4) = - 8.11\ ,\ (VI,M,5) = - 14.97$$
$$S = 2266.4$$
$$P = 0.001872$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 1,048, gegen die Bestimmung des Art. 43.

57.

Gewicht des log. der Seite (4)(5). Zu den Artt. 37 und 44 kommt hinzu

$$(VI,M) = - 7.91$$

hiemit

$$(I,M) = - 8.29,\ (II,M,1) = 0\ ,\ (III,M,2) = - 1.10$$
$$(IV,M,3) = - 28.73,\ (V,M,4) = - 12.10,\ (VI,M,5) = - 14.21$$
$$S = 277.5$$
$$P = 0.001106$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 1.026 gegen Art. 44.

58.

Schliesslich soll angenommen werden, dass auch der Winkel $(2)_5$ beobachtet worden ist, wodurch den bisherigen Bedingungsgleichungen die folgende hinzugefügt werden muss.

$$(2)_1 + (1)_3 + (2)_3 + (3)_3 + (2)_5 = 180^0$$

Die Tafel des Art. 45 bekommt in Folge dessen die folgende Zusatzcolumne.

r	s	$q(r,VII)$
1	1	—
2		1
1	2	—
2		—
3		—
1	3	1
2		1
3		1
1	4	—
2		—
1	5	—
2		1
3		—

Zu den Coefficienten der Endgleichungen kommen hinzu

$(I,VII) = 1$, $(II,VII) = 1$, $(III,VII) = 1$, $(IV,VII) = -0.0983$

$(V,VII) = 0$, $(VI,VII) = +6.3617$, $(VII,VII) = 5$

und zu den Hülfsgrössen die folgenden

$(7)_1 = -(9.52288)$, $(7)_2 = -(9.52288)$, $(7)_3 = -(9.52288)$

$(7)_4 = +(9.07519)$, $(7)_5 = +(9.61924)$, $(7)_6 = -(9.72084)$

$(VII,VII,6)$ 1.2366

Es sollen nun wieder die Gewichte derselben Dreiecksstücke berechnet werden wie vorher.

59.

Gewicht des Winkels $(1)_1$. Zu den Zahlenangaben des Art. 46 kommen hinzu

$(VII,M) = 0$, $(VII,M,6) = -0.0778$

$S = 0.3650$

$P = 1.575$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 1.009, gegen die Bestimmung des Art. 46.

60.

Gewicht des Winkels $(1)_2$. Zum Art. 47 kommen hinzu

$(VII,M) = 0$, $(VII,M,6) = -0.1295$

$S = 0.3640$

$P = 1.572$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 1.021, gegen Art. 47.

61.

Gewicht des Winkels $(3)_3$. Zum Art. 48 kommen hinzu

$$(VII,M) = 1\ ,\ (VII,M,6) = +\ 0.2073$$
$$S = 0.4549$$
$$P = 1.834$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 1.064 gegen Art. 48.

62.

Gewicht des Winkels $(2)_1$. Zum Art. 49 kommen hinzu

$$(VII,M) = 1\ ,\ (VII,M,6) = -\ 0.2742$$
$$S = 0.7284$$
$$P = 3.682$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 1.223 gegen Art. 49.

63.

Gewicht des hinzugekommenen, beobachteten Winkels $(2)_6$. Zum Art. 50 kommen hinzu

$$(VII,M) = (VII,M,6) = 1$$
$$S = 0.8088$$
$$P = 5.230$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 1.266, gegen Art. 50.

64.

Berechnung des Gewichts des log. der Seite (1)(5). Zum Art. 51 kommen hinzu

$$(VII,M) = -\ 14.925\ ,\ (VII,M,6) = -\ 3.859$$
$$S = 110.7$$
$$P = 0.002458$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 1.030 gegen Art. 51.

65.

Gewicht des Winkels $(3)_2$. Zum Art. 52 kommen hinzu

$$(VII,M) = 0\ ,\ (VII,M,6) = +\ 0.0656$$
$$S = 0.7347$$
$$P = 3.770$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 1.012 gegen Art. 52.

66.

Gewicht des Winkels $(3)_5$. Zum Art. 53 kommen hinzu

$$(VII,M) = 0\ ,\ (VII,M,6) = -\ 0.1452$$
$$S = 0.7756$$
$$P = 4.457$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 1.076 gegen Art. 53.

67.

Gewicht des Winkels $(2)_2$. Zum Art. 54 kommen hinzu

$$(VII,M) = 0\ ,\ (VII,M,6) = +\ 0.2405$$
$$S = 0.4849$$
$$P = 1.941$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 1.091 gegen Art. 54.

68.

Gewicht des Winkels $(1)_4$. Zum Art. 55 kommen hinzu

$$(VII,M) = 0\ ,\ (VII,M,6) = +\ 0.2654$$
$$S = 0.5259$$
$$P = 2.109$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 1.120 gegen Art. 55.

69.

Gewicht des log. der Seite (2)(5). Zum Art. 56 kommen hinzu

$$(VII,M) = -\ 43.82\ ,\ (V,M,6) = -\ 2.39$$
$$S = 2271.0$$
$$P = 0.001888$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 1.009 gegen Art. 56. Ich habe die Berechnung dieses Gewichts eben so behandelt, wie die der übrigen Gewichte. Es liegt hier die Differentialgleichung des Art. 27 zu Grunde, in welcher die Variationen derjenigen Winkel eliminirt worden sind, die dort zu den nicht beobachteten zählten. Allein hier hätte auch die Gleichung

$$\Omega = +\ 9.374\,\delta(1)_1 - 12.156\,\{\delta(1)_3 + \delta(2)_3\}$$
$$- 17.667\,\delta(3)_3 - 40.396\,\delta(3)_5$$

desselben Artikels angewandt werden können, da jetzt alle in derselben vorkommenden Winkel zu den beobachteten zählen. Um die Uebereinstimmung der auf beide Arten berechneten Resultate zu zeigen, soll hier noch dasselbe Gewicht mit Zugrundelegung der vorstehenden Gleichung berechnet werden. Man bekommt jetzt

$$(M,1)_1 = +\ 9.374\ ,\ (M,3)_3 = -\ 17.667$$
$$(M,1)_3 = -\ 12.156\ ,\ (M,3)_5 = -\ 40.396$$
$$(M,2)_3 = -\ 12.156\ ,$$

und hieraus zuerst

$$R = 2327.3$$

ferner

$$(I,M) = -\ 8.293\ ,\ (V,M) = +\ 40.396$$
$$(II,M) = -\ 12.156\ ,\ (VI,M) = -\ 55.56$$
$$(III,M) = -\ 12.156\ ,\ (VII,M) = -\ 41.979$$
$$(IV,M) = +\ 1.195$$

und hieraus

$$(II,M,1) = -\ 12.156\ ,\ (V,M,4) = +\ 47.341$$
$$(III,M,2) = -\ 12.156\ ,\ (VI,M,5) = -\ 15.327$$
$$(IV,M,3) = +\ 9.580\ ,\ (VII,M,6) = -\ 2.212$$
$$S = 1797.8$$
$$P = 0.001888$$

wie oben.

70.

Gewicht des log. der Seite (4)(5). Zum Art. 57 kommen hinzu

$$(VII,M) = -\ 3.47\ ,\ (VII,M,6) = -\ 1.33$$
$$S = 278.9$$
$$P = 0.001107$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 1.001 gegen Art. 57.

71.

Ich werde nun noch die Gewichte der Seiten (2)(3) und (3)(4) mit Zuziehung aller Bedingungsgleichungen berechnen, die ursprünglich zwar aufgenommen, aber weiterhin übergangen worden sind.

Gewicht des log. der Seite (2)(3). Die Grundgleichung und der Werth $R = 400.1$ bleiben wie im Art. 20, und ausserdem ergeben sich

$$(I,M) = -\ 8.29\ ,\ (VI,M) = -\ 23.64\ ,\ (VII,M) = -\ 17.67$$

woraus

$$(VI,M,5) = -\ 20.00\ ,\ (VII,M,6) = -\ 4.40$$
$$S = 84.1$$
$$P = 0.003164$$

hervorgehen. Das Vergrösserungsverhältniss wird 1 : 1.193 gegen Art. 20.

72.

Gewicht des log. der Seite (3)(4). Die Grundgleichung und der Werth $R = 746.5$ bleiben wieder wie im Art. 21, und ausserdem ergeben sich

$$(I,M) = -8.29\ ,\ (IV,M) = -18.24\ ,\ (V,M) = -13.16$$
$$(VI,M) = -25.38\ ,\ (VII,M) = -17.67$$

woraus die Werthe

$$(IV,M,3) = -18.24\ ,\ (V,M,4) = -3.24$$
$$(VI,M,5) = -26.08\ ,\ (VII,M,6) = -4.72$$
$$S = 176.3$$
$$P = 0.001754$$

hervorgehen. Das Vergrösserungsverhältniss wird 1 : 1.269 gegen Art. 21.

73.

Im Vorhergehenden sind mit Ausnahme der beiden oben berechneten Gewichte die Vergrösserungsverhältnisse von Stufe zu Stufe angesetzt worden, hier sollen dagegen dieselben aus den ursprünglichen und den schliesslichen Werthen berechnet angesetzt werden, um die volle Wirkung der angeführten zwei Diagonalen in das ursprünglich betrachtete Dreiecksnetz erkennen zu können.

Winkel	Ursprüngliches Gewicht		Schliessliches Gewicht		Vergrösserungsverhältniss
$(1)_1$,	Art. 18	1.5,	Art. 59	1.575	1 : 1.050
$(1)_2$	– 18	1.5,	– 60	1.572	1 : 1.048
$(3)_3$	– 18	1.5,	– 61	1.834	1 : 1.222
$(2)_1$	– 29	1.712,	– 62	3.682	1 : 2.150
$(2)_5$	– 28	2.331,	– 63	5.230	1 : 2.244
$(3)_2$	– 25	2.372,	– 65	3.770	1 : 1.589
$(3)_5$	– 26	2.356,	– 66	4.457	1 : 1.891
$(2)_2$	– 18	1.5,	– 67	1.941	1 : 1.294
$(1)_4$	– 18	1.5,	– 68	2.109	1 : 1.406
Seiten					
log. (1)(5)	– 30	0.002010,	– 64	0.002458	1 : 1.223
– (2)(5)	– 27	0.001588,	– 69	0.001888	1 : 1.189
– (4)(5)	– 22	0.000863,	– 70	0.001107	1 : 1.283
– (3)(4)	– 21	0.001382,	– 72	0.001754	1 : 1.269
– (2)(3)	– 20	0.002652,	– 71	0.003164	1 : 1.193

Man erkennt hieraus ohne Weiteres, auf welche Dreiecksstücke die Beobachtung der zwei Diagonalen eine grössere oder kleinere Wirkung ausgeübt hat. Es liesse sich in der Figur noch eine Diagonale einführen, aber da ich meine, dass die bisher betrachteten dem Zwecke gnügen, so unterlasse ich dieses.

74.

Wir können aus dem Vorhergehenden schon einige Schlüsse ziehen, die allgemein statt finden.

1) Jede neu hinzukommende Bedingungsgleichung vergrössert die Gewichte, sei sie eine Winkel- oder sei sie eine Seitengleichung, und seien die Coefficienten derselben wie sie wollen.

2) In Folge dessen ist nicht unbedingt nothwendig in jedem Dreiecke alle drei Winkel zu messen, wenn nur statt der fehlenden Winkelgleichungen eine entsprechende Anzahl von Seitengleichungen vorhanden sind.

3) Wo keine Diagonalen eingeschnitten werden können, ist die Messung aller drei Winkel jedes Dreiecks unerlässlich.

4) In den Bedingungsgleichungen sind die kleinsten Winkel zulässig.

5) Seitengleichungen mit sehr kleinen Winkeln üben auf die Vergrösserung einiger Gewichte grossen Einfluss aus, der Einfluss überhaupt erstreckt sich aber nicht weit über den Bereich der Bedingungsgleichung hinaus.

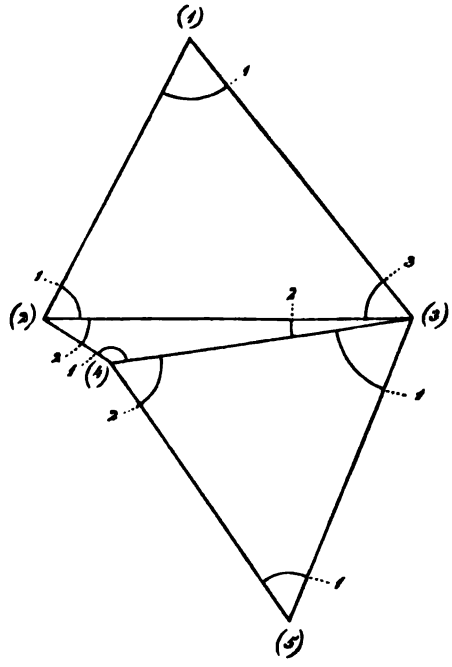
6) Seitengleichungen ohne sehr kleine Winkel vergrössern im Allgemeinen die Gewichte der Winkel, von welchen sie abhängen, weniger, ihre Wirkung erstreckt sich aber auf einen grösseren Theil des Dreiecksnetzes.

7) Zwei einseitig beobachtete Diagonalen wirken in der Regel vortheilhafter ein, wie eine zweiseitig beobachtete.

8) Da die Gewichte der Dreiecksseiten abnehmen, je weiter sie von der Grundlinie entfernt liegen, oder je mehr Dreiecke bei ihrer Berechnung zu durchlaufen sind, so ist es von bedeutendem Vortheil, in angemessenen Entfernungen von einander, so viele Grundlinien zu messen, wie die Umstände zulassen.

75.

Wir wollen jetzt die drei an einander gereihten Dreiecke der folgenden Figur betrachten.



Die Winkel, die eben so bezeichnet sind, wie in der vorhergehenden Figur, sollen hier die folgenden Werthe haben.

$$(1)_1 = 66^0, \quad (2)_2 = 33^0, \quad (1)_3 = 60^0$$
$$(1)_2 = 64, \quad (2)_3 = 10, \quad (2)_4 = 50$$
$$(3)_3 = 50, \quad (1)_4 = 137, \quad (1)_5 = 70$$

76.

Die Bedingungsgleichungen und deren Differentialquotienten werden nun wieder dieselben wie im Art. 16, nemlich die letzteren:

r	s	$q(r,I)_s$	$q(r,II)_s$	$q(r,III)_s$
1	1	1	—	—
1	2	1	—	—
2		—	1	—
1	3	—	—	1
2		—	1	—
3		1	—	—
1	4	—	1	—
2		—	—	1
1	5	—	—	1

Die Divisoren werden auch dieselben, nemlich:

$$(I,I) = 3, \quad (II,II) = 3, \quad (III,III) = 3$$

und die Gewichte aller Winkel erhalten wieder den gemeinschaftlichen Werth 1,5. Da das erste Dreieck der vorstehenden Figur dieselben Winkel hat, wie das erste Dreieck der Figur des Art. 15, so wird wieder das Gewicht des log. der Seite (2)(3) eben so wie im Art. 20, nemlich

$$= 0.002652$$

aber die Gewichte der Seiten der anderen Dreiecke werden anders.

77.

Gewicht des log. der Seite (3)(4). Die Grundgleichung ist dieselbe wie im Art. 21, aber die numerischen Werthe der Differentialquotienten werden zum Theil anders, und zwar

$$\Omega = +\ 9.38\delta(1)_1 + 32.43\delta(2)_2 - 17.67\delta(3)_3 + 22.58\delta(1)_4$$

Hier bekommt man also

$$(M,1)_1 = +\ 9.38\ ,\ (M,3)_3 = -\ 17.67$$
$$(M,2)_2 = +\ 32.43\ ,\ (M,1)_4 = +\ 22.58$$
$$R = 1961.4$$

ferner

$$(I,M) = -\ 8.29\ ,\quad (II,M) = +\ 55.01\ ,\quad (III,M) = 0$$
$$S = 1031.9$$
$$P = 0.001076$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 0,779 gegen Art. 21. Das Gewicht der oben genannten Seite (3)(4) der Figur des Art. 75 ist also wesentlich kleiner, als das Gewicht der gleichbenannten Seite der Figur des Art. 15.

78.

Gewicht des log. der Seite (4)(5). Die Grundformel ist hier die des Art. 22. und die Differentialgleichung derselben wird jetzt

$$\Omega = +\ 9.38\delta(1)_1 + 32.43\delta(2)_2 + 12.16\delta(1)_3$$
$$-17.67\delta(3)_3 + 22.58\delta(1)_4 + 7.67\delta(1)_5$$

also

$$(M,1)_1 = +\ 9.38\ ,\ (M,3)_3 = -\ 17.67$$
$$(M,2)_2 = +\ 32.43\ ,\ (M,1)_4 = +\ 22.58$$
$$(M,1)_3 = +\ 12.16\ ,\ (M,1)_5 = -\ 7.67$$
$$R = 2168.0$$
$$(I,M) = -\ 8,29\ ,\quad (II,M) = +\ 55.01\ ,\quad (III,M) = +\ 4.49$$
$$S = 1038.6$$
$$P = 0.000813$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 0,942 gegen Art. 22. Das Gewicht wird also hier wieder kleiner als das der gleichbenannten Seite der Figur des Art. 15, das Verhältniss der Verkleinerung ist jedoch nicht so gross, wie im vor. Art.

79.

Wir wollen jetzt die Verhältnisse des zweiten Dreiecks der Figur des Art. 75 so ändern, dass der Winkel $(2)_2$ grösser wird. Es seien nun die zwei Winkel dieses Dreiecks

$$(2)_2 = 75^0\,, \quad (1)_4 = 95^0$$

während alle übrigen Winkel unverändert bleiben. Untersuchen wir jetzt die Gewichte der beiden vorher betrachteten Seiten.

80.

Gewicht des log. der Seite (3)(4). Die Differentialgleichung wird jetzt

$$\Omega = + 9.38\delta(1)_1 + 5.64\delta(2)_2 - 17.67\delta(3)_3 + 1.84\delta(1)_4$$

also

$$(M,1)_1 = + 9.38\,, \quad (M,3)_3 = - 17.67$$
$$(M,2)_2 = + 5.64\,, \quad (M,1)_4 = + 1.84$$
$$R = 435.3$$
$$(I,M) = - 8.29\,, \quad (II,M) = + 7.48\,, \quad (III,M) = 0$$
$$S = 41.6$$
$$P = 0.002540$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 1.838 gegen Art. 21. Das Vergrösserungsverhältniss ist also hier bedeutend im Vergleich mit der Figur des Art. 15.

81.

Gewicht des log. der Seite (4)(5). Die Differentialgleichung wird jetzt

$$\Omega = + 9.38\delta(1)_1 + 5.64\delta(2)_2 + 12.16\delta(1)_3$$
$$- 17.67\delta(3)_3 + 1.84\delta(1)_4 - 7.67\delta(1)_5$$

also

$$(M,1)_1 = + 9.38\,, \quad (M,3)_3 = - 17.67$$
$$(M,2)_2 = + 5.64\,, \quad (M,1)_4 = + 1.84$$
$$(M,1)_3 = + 12.16\,, \quad (M,1)_5 = - 7.67$$
$$R = 641.9$$
$$(I,M) = - 8.29\,, \quad (II,M) = + 7.48\,, \quad (III,M) = + 4.49$$

$$S = 48.3$$
$$P = 0.001685$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 1,952 gegen Art. 22. Also auch das Gewicht dieser Seite hat im Vergleich mit dem der gleichbenannten Seite der Figur des Art. 15 eine bedeutende Vergrösserung erhalten.

82.

Wir können aus den vorstehenden Untersuchungen einen wichtigen Schluss ziehen.

«Die alte Vorschrift, dass in den an einander gereihten Dreiecken «eines Dreiecksnetzes kein Winkel vorkommen dürfe, welcher kleiner als «24° oder bez. 30° ist, ist einer bedeutenden Erweiterung fähig.»

Und zwar:

«In an einander gereihten Dreiecken ist auch der kleinste Winkel «statthaft, vorausgesetzt dass in demselben Dreieck kein zweiter einiger «Maassen kleiner Winkel vorkommt, und sich die Fortsetzung des Dreiecksnetzes an die längere Seite knüpft.»

Dieser Satz gilt auch dann wenn mehrere Dreiecke, die Einen kleinen Winkel enthalten, an einander gereiht sind.

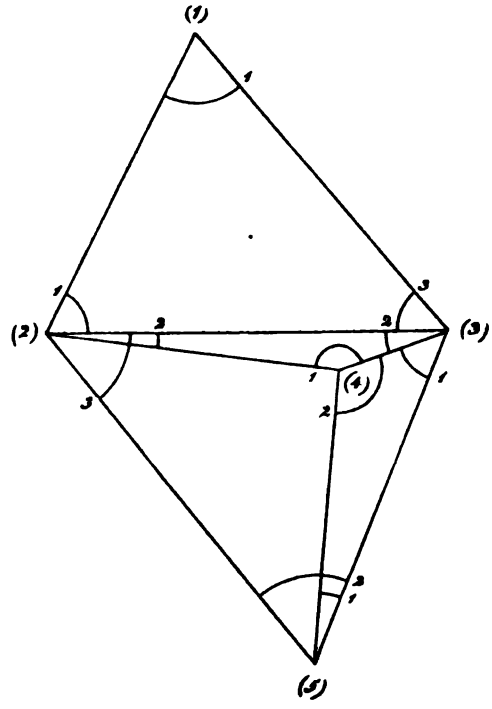
83.

Um den Nachtheil mehr hervor zu heben, welcher entsteht, wenn ein angereihtes Dreieck zwei kleine Winkel hat, und man zugleich die Fortsetzung des Netzes an die kleinste Seite knüpft, soll das folgende Beispiel dienen.

Denkt man sich in der nachfolgenden Figur vorläufig die Seite (2)(5) weg, so besteht sie wieder aus drei an einander gereihten Dreiecken, in welchen die Winkel die folgenden Werthe haben.

$$(1)_1 = 66^0, \quad (2)_2 = 5^0, \quad (1)_3 = 55^0$$
$$(1)_2 = 64, \quad (2)_3 = 15, \quad (2)_4 = 107$$
$$(3)_3 = 50, \quad (1)_4 = 160, \quad (1)_5 = 18$$

Es wird nun wieder das Gewicht jedes Winkels = 1,5, und da das erste Dreieck dieselben Winkel hat, wie in den vorhergehenden Figuren, so wird auch wieder das Gewicht des log. der Seite (2)(3) = 0.002652. Aber die Gewichte der übrigen Seiten werden nun sehr klein.



84.

Gewicht des log. der Seite (3)(4). Die Differentialgleichung wird jetzt

$$\Omega = + 9{,}38\delta(1)_1 + 240.66\delta(2)_2 - 17.67\delta(3)_3 + 57.85\delta(1)_4$$

also

$$(M,1)_1 = + 9.38\,, \quad (M,3)_3 = - 17.67$$
$$(M,2)_2 = +240.66\,, \quad (M,1)_4 = + 57.85$$
$$R = 61663$$
$$(I,M) = - 8.29\,, \quad (II,M) = + 298.51\,, \quad (III,M) = 0$$
$$S = 29726$$
$$P = 0{,}0000313$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 0.023 gegen Art. 21, und dasselbe 1 : 0.012 gegen Art. 80.

85.

Gewicht des log. der Seite (4)(5). Die Differentialgleichung wird jetzt

$$\Omega = + 9.38\delta(1)_1 + 240.66\delta(2)_2 + 14.74\delta(1)_3$$
$$- 17.67\delta(3)_3 + 57.85\delta(1)_4 - 64.80\delta(1)_5$$

also

$$(M,1)_1 = +\ 9.38\ ,\quad (M,3)_3 = -\ 17.67$$
$$(M,2)_2 = +240.66\ ,\quad (M,1)_4 = +\ 57.85$$
$$(M,1)_3 = +\ 14.74\ ,\quad (M,1)_5 = -\ 64.80$$
$$R = 66080$$
$$(I,M) = -\ 8.29\ ,\quad (II,M) = +\ 298.51\ ,\quad (III,M) = -\ 50.06$$
$$S = 30561$$
$$P = 0.0000282$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 0.033 gegen Art. 22, und dasselbe 1 : 0.017 gegen Art. 81.

86.

Es soll noch das Gewicht der Seite (3)(5) berechnet werden. Die Grundgleichung ist hier

$$\log (3)(5) = \log (1)(2) + \log.\sin (1)_1 \sin (2)_2 \sin (2)_4 - \log.\sin (3)_3 \sin (1)_4 \sin (1)_5$$

und die Differentialgleichung

$$\Omega = +\ 9.38\delta(1)_1 + 240.66\delta(2)_2 - 17.67\delta(3)_3 + 57.85\delta(1)_4 - 6.44\delta(2)_4 - 64.80\delta(1)_5$$

also

$$(M,1)_1 = +\ 9.38\ ,\quad (M,1)_4 = +\ 57.85$$
$$(M,2)_2 = +240.66\ ,\quad (M,2)_4 = -\ 6.44$$
$$(M,3)_3 = -\ 17.67\ ,\quad (M,1)_5 = -\ 64.80$$
$$R = 65904$$
$$(I,M) = -\ 8.29\ ,\quad (II,M) = +\ 298.51\ ,\quad (III,M) = -\ 71.24$$
$$S = 31418$$
$$P = 0.0000290$$

Diese drei Seiten bekommen also im gegenwärtigen Falle sehr kleine Gewichte, wie sich voraussehen liess.

87.

Es kann von Interesse sein in Erfahrung zu bringen, wie die Gewichte der Seite (2)(5) und der anliegenden Winkel $(3)_2$ und $(2)_5$ im gegenwärtigen Falle beschaffen sind, wenn man die Voraussetzung immer noch festhält, dass diese beiden Winkel nicht beobachtet worden sind. Als Vorbereitung zu dieser Rechnung sind, wie weiter oben, zuerst die beiden Bedingungsgleichungen aufzustellen, die statt finden würden, wenn

die genannten Winkel beobachtet wären. Diese findet man leicht aus der Figur des Art. 83 wie folgt:

$$\frac{\sin[(3)_2-(2)_2]\sin[(1)_2+(2)_2]\sin(2)_2}{\sin(3)_2\sin(1)_2\sin[(1)_4+(2)_4]} = -1$$

$$(3)_2 + (1)_3 + (2)_3 + (2)_5 = 180^0$$

und die Auflösung der ersten in Bezug auf $(3)_2$ giebt

$$\mathrm{tg}\,(3)_2 = \frac{\sin[(1)_2+(2)_2]\sin(2)_4\sin(2)_2}{\sin(1)_2\sin[(1)_4+(2)_4]+\sin[(1)_2+(2)_2]\sin(2)_4\cos(2)_2}$$

Hieraus erhält man

$$(3)_2 = 45^0\,24',70\ ,\quad (2)_5 = 64^0\,35',30$$

Die Differentialgleichung der ersten Bedingungsgleichung wird nachdem sie mit der Zahl 10 dividirt worden ist,

$$0 = -2.4729\delta(2)_2 + 0.3975\delta(3)_2 - 0.7080\delta(1)_3 + 0.7663\delta(2)_3 - 0.1103\delta(1)_4 - 0.74540\delta(2)_4$$

und die der zweiten

$$0 = \delta(3)_2 + \delta(1)_3 + \delta(2)_3 + \delta(2)_5$$

Löst man die erste in Bezug auf $\delta(3)_2$ auf, so ergiebt sich für die Berechnung des Gewichts dieses Winkels

$$\Omega = \delta(3)_2 = +6.2211\delta(2)_2 + 1.7811\delta(1)_3 - 1.9279\delta(2)_3 + 0.2776\delta(1)_4 + 1.8968\delta(2)_4$$

und eliminirt man hiemit $\delta(3)_2$ aus der zweiten, so erhält man für $(2)_5$

$$\Omega = \delta(2)_5 = -6.2211\delta(2)_2 - 2.7811\delta(1)_3 + 0.9279\delta(2)_3 - 0.2776\delta(1)_4 - 1.8968\delta(2)_4$$

Die Figur giebt ferner

$$\log(2)(5) = \log(1)(2) + \log.\sin(1)_1\sin[(1)_3+(2)_3] - \log.\sin(3)_3\sin(2)_5$$

womit

$$\Omega = \delta\log(2)(5) = +9.374\delta(1)_1 + 7.663[\delta(1)_3+\delta(2)_3] - 17.667\delta(3)_3 - 10.003\delta(2)_5$$

oder nachdem $\delta(2)_5$ durch die vorstehende Gleichung eliminirt worden ist,

$$\Omega = \delta\log(2)(5) = +9.374\delta(1)_1 + 6.223\delta(2)_2 + 35.482\delta(1)_3 - 1.619\delta(2)_3 - 17.667\delta(3)_3 + 2.777\delta(1)_4 + 18.974\delta(2)_4$$

sich ergiebt.

88.

Gewicht des Winkels $(3)_2$. Der vor. Art. giebt

$$(M,2)_2 = +6.2211\ ,\quad (M,1)_4 = +0.2776$$
$$(M,1)_3 = +1.7811\ ,\quad (M,2)_4 = +1.8968$$
$$(M,2)_3 = -1.9279$$

und hiemit

$$R = 49.28$$
$$(I,M) = 0\ ,\quad (II,M) = +\ 4.5708\ ,\quad (III,M) = +\ 3.6779$$
$$S = 11.48$$
$$P = 0.0265$$

89.

Gewicht des Winkels $(2)_5$. Der vorvor. Art. giebt

$$(M,2)_2 = -\ 6.2211\ ,\quad (M,1)_4 = -\ 0.2776$$
$$(M,1)_3 = -\ 2.781\ ,\quad (M,2)_4 = -\ 1.8968$$
$$(M,2)_3 = +\ 0.9279$$

und hiemit

$$R = 50.98$$
$$(I,M) = 0\ ,\ (II,M) = -\ 5.5708\ ,\ (III,M) = -\ 4.6779$$
$$S = 17.64$$
$$P = 0.0300$$

Die Gewichte dieser beiden Winkel werden also sehr klein.

90.

Gewicht des log. der Seite (2)(5). Der Art. 87 giebt

$$(M,1)_1 = +\ 9.374\ ,\quad (M,3)_3 = -\ 17.667$$
$$(M,2)_2 = +\ 6.223\ ,\quad (M,1)_4 = +\ 2.777$$
$$(M,1)_3 = +\ 35.482\ ,\quad (M,2)_4 = +\ 18.974$$
$$(M,2)_3 = -\ 1.619$$

woraus

$$R = 2069$$
$$(I,M) = -\ 8.293\ ,\ (II,M) = +\ 7.379\ ,\ (III,M) = +\ 54.456$$
$$S = 1030$$
$$P = 0.000963$$

hervorgehen. Auch ein kleines Gewicht, es kann jedoch dazu bemerkt werden, dass es ein wenig grösser ist, wie das, welches im Art. 22 für die Seite (4)(5) der dort geltenden Figur erhalten wurde.

91.

Es soll jetzt angenommen werden, dass die beiden Winkel $(3)_2$ und $(2)_5$ beobachtet worden sind, und es sollen die Gewichte der obigen Dreiecksstücke unter dieser Voraussetzung berechnet werden. Die Diffe-

rentialgleichungen der nun hinzukommenden zwei neuen Bedingungsgleichungen sind schon im Art. 87 gegeben, stellen wir sie nebst den überdies statt findenden zusammen, so erhalten wir das folgende Täfelchen.

r	s	$q(r.I)$	$q(r.II)$	$q(r.III)$	$\log q(r.IV)$	$q(r.IV)$	$q(r.V)$
1	1	1	—	—	—	—	—
1	2	1	—	—	—	—	—
2		—	1	—	0.39321n	−2.4729	—
3		—	—	—	9.59934	+0.3975	1
1	3	—	—	1	9.85003n	−0.7080	1
2		—	1	—	9.88442	+0.7663	1
3		1	—	—	—	—	—
1	4	—	1	—	9.04275n	−0.1103	—
2		—	—	1	9.87737n	−0.7540	—
1	5	—	—	1	—	—	—
2		—	—	—	—	—	1

Die Werthe der Coefficienten der Endgleichungen ergeben sich hieraus wie folgt.

	I	*II*	*III*	*IV*	*V*
I	3.0	0	0	0	0
II		3.0	0	− 1.8169	+ 1.0
III			3.0	− 1.4620	+ 1.0
IV				7.9426	+ 0.4558
V					4.0

und hieraus ergeben sich die folgenden Werthe der Hülfsgrössen

$$(2)_1 = 0\ ,\quad (3)_1 = 0\ ,\quad (4)_1 = 0\ ,\quad (5)_1 = 0$$
$$(3)_2 = 0\ ,\quad (4)_2 = (9.78221)\ ,\quad (5)_2 = -(9.52288)$$
$$(4)_3 = (9.68783)\ ,\quad (5)_3 = -(9.52288)$$
$$(5)_4 = -(9.40253)$$
$$(I,I) = 3.0\ ;\quad (II,II,1) = 3.0\ ,\quad (III,III,2) = 3.0$$
$$(IV,IV,3) = 6.1297\ ,\quad (V,V,4) = 2.9420$$

92.

Gewicht des Winkels $(3)_2$. Wenn wir direct verfahren, so bekommen wir hier

$$(M,3)_2 = 1\ ,\quad R = 1$$
$$(IV,M) = (IV,M,3) = +0.3975\ ,\quad (V,M) = 1\ ,\quad (V,M,4) = +0.8996$$
$$S = 0.3009$$
$$P = 1.430$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 54.0 gegen Art. 88.

93.

Gewicht des Winkels $(2)_5$. Eben so wie vorher wird hier

$$(M,2)_5 = 1\ , \quad R = 1$$
$$(V,M) = (V,M,4) = 1$$
$$S = 0.3399$$
$$P = 1.515$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 50,5 gegen Art. 89.

94.

Gewicht der Seite (2)(5). Da hier der erste Ausdruck von $\Omega = \delta . \log(2)(5) =$ etc. des Art. 87 Geltung hat, so bekommen wir zuerst

$$(M,1)_1 = +\ 9.374\ , \quad (M,3)_3 = -\ 17.667$$
$$(M,1)_3 = +\ 7.663\ , \quad (M,2)_5 = -\ 10.003$$
$$(M,2)_3 = +\ 7.663$$

und hiemit

$$R = 417.51$$
$$(I,M) = -\ 8.293\ , \quad (II,M) = +\ 7.663\ , \quad (III,M) = +\ 7.663$$
$$(IV,M) = -\ 0.4471\ , \quad (V,M) = +\ 5.323$$
$$(II,M,1) = (III,M,2) = (II,M)$$
$$(IV,M,3) = +\ 7.928\ , \quad (V,M,4) = -\ 1.790$$
$$S = 73.43$$
$$P = 0.092906$$

Vergrösserungsverhältniss 1 : 3.018 gegen Art. 90.

95.

Gewicht des log. der Seite (3)(5). Die Grundgleichung kann jetzt wie folgt gestellt werden,

$$\log(3)(5) = \log(1)(2) + \log.\sin(1)_1 \sin(3)_2 - \log.\sin(3)_3 \sin(2)_5$$

und diese giebt

$$\Omega = +\ 9.374\delta(1)_1 + 20.754\delta(3)_2 - 17.667\delta(3)_3 - 10.003\delta(2)_5$$

mithin

$$(M,1)_1 = +\ 9.374\ , \quad (M,3)_3 = -\ 17.667$$
$$(M,3)_2 = +\ 20.754\ , \quad (M,2)_5 = -\ 10.003$$
$$R = 930.80$$
$$(I,M) = -\ 8.293\ , \quad (II,M) = 0\ , \quad (III,M) = 0$$
$$(IV,M) = +\ 8.250\ , \quad (V,M) = +\ 10.751$$
$$(II,M,1) = (III,M,2) = 0\ , \quad (IV,M,3) = +\ 8.250\ , \quad (V,M,4) = +\ 8.666$$

$$S = 59.57$$
$$P = 0.001148$$

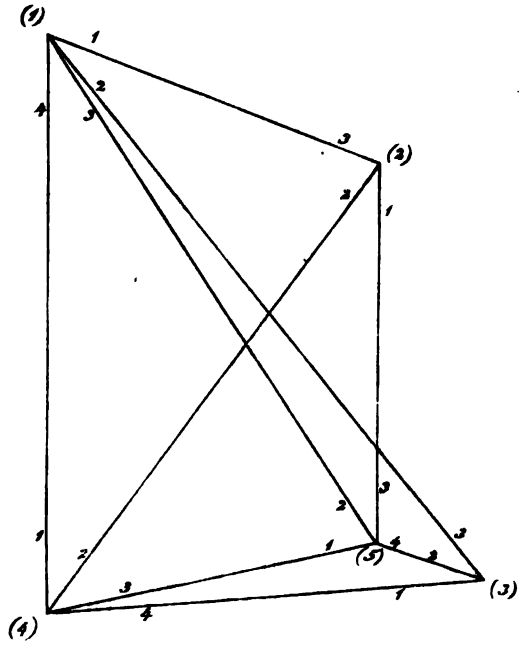
Vergrösserungsverhältniss 1 : 39.58 gegen Art. 86.

96.

In Bezug auf die in den Artt. 92 und 93 erhaltenen Gewichte der Winkel $(3)_2$ und $(2)_5$, von welchen das eine kleiner, und das andere nur wenig grösser ist wie 1,5, ist zu bemerken, dass die Gewichte der Winkel dieses Dreiecks, wenn man den Punkt (4) weglässt, nur 1,333 werden. Die Ursache davon ist die Annahme, dass der Winkel (2)(3)(5) aus den zwei für sich gemessenen Winkeln $(1)_3$ und $(2)_3$ zusammen gesetzt worden ist.

97.

Ein merkwürdiges Beispiel, wie durch Einschaltung eines Dreiecks-punkts das Gewicht einer Seite unter Umständen vergrössert werden kann, giebt Gauss in seinem «Supplementum theoriae combinationis etc.» Dieses soll schliesslich hier noch, aber mit einer Aenderung der Winkelgleichungen, die für unsern Zweck dienlich ist, angeführt werden. Die dazu gehörige Figur ist die folgende,



in welcher

(1) die Station Wilsede
(2) - - Wulfsode
(3) - - Breithorn
(4) - - Falkenberg
(5) - - Hauselberg

sind. Zur leichteren Vergleichung führe ich noch die Bezeichnung der Richtungen sowohl nach Gauss wie nach mir an. Diese sind

$$(0) = (1)_4\,, \quad (4) = (1)_3\,, \quad (7) = (1)_5$$
$$(1) = (2)_4\,, \quad (5) = (2)_3\,, \quad (8) = (2)_5$$
$$(2) = (3)_4\,, \quad (6) = (3)_3\,, \quad (9) = (3)_5$$
$$(3) = (4)_4\,, \qquad\qquad (10) = (4)_5$$
$$(11) = (1)_2\,, \quad (14) = (4)_1$$
$$(12) = (2)_2\,, \quad (15) = (1)_1$$
$$(13) = (3)_2\,, \quad (16) = (2)_1$$
$$(17) = (3)_1$$

in welcher Zusammenstellung linker Hand des Gleichheitszeichens die Gaussische, und rechter Hand meine Bezeichnung enthalten ist.

98.

Die Bedingungsgleichungen, die ich anwenden werde, sind die folgenden,

$$(4)_1 - (1)_1 + (3)_2 - (2)_2 + (2)_4 - (1)_4 = 180^0 + \varepsilon$$
$$(4)_1 - (2)_1 + (3)_3 - (1)_3 + (4)_4 - (1)_4 = 180^0 + \varepsilon'$$
$$(4)_1 - (3)_1 + (3)_4 - (1)_4 + (2)_5 - (1)_5 = 180^0 + \varepsilon''$$
$$(3)_1 - (1)_1 + (3)_2 - (1)_2 + (3)_5 - (2)_5 = 180^0 + \varepsilon'''$$
$$(2)_3 - (1)_3 + (4)_4 - (3)_4 + (4)_5 - (1)_5 = 180^0 + \varepsilon''''$$
$$\frac{\sin[(4)_4-(3)_4]\sin[(3)_2-(2)_2]\sin[(4)_5-(3)_5]}{\sin[(3)_4-(2)_4]\sin[(2)_2-(1)_2]\sin[(3)_5-(1)_5]} = 1$$
$$\frac{\sin[(4)_4-(3)_4]\sin[(3)_2-(1)_2]\sin[(3)_5-(2)_5]}{\sin[(3)_4-(1)_4]\sin[(2)_2-(1)_2]\sin](3)_5-(1)_5]} = 1$$

Die Vergleichung zeigt, dass diese beiden Seitengleichungen mit denen von Gauss aufgestellten ohne Weiteres identisch sind, aber dass dieses bei den Winkelgleichungen nicht der Fall ist; im Grunde findet dieses dennoch statt, da jene sich aus diesen durch Eliminationen herstellen lassen*).

*) Es sind $(4)_4 - (3)_4 = 8^0\,1'$ und $(3)_1 - (2)_1 = 4^0\,22'$. Man sieht hieraus, dass Gauss sich nicht gescheut hat, Bedingungsgleichungen mit sehr kleinen Winkeln anzuwenden, wie von ihm auch zu erwarten war.

Die Tafel für die Coefficienten der Bedingungsgleichungen steht nun wie folgt,

r	s	$q(r.I)$	$q(r.II)$	$q(r.III)$	$q(r.IV)$	$q(r.V)$	$\log q(r.VI)$	$\log q(r.VII)$
1	1	−1	—	—	−1	—	—	9.76433
2		—	−1	—	—	—	0.13893	—
3		—	—	−1	+1	—	0.18653*n*	0.08607*n*
4		+1	+1	+1	—	—	9.20276	9.80482
1	2	—	—	—	−1	—	—	9.85866
2		−1	—	—	—	—	—	9.75724*n*
3		+1	—	—	+1	—	—	9.17725*n*
1	3	—	−1	—	—	−1	9.29137	—
2		—	—	—	—	+1	9.60010*n*	—
3		—	+1	—	—	—	9.30685	—
1	4	−1	−1	−1	—	—	8.33445	8.93551
2		+1	—	—	—	—	—	9.68413*n*
3		—	—	+1	—	−1	9.88615*n*	9.59879
4		—	+1	—	—	+1	9.87384	—
1	5	—	—	−1	—	+1	—	—
2		—	—	+1	−1	—	—	—
3		—	—	—	+1	—	—	—
4		—	—	—	—	−1	—	—

welche voraussetzt, dass die erste Seitengleichung mit 200, und ie zweite mit 50 dividirt worden ist.

Die Coefficienten der Endgleichungen giebt hierauf das folgende Täfelchen.

	I	*II*	*III*	*IV*	*V*	*VI*	*VII*
I	6	+2	+2	+2	0	+0.1379	−0.0912
II		6	+2	0	+2	−0.4841	+0.5518
III			6	−2	−2	+0.9050	+2.1680
IV				6	0	−1.5365	−2.6730
V					6	+0.9235	−0.3970
VI						5.6722	+1.6716
VII							3.5004

*) Durch die Auflösung der Endgleichungen ergeben sich die folgenden Werthe der Hülfsgrössen die mit zur Berechnung der Gewichte dienen,

---

*) Man findet hieraus, wenn man mit $(200)^2$ multiplicirt,

$$(VI.VI) = 226888$$

während Gauss 224868 angiebt. Es scheint hier der Fehler bei Gauss zu liegen; er hat übrigens nur unbedeutende Wirkung.

$(2)_1 = -(9.52288)$,
$(3)_1 = -(9.52288)$, $(3)_2 = -(9.39794$
$(4)_1 = -(9.52288)$, $(4)_2 = -(9.09691)$, $(4)_3 = +(9.69897)$
$(5)_1 = 0$, $(5)_2 = -(9.57403)$, $(5)_3 = +(9.69897)$
$(6)_1 = -(8.36144)$, $(6)_2 = +(8.99736)$, $(6)_3 = -(9.29732)$
$(7)_1 = +(8.18185)$, $(7)_2 = -(9.03807)$, $(7)_3 = -(9,61338)$

$(5)_4 = +(9.39794)$
$(6)_4 = +(9.45981)$, $(6)_5 = -(9.54942)$
$(7)_4 = +(9.58643)$, $(7)_5 = -(7.82737)$, $(7)_6 = -(9.27562)$
$(I,I) = 6.0$, $(II,II,1) = 5.3333$, $(III,III,2) = 5,0$, $(IV,IV,3) = 4.0$
$(V,V,4) = 3.75$, $(VI,VI,5) = 4.6158$, $(VII,VII,6) = 1.9968$

99.

Ich werde jetzt nur das Gewicht der Seite (3)(4) in Beziehung auf (1)(2), das ist das der Seite Breithorn-Falkenberg in Beziehung auf Wilsede-Wulfsode, dasselbe welches Gauss hat, berechnen. Die Grundformel ist

$$\log(3)(4) = \log(1)(2) + \log.\sin[(4)_1-(2)_1]\sin[(3)_2-(2)_2] - \log.\sin[(3)_3-(1)_3]\sin[(2)_4-(1)_4]$$

zu welcher bemerkt werden kann, dass die Station (5) darin gar nicht vorkommt. Es wird nun

$$\Omega = -27.146\delta(2)_1 + 27.146\delta(4)_1 - 6.326\delta(2)_2 + 6.326\delta(3)_2 + 14.337\delta(1)_3 - 14.337\delta(3)_3 + 27.568\delta(1)_4 - 27.568\delta(2)_4$$

und folglich werden hier

$(M,2)_1 = -27.146$, $(M,3)_2 = +6.326$, $(M,1)_4 = +27.568$
$(M,4)_1 = +27.146$, $(M,1)_3 = +14.337$, $(M,2)_4 = -27.568$
$(M,2)_2 = -6.326$, $(M,3)_3 = -14.337$

und hieraus folgt vor Allem

$$R = 3485.0$$

Die weitere Rechnung giebt

$(I,M) = -15.338$, $(V,M) = -14.337$
$(II,M) = -1.950$, $(VI,M) = -32.555$
$(III,M) = -0.422$, $(VII,M) = +35.683$
$(IV,M) = +6.326$

$$(II,M,1) = +\ 3.163\,,\quad (V,M,4) = -\ 10.127$$
$$(III,M,2) = +\ 3.900\,,\quad (VI,M,5) = -\ 25.097$$
$$(IV,M,3) = +\ 13.784\,,\quad (VII,M,6) = +\ 43.625$$

und mit Angabe der einzelnen Glieder der Reihe nach

$$\begin{array}{r} 39.2 \\ 1.9 \\ 3.0 \\ 47.5 \\ 27.3 \\ 136.5 \\ 1038.8 \\ \hline S = 1294.2 \end{array}$$

und hieraus folgt

$$P = 0.0004564$$

Denkt man sich nun die Station (5) weg, so fallen die fünf letzten Bedingungsgleichungen weg, und nur die ersten beiden bleiben bestehen. In dem Ausdruck von S fallen zugleich die fünf letzten Glieder weg, und es wird daher jetzt

$$S = 41.1$$

während R unverändert bleibt. Das Gewicht welches nun sich herausstellt ist

$$P = 0.0002903$$

und die Zuziehung der Station (5) zu Bestimmung der Seite (3)(4) hat also das Gewicht derselben im Verhältniss von

$$1 : 1.572$$

vergrössert, welches mit dem Gaussischen Resultat, welches 1 : 1571 ist, befriedigend übereinstimmt. Um das Gewicht der Seite selbst zu erhalten führe ich nach Gauss an, dass die Länge derselben 26767 Meter beträgt, und hiemit geben die beiden obigen Angaben des Gewichts des log. der Seite das Gewicht der Seite selbst, in den beiden Annahmen

$$P = 12.02,\ \text{und} = 7.643$$

auch mit Gauss befriedigend übereinstimmend.

Suppl. 2. Von der Bestimmung des mittleren Fehlers der nackten Beobachtungen.

1.

Im Art. 138 der Abhandlung habe ich ausgeführt, wie man durch Winkel, die zu diesem Zweck eigends gemessen worden sind, die Gewichte bestimmen kann, die den verschiedenen Beobachtungen beizulegen sind, wenn man in den Fall kommt bei einer Triangulation verschiedene Gattungen von Beobachtungen von einander unterscheiden zu müssen. Zugleich habe ich dort angedeutet, dass man sich zu demselben Zwecke der bei der Triangulation beobachteten Richtungen bedienen kann; diese Bestimmung soll hier ausführlich behandelt werden.

2.

Die in der Abhandlung eingeführten, mit p, p', etc. $p_{,}$, $p_{,}'$, etc. etc. bezeichneten Gewichte der Beobachtungen l, l', etc. $l_{,}$, $l_{,}'$, etc. etc. sind den Quadraten der mittleren Fehler, womit diese Beobachtungen an sich, und abgesehen von ihrer Verwendung zu irgend einem Zwecke, als behaftet angesehen werden müssen, umgekehrt proportional. Diese mittleren Fehler und die Verhältnisse der ihnen zugehörigen Gewichte haben daher bestimmte Werthe, dermaassen dass jeder vorhandenen Gattung von Beobachtungen, unabhängig von der Verwendung derselben zu irgend einem Zwecke ein bestimmter Werth dieses mittleren Fehlers zukommt.

Da die entsprechenden Gewichte, oder Gewichtsverhältnisse auf welche es hier eigentlich ankommt, mit diesen mittleren Fehlern in so enger und einfacher Beziehung stehen, so besteht unsere gegenwärtige Aufgabe ihrem wesentlichen Inhalt nach darin, die genannten mittleren Fehler aus den Beobachtungen zu ermitteln. Ich will diese mittleren Fehler, um sie von denen zu unterscheiden, die nach der Anwendung der Beobachtungen auf irgend eine Aufgabe erhalten werden, die mittleren Fehler der nackten Beobachtungen nennen.

Jede Verwendung der Beobachtungen zu irgend einem Zwecke, oder mit anderen Worten, jede Anwendung der Beobachtungen zur Lösung einer Aufgabe führt zwar auch auf die Bestimmung des mittleren

Fehlers der dazu verwandten Beobachtungen, aber dieser mittlere Fehler, den man erst am Schlusse aller zur Lösung der Aufgabe erforderlichen Rechnungen erhält, ist von dem mittleren Fehler der nackten Beobachtungen verschieden, der dem Obigen zu Folge zur Berechnung des betreffenden Gewichts p dient. Der jetzt genannte mittlere Fehler besteht aus einer Combination des mittleren Fehlers der nackten Beobachtungen mit der Wirkung der theoretischen Bedingungen, die die Aufgabe, auf welche die Beobachtungen angewandt werden, mit sich führt; er involvirt gemeiniglich auch neue Fehlerquellen, die bei der Betrachtung der Beobachtungen an sich nicht mit einwirken.

Beobachtungen, die an sich gleiche Güte besitzen, oder welchen dasselbe Gewicht p zukommt, können wenn sie auf verschiedene specielle Fälle Einer Aufgabe, oder auf verschiedene Aufgaben angewandt werden, nach der Anwendung eine mehr oder minder grosse Verschiedenheit in den aus der Aufgabe hervorgehenden oder berechneten mittleren Fehlern zeigen, und dieses tritt namentlich ein, wenn in der Aufgabe mehrere Unbekannten vorkommen, die von einander abhängig sind, und durch Beobachtungen, die von einander unabhängig sind bestimmt werden müssen. Die Bedeutung dieser, durch die Auflösung einer Aufgabe erhaltenen mittleren Fehler kann nie auf die Beobachtungen an sich, oder auf die mittleren Fehler der nackten Beobachtungen, bezogen werden, sondern er bildet blos die Grundlage zur Bestimmung der mittleren Fehler der Resultate, die man durch Anwendung der Beobachtungen auf die betreffende Aufgabe erhalten hat.

3.

Es ist daher, um zu einem bestimmten Falle überzugehen, schon aus den eben erklärten Gründen unrichtig bei der Ausgleichung eines Dreiecksnetzes die durch die Ausgleichungen auf den Stationen erlangten Summen der Fehlerquadrate, die in der Abhandlung allgemein mit (ll,n) bezeichnet worden sind, zur Bestimmung des mittleren Fehlers oder des Gewichts p der nackten Beobachtungen zu verwenden, denn diese (ll,n) bestehen schon aus einer Combination des mittleren Fehlers der nackten Beobachtungen mit den Bedingungen zwischen den verschiedenen Unbekannten, die die Aufgabe der Ausgleichung auf der Station, aus welcher eben (ll,n) hervorgeht, eingeführt hat; Bedingungen, die in der Regel auf jeder Station verschieden sind.

4.

Aber im eben betrachteten Falle lässt sich für die Unhaltbarkeit der Bestimmung des mittleren Fehlers der nackten Beobachtungen aus den (ll,n) noch ein anderer Grund anführen. Es ist leicht nachzuweisen, dass die (ll,n) keines Weges unveränderliche, feststehende Grössen sind, sondern dass im Belieben des Rechners steht ihnen manigfache Werthe zuzutheilen. Man hat in § 3 der Abhandlung gesehen, dass es in der Auflösung der allgemeinen Aufgabe, von welcher die Ausgleichung eines Dreiecksnetzes ein specieller Fall ist, unter Umständen nothwendig werden kann, bei der Bildung des Systems von Gleichungen, deren Auflösung den ersten Theil der Auflösung der Aufgabe überhaupt ausmacht, Eine oder mehrere der Bedingungsgleichungen mit zu verwenden, und dass man in jedem Falle, auch wenn es nicht nothwendig wird, zu einer solchen Verwendung der Bedingungsgleichungen berechtigt ist, durch welche die Endresultate der Auflösung nicht im Mindesten geändert werden. Es ist dieses a. a. O. nicht nur theoretisch bewiesen, sondern auch durch das Beispiel des Art. 56, u. f. dargethan worden. In der geodätischen Anwendung der allgemeinen Aufgabe, oder in der Ausgleichung eines Dreiecksnetzes darf man daher auch zu den Ausgleichungen auf den Stationen nach Belieben Eine oder mehrere der vorhandenen Bedingungsgleichungen hinzuziehen, obgleich dieses hier nicht nothwendig wird.

5.

Die Bedingungsgleichungen, auf welche diese Aufgabe führt, enthalten immer Richtungen von wenigstens drei Stationen, und durch die Zuziehung von Einer oder mehreren derselben zu den Ausgleichungen auf den betreffenden Stationen, kann man die Ausgleichung von drei oder mehreren Stationen mit einander verbinden, und zu Einem gemeinschaftlichen Resultat vereinigen. Es ist leicht einzusehen, dass hierauf Werthe hervorgehen müssen, die von denen wesentlich verschieden sind, die durch die Einzelnbehandlung dieser Stationen erhalten worden wären, die aber demungeachtet mit diesen gleiche Berechtigung haben. Nicht nur die auf diesen Stationen ausgeglichenen Richtungen, sondern auch, worauf es hier besonders ankommt, der Werth von (ll,n) wird ein anderer, und es wird folglich die Verwendung dieses Werthes zur

Bestimmung des mittleren Fehlers der nackten Beobachtungen ein anderes Resultat geben, wie in dem Falle, wo keine Bedingungsgleichung zur Ausgleichung auf den Stationen verwandt worden ist.

6.

Durch die erklärte Zuziehung von Bedingungsgleichungen werden nicht nur die Resultate des ersten Theils der Auflösung der Aufgabe, sondern zugleich auch die des zweiten Theils derselben geändert, und zwar letztere so, dass schliesslich dieselben Endresultate zum Vorschein kommen, die man ohne die genannte Zuziehung erhalten haben würde. Es werden also namentlich nicht blos die Werthe der (ll,n), sondern es wird auch der Werth von R_q anders werden, aber diese Aenderungen werden stets so beschaffen sein, dass der aus der ganzen Rechnung hervorgehende Werth der Summe der mit ihren Gewichten multiplicirten Fehlerquadrate, nemlich

$$W = \Sigma(ll,n) + R_q$$

in jedem speciellen Falle unverändert derselbe bleibt. Unter den verschiedenen in dieser Aufgabe vorkommenden Summen von Fehlerquadraten ist daher in jedem vorliegenden Falle (d. h. in jedem zu behandelnden Dreiecksnetze) nur W diejenige, die einen bestimmten Werth hat, während alle (ll,n) nebst R_q, je nach der Behandlung der Aufgabe, sehr verschiedene Werthe annehmen können.

Da nun die mittleren Fehler der nackten Beobachtungen, der oben gegebenen Erklärung derselben zu Folge, auch feste und unveränderliche Werthe besitzen, so können um so weniger die erhaltenen Werthe der (ll,n) zu deren Bestimmung angewandt werden.

7.

Wenn man etwa hiezu bemerken wollte, dass die ohne Zuziehung von Bedingungsgleichungen erhaltenen Werthe von (ll,n) einen Vorzug vor denen voraus hätten, die sich nach dieser Zuziehung ergeben, und daher vorzugsweise zur Bestimmung der mittleren Fehler der nackten Beobachtungen zu verwenden wären, so lassen sich diesem die folgenden Betrachtungen entgegenstellen. Die durch die im Vorhergehenden erklärten, combinirten Ausgleichungen auf den Stationen erhaltenen Werthe der (ll,n) haben in der in Rede stehenden Aufgabe dieselbe theoretische sowohl, wie praktische, Berechtigung wie jene aus den

Einzelnausgleichungen auf den Stationen hervorgehenden Werthe derselben Grössen. Wenn daher die Einen Werthe Berechtigung zur Bestimmung der genannten mittleren Fehler haben, so haben die Andern dieselbe Berechtigung auch. Da aber diese Werthe von einander verschieden sind, so werden auch verschiedene Werthe der mittleren Fehler daraus hervorgehen, welches unannehmbar ist, da es in der Natur der Sache liegt, dass diesen feste und unveränderliche Werthe zukommen müssen.

8.

Um nun aus den bei einer hinreichend ausgedehnten Triangulation beobachteten Richtungen die Quadrate der mittleren Fehler zu erhalten, bietet sich zunächst das folgende Verfahren dar. Man ordne auf jeder Station die vorhandenen Gyri auf dieselbe Weise, wie zur Ausgleichung des Dreiecksnetzes erforderlich ist, nemlich man stelle sie in solche Gruppen zusammen, dass die in jeder dieser vorkommenden Richtungen ohne Lücken vorhanden sind. Aus jeder Gruppe bilde man so viele unabhängige Winkel wie möglich, aus welchen hierauf, so wie im Art. 138 erklärt worden ist, das Quadrat des mittleren Fehlers zu berechnen ist.

Dieses Verfahren ist jedoch nicht das Vortheilhafteste. Denn bezeichnet man die in irgend einer Gruppe von Gyris enthaltenen Richtungen mit (1), (2), (3), etc., so kann man höchstens nur die halbe Anzahl von unabhängigen Winkeln erhalten, da keine Richtung zu zwei oder mehr Winkeln verwandt werden darf. Man kann die Winkel

$$(2) - (1),\ (4) - (3),\ (6) - (5),\ \text{etc.}$$

$$\text{oder } (3) - (1),\ (4) - (2),\ (7) - (5),\ \text{etc.}$$

u. s. w. bilden, und erkennt leicht, dass in den Fällen, in welchen die Zahl der vorhandenen Richtungen ungrade ist, eine derselben zum vorliegenden Zweck unbenutzt übrig bleibt. Es ist aber ein anderes Verfahren möglich, durch welches alle vorhandenen Richtungen vortheilhafter benutzt werden. Dieses soll im Folgenden erklärt werden.

9.

Das Verfahren des vor. Art. setzt stillschweigend voraus, dass man allen auf der Station beobachteten Richtungen dasselbe Gewicht beilegt, und da dieses durchgängig zulässig ist, und man selten oder nie sich in den Stand gesetzt sieht, etwaige reelle Unterschiede der Güte solcher

Beobachtungen gnügend unterscheiden und bestimmen zu können, so soll diese Annahme hier ausdrücklich beibehalten werden. In Folge dessen, wird man nun vor Allem aus den Beobachtungen einer jeden Richtung in jedem der vorhandenen Gyri das arithmetische Mittel nehmen, und dieses von allen betr. Beobachtungen abziehen müssen. Mit diesen Unterschieden ist dann weiter zu verfahren. Einen wesentlichen Umstand bildet hiebei die Eigenschaft, dass der gemeinschaftliche Anfangspunkt aller Beobachtungen eines jeden Gyrus eine unbestimmte Grösse ist, und man dem zu Folge vor der Vornahme der oben beschriebenen Rechnung die einzelnen Gyri in Bezug auf ihren Anfangspunkt nur nach Gutdünken hat aufstellen können. Jeder der eben erklärten Unterschiede besteht daher aus der Summe von zwei Fehlern, nemlich aus dem eigentlichen Beobachtungsfehler und dem Fehler, den man bei der willkührlichen Annahme des gemeinschaftlichen Anfangspunkts des betr. Gyrus begangen hat. Seien für den ersten Gyrus, und für die verschiedenen Richtungen der erst genannte Fehler ξ, ξ', ξ'', etc. der andere v, für den zweiten Gyrus dieselben $\xi_,$, $\xi'_,$, $\xi''_,$, etc. nebst $v_,$, u. s. w. dann haben die oben beschriebenen Unterschiede die Form

$$\begin{aligned}
&\xi + v\ ,\ \xi' + v\ ,\ \xi'' + v\ ,\ \text{etc.}\\
&\xi_, + v_,\ ,\ \xi'_, + v_,\ ,\ \xi''_, + v_,\ ,\ \text{etc.}\\
&\xi_{,,} + v_{,,}\ ,\ \xi'_{,,} + v_{,,}\ ,\ \xi''_{,,} + v_{,,}\ ,\ \text{etc.}
\end{aligned}$$

u. s. w. Sei nun n die Anzahl der Richtungen, die in jedem Gyrus der betreffenden Gruppe enthalten sind, und

$$\mu = \frac{\xi + \xi' + \xi'' + \ldots}{n}$$

$$\mu_, = \frac{\xi_, + \xi'_, + \xi''_, + \ldots}{n}$$

etc.

dann sind die arithmetischen Mittel aus den vorstehenden Unterschieden jeder Zeile

$$\begin{aligned}
&\mu + v\\
&\mu_, + v_,\\
&\mu_{,,} + v_{,,}\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

und zieht man diese von jenen ab, so erhält man

$$\begin{aligned}
&\xi - \mu\ ,\ \xi' - \mu\ ,\ \xi'' - \mu\ ,\ \text{etc.}\\
&\xi_, - \mu_,\ ,\ \xi'_, - \mu_,\ ,\ \xi''_, - \mu_,\ ,\ \text{etc.}\\
&\xi_{,,} - \mu_{,,}\ ,\ \xi'_{,,} - \mu_{,,}\ ,\ \xi''_{,,} - \mu_{,,}\ ,\ \text{etc.}\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

für die eigentlichen Fehler der Beobachtungen, da hieraus die Unbestimmtheit, die der gemeinschaftliche willkührliche Anfangspunkt eines jeden Gyrus darbietet, vollständig entfernt ist. Um dieses deutlicher zu machen will ich annehmen, dass man allen Beobachtungen irgend eines der Gyri, vor der Berechnung des arithmetischen Mittels aus den Beobachtungen, z. B. des ersten Gyrus die willkührliche Anzahl von x Secunden hinzugefügt habe. Man wird hierauf statt der oben angegebenen ersten Unterschiede die folgenden erhalten haben,

$$\xi + v + \frac{m-1}{m}x,\ \xi' + v + \frac{m-1}{m}x,\ \xi'' + v + \frac{m-1}{m}x,\ \text{etc.}$$

$$\xi_{,} + v_{,} - \frac{x}{m},\ \xi'_{,} + v_{,} - \frac{x}{m},\ \xi''_{,} + v_{,} - \frac{x}{m},\ \text{etc.}$$

$$\xi_{,,} + v_{,,} - \frac{x}{m},\ \xi'_{,,} + v_{,,} - \frac{x}{m},\ \xi''_{,,} + v_{,,} - \frac{x}{m},\ \text{etc.}$$

etc.

und die arithmetischen Mittel aus den Grössen jeder Zeile werden jetzt

$$\mu + v + \frac{m-1}{m}x$$

$$\mu_{,} + v_{,} - \frac{x}{m}$$

$$\mu_{,,} + v_{,,} - \frac{x}{m}$$

etc.

Zieht man diese von jenen ab, so erhält man dieselben Unterschiede wie oben. W. z. b. w.

10.

Das Verfahren des vor. Art. giebt für die Anwendung die Berechnung nach folgenden Formeln. Seien l, l', l'', etc. die Beobachtungen des ersten Gyrus, $l_{,}$, $l'_{,}$, $l''_{,}$, etc. die des zweiten Gyrus, $l_{,,}$, $l'_{,,}$, $l''_{,,}$, etc. die des dritten Gyrus u. s. w. Alle diese Beobachtungen können in Bezug auf den gemeinschaftlichen Anfangspunkt jedes Gyrus ganz willkührlich aufgestellt werden, zweckmässig ist jedoch sie durch Anbringung einer constanten Zahl für jeden Gyrus so zu stellen, dass sie für jede Richtung nur kleine Unterschiede zeigen. Nennt man ferner m die Anzahl der Gyri die in der Gruppe enthalten sind, so rechne man erst

$$p = \frac{l + l_{,} + l_{,,} + \ldots}{m}$$

$$p' = \frac{l' + l'_{,} + l'_{,,} + \ldots}{m}$$

$$p'' = \frac{l'' + l''_{,} + l''_{,,} + \ldots}{m}$$

etc.

und hiemit

$$\begin{aligned} &l - p \ , \ l_{,} - p \ , \ l_{,,} - p \ , \text{ etc.} \\ &l' - p' \ , \ l'_{,} - p' \ , \ l'_{,,} - p' \ , \text{ etc.} \\ &l'' - p'' \ , \ l''_{,} - p'' \ , \ l''_{,,} - p'' \ , \text{ etc.} \end{aligned}$$

etc.

die man am Zweckmässigsten in der vorstehenden Aufeinanderfolge niederschreibt. Es sind hierauf die folgenden Mittel zu rechnen,

$$q = \frac{(l-p) + (l'-p') + (l''-p'') + \ldots}{n}$$

$$q_{,} = \frac{(l_{,}-p) + (l'_{,}-p') + (l''_{,}-p'') + \ldots}{n}$$

$$q_{,,} = \frac{(l_{,,}-p) + (l'_{,,}-p') + (l''_{,,}-p'') + \ldots}{n}$$

etc.

wenn wieder n die Anzahl der Richtungen bedeutet. Die von der Wirkung der allgemeinen Anfangspunkte befreiten, eigentlichen Beobachtungsfehler werden hierauf

$$\begin{aligned} &l - p - q \ , \ l' - p' - q \ , \ l'' - p'' - q \ , \text{ etc.} \\ &l_{,} - p - q_{,} \ , \ l'_{,} - p' - q_{,} \ , \ l''_{,} - p'' - q_{,} \ , \text{ etc.} \\ &l_{,,} - p - q_{,,} \ , \ l'_{,,} - p' - q_{,,} \ , \ l''_{,,} - p'' - q_{,,} \ , \text{ etc.} \end{aligned}$$

etc.

Ich bemerke hiezu noch, dass man die Aufeinanderfolge der Mittel umwechseln und setzen kann,

$$q = \frac{l + l' + l'' + \ldots}{n}$$

$$q_{,} = \frac{l_{,} + l'_{,} + l''_{,} + \ldots}{n}$$

$$q_{,,} = \frac{l_{,,} + l'_{,,} + l''_{,,} + \ldots}{n}$$

etc.

$$p = \frac{(l-q) + (l_{,}-q_{,}) + (l_{,,}-q_{,,}) + \ldots}{m}$$

$$p' = \frac{(l'-q) + (l'_{,}-q_{,}) + (l'_{,,}-q_{,,}) + \ldots}{m}$$

$$p'' = \frac{(l''-q) + (l''_{,}-q_{,}) + (l''_{,,}-q_{,,}) + \ldots}{m}$$

etc.

Dieses Verfahren führt auf dieselben Werthe der $(l-p-q)$, $(l'-p'-q)$, etc. etc. Beide Verfahrungsarten stehen mit dem im Art. 68 der Abhandlung bewiesenen Satze in engster Verbindung.

11.

Sei

$$\begin{aligned} M = &(l-p-q)^2 + (l'-p'-q)^2 + (l''-p''-q)^2 + \ldots \\ &+ (l_{,}-p-q_{,})^2 + (l_{,}'-p'-q_{,})^2 + (l_{,}''-p''-q_{,})^2 + \ldots \\ &+ (l_{,,}-p-q_{,,})^2 + (l_{,,}'-p'-q_{,,})^2 + (l_{,,}''-p''-q_{,,})^2 + \ldots \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

so kann M dem vor. Art. zufolge auf zwei verschiedene Arten berechnet werden. Aber diese Function zweiter Ordnung kann nach bekannten Sätzen auf verschiedene andere Formen gebracht werden. Ich werde hier drei solcher Formen angeben. Löst man die Quadrate dergestalt auf, dass die q von den $l-p$ getrennt werden, und setzt zur Abkürzung

$$\begin{aligned} L &= l - p\,, \quad L' = l' - p'\,, \quad L'' = l'' - p''\,, \text{ etc.} \\ L_{,} &= l_{,} - p\,, \quad L_{,}' = l_{,}' - p'\,, \quad L_{,}'' = l_{,}'' - p''\,, \text{ etc.} \\ L_{,,} &= l_{,,} - p\,, \quad L_{,,}' = l_{,,}' - p'\,, \quad L_{,,}'' = l_{,,}'' - p''\,, \text{ etc.} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

so ergiebt sich zuerst

$$\begin{aligned} M = &L^2 + L'^2 + L''^2 + \ldots - 2q(L + L' + L'' + \ldots) \\ &+ L_{,}^2 + L_{,}'^2 + L_{,}''^2 + \ldots - 2q_{,}(L_{,} + L_{,}' + L_{,}'' + \ldots) \\ &+ L_{,,}^2 + L_{,,}'^2 + L_{,,}''^2 + \ldots - 2q_{,,}(L_{,,} + L_{,,}' + L_{,,}'' + \ldots) \\ &+ \text{etc.} \qquad\qquad - \text{etc.} \\ &+ n(q^2 + q_{,}^2 + q_{,,}^2 + \ldots) \end{aligned}$$

und hieraus vermittelst der ersten Ausdrücke der q des vor. Art.

$$M = \left\{\begin{array}{l} L^2 + L'^2 + L''^2 + \ldots \\ + L_{,}^2 + L_{,}'^2 + L_{,}''^2 + \ldots \\ + L_{,,}^2 + L_{,,}'^2 + L_{,,}''^2 + \ldots \\ + \text{etc.} \end{array}\right\} - \frac{\left\{\begin{array}{l} (L + L' + L'' + \ldots)^2 \\ + (L_{,} + L_{,}' + L_{,}'' + \ldots)^2 \\ + (L_{,,} + L_{,,}' + L_{,,}'' + \ldots)^2 \\ + \text{etc.} \end{array}\right\}}{n}$$

wo

$$\begin{aligned} p &= \frac{l + l_{,} + l_{,,} + \ldots}{m} \\ p' &= \frac{l' + l_{,}' + l_{,,}' + \ldots}{m} \\ p'' &= \frac{l'' + l_{,}'' + l_{,,}'' + \ldots}{m} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

zu setzen ist. Trennt man die p von den $l-q$, so bekommt man auf dieselbe Art, wenn man

$$\Delta = l - q\ ,\quad \Delta_{,} = l_{,} - q_{,}\ ,\quad \Delta_{,,} = l_{,,} - q_{,,}\ ,\ \text{etc.}$$
$$\Delta' = l' - q\ ,\quad \Delta'_{,} = l'_{,} - q_{,}\ ,\quad \Delta'_{,,} = l'_{,,} - q_{,,}\ ,\ \text{etc.}$$
$$\Delta'' = l'' - q\ ,\quad \Delta''_{,} = l''_{,} - q_{,}\ ,\quad \Delta''_{,,} = l''_{,,} - q_{,,}\ ,\ \text{etc.}$$
etc.

setzt

$$M = \left\{\begin{array}{l} \Delta^2 + \Delta_{,}^2 + \Delta_{,,}^2 + \ldots \\ + \Delta'^2 + \Delta'^2_{,} + \Delta'^2_{,,} + \ldots \\ + \Delta''^2 + \Delta''^2_{,} + \Delta''^2_{,,} + \ldots \\ + \text{etc.} \end{array}\right\} - \frac{\left\{\begin{array}{l} (\Delta + \Delta_{,} + \Delta_{,,} + \ldots)^2 \\ + (\Delta' + \Delta'_{,} + \Delta'_{,,} + \ldots)^2 \\ + (\Delta'' + \Delta''_{,} + \Delta''_{,,} + \ldots)^2 \\ + \text{etc.} \end{array}\right\}}{m}$$

wo

$$q = \frac{l + l' + l'' + \ldots}{n}$$
$$q_{,} = \frac{l_{,} + l'_{,} + l''_{,} + \ldots}{n}$$
$$q_{,,} = \frac{l_{,,} + l'_{,,} + l''_{,,} + \ldots}{n}$$
etc.

zu setzen ist. Aus der einen oder der anderen der beiden vorstehenden Formen bekommt man, wenn man auch die p, oder bez. die q von den l trennt, auf dieselbe Art

$$M = \left\{\begin{array}{l} l^2 + l'^2 + l''^2 + \ldots \\ + l_{,}^2 + l'^2_{,} + l''^2_{,} + \ldots \\ + l_{,,}^2 + l'^2_{,,} + l''^2_{,,} + \ldots \\ + \text{etc.} \end{array}\right\} - \frac{\left\{\begin{array}{l} (l + l' + l'' + \ldots)^2 \\ + (l_{,} + l'_{,} + l''_{,} + \ldots)^2 \\ + (l_{,,} + l'_{,,} + l''_{,,} + \ldots)^2 \\ + \text{etc.} \end{array}\right\}}{n}$$

$$- \frac{\left\{\begin{array}{l} (l + l_{,} + l_{,,} + \ldots)^2 \\ + (l' + l'_{,} + l'_{,,} + \ldots)^2 \\ + (l'' + l''_{,} + l''_{,,} + \ldots)^2 \\ + \text{etc.} \end{array}\right\}}{m} + \frac{\left\{\begin{array}{l} l + l_{,} + l_{,,} + \ldots \\ + l' + l'_{,} + l'_{,,} + \ldots \\ + l'' + l''_{,} + l''_{,,} + \ldots \\ + \text{etc.} \end{array}\right\}^2}{mn}$$

unter welchen fünf Berechnungsarten von M man nach Belieben wählen kann, da sie alle identisch sind. Ich wiederhole, dass wie im vor. Art. n die Anzahl der Richtungen und m die Anzahl der einzelnen Gyri in der betreffenden Gruppe von Gyris bedeuten.

12.

Die durch das oben beschriebene Verfahren erlangten Beobachtungsfehler $(l - p - q)$, etc. müssen nun zufolge des im Art. 1 der

Abhandlung aufgestellten Grundsatzes als die wahrscheinlichsten Fehler der Beobachtungen angesehen werden, und da sie aus den blossen Beobachtungen, ohne Zuziehung irgend eines anderen Zweckes erlangt worden sind, so sind sie die wahrscheinlichsten Fehler der nackten Beobachtungen. Man bekommt aus ihnen den mittleren Fehler der nackten Beobachtungen nach Massgabe des Ausdrucks des Art. 150 für den mittleren Fehler überhaupt, und nennt man diesen hier μ, so wird

$$\mu = \sqrt{\frac{M}{D}}$$

wo D so zu berechnen ist, wie a. a. O. angegeben ist. In Bezug darauf kann angeführt werden, dass im gegenwärtigen Falle immer die Gleichungen

$$(Ab) = 0\ ,\ (As) = 1\ ,\ (Al) = (Ax)(Au)$$

statt finden. Der Ausdruck von (As) bedeutet nemlich nun nicht die einzige Station, sondern die einzige Gruppe von Gyris, die hier immer für sich allein in Betracht gezogen wird, und der Ausdruck (Au) bedeutet jetzt die Anzahl der einzelnen Gyri in der betrachteten Gruppe von Gyris.

13.

Die Bestimmung des mittleren Fehlers der nackten Beobachtungen durch eine einzige Gruppe von Gyris kann nie als hinreichend genau betrachtet werden.

Man muss bei dieser Bestimmung stets den Umstand vor Augen behalten, dass der oben angegebene Ausdruck ein genäherter ist, dessen Ableitung voraussetzt, dass im Ausdruck des Zählers desselben alle möglichen Fehler vertreten sind. Bei einer kleinen Anzahl von Beobachtungen ist dieses nun selbstverständlich immer am Wenigsten der Fall, während das Grundprincip der Wahrscheinlichkeitsrechnung (S. Art. 1 der Abhandlung) anzeigt, dass diese Bedingung sich desto mehr erfüllen wird, je grösser die Anzahl der Beobachtungen ist, die zur Bildung des Zählers M beigetragen haben. Eine Bestimmung des mittleren Fehlers aus einer kleinen Anzahl von Beobachtungen kann daher so sehr vom wahren dieser Grösse abweichen, dass sie kaum für eine genäherte Bestimmung derselben gehalten werden kann. Die zufälligen Fehler, die in einer kleinen Anzahl von Beobachtungen vorkommen, überwiegen einestheils durch ihre zufällige Beschaffenheit, ob sie zufällig gross oder ob sie zufällig klein sind, und anderntheils dadurch dass sie einen nur

kleinen Divisor bekommen. Je grösser aber die Zahl der Beobachtungen ist, die zu dieser Bestimmung verwandt wird, desto mehr gleichen sich die Zufälligkeiten aus, und desto mehr tritt der wahre Werth hervor, dessen Genauigkeit überdies durch den wachsenden Werth des Divisors vergrössert wird.

Man darf daher bei der Bestimmung eines mittleren Fehlers überhaupt nur in dem Falle auf die Sicherheit der Bestimmung rechnen, wenn eine grosse Anzahl von Beobachtungen, hier eine grosse Anzahl von Gruppen von Gyris, dazu verwandt worden ist, und es soll daher angenommen werden, dass auf der Station ausser der Gruppe von Gyris die M und D gegeben hat, noch mehrere vorhanden sind, die bez. M' und D', M'' und D'', etc. gegeben haben. Sicherer wird diese Bestimmung noch, wenn mehrere Stationen vorhanden sind, für welche man berechtigt ist, die Beobachtungen derselben Gattung zuzuzählen, welcher jene angehören. Um diesen Fall, der eigentlich zur sicheren Bestimmung des mittleren Fehlers immer vorhanden sein muss, mit Leichtigkeit in die gegenwärtigen Betrachtungen einschliessen zu können, sollen schliesslich statt der obigen Bezeichnungen die folgenden M_s und D_s, M_s' und D_s', M_s'' und D_s'', etc. eingeführt werden, und es wird daher vorausgesetzt, dass man in hinreichender Anzahl die einzelnen Bestimmungen

$$\mu^2 = \frac{M_s}{D_s}\ ,\ \mu^2 = \frac{M'_s}{D'_s}\ ,\ \mu^2 = \frac{M''_s}{D''_s}\ ,\ \text{etc.}$$

erhalten habe, in welchen s verschiedene Werthe annimmt.

14.

Um die zweckmässigste Verbindung dieser Einzelnbestimmungen zu einem Endresultat anzugeben, kann man sich des mittleren zu befürchtenden Fehlers bedienen, den Gauss für die Bestimmung des Quadrats des mittleren Fehlers entwickelt hat; da dieser aber zu verwickelt ausfällt, so kann man die Grenzen desselben, die auch von Gauss angegeben worden sind, zu diesem Zwecke anwenden. Nimmt man die weiteren Grenzen, so ist das Quadrat des mittleren, in der Bestimmung von μ^2 zu befürchtenden Fehlers

$$= \frac{2\mu^4}{D}$$

*) und das Gewicht der Bestimmung von μ^2 ist diesem umgekehrt pro-

*) S. Gauss, Theoria combinationis observationum etc. letzter Artikel.

portional. Da in diesem Ausdruck unter μ dessen wahrer Werth verstanden werden muss, welcher für jede Gattung von Beobachtungen unveränderlich ist, und die Gewichte Verhältnisszahlen sind, so ergiebt sich hieraus, dass für die Gewichte der Einzelnbestimmungen des vor. Art. bez. D_s, D_s', D_s'', etc. angenommen werden können, und hieraus folgt vermöge der Gleichung (9) der Abhandlung das Endresultat

$$\mu^2 = \frac{\Sigma\{M_s + M_s' + M_s'' + \ldots\}}{\Sigma\{D_s + D_s' + D_s'' + \ldots\}}$$

wo die Summenzeichen sich auf s beziehen. Auf diese Weise sprechen auch die Bestimmungen, die, weil sie auf einer geringen Anzahl von Beobachtungen beruhen, einzeln und für sich betrachtet, nur geringen oder gar keinen Werth haben, auf geeignete Weise mit, und tragen das Ihrige zur sicheren Bestimmung des mittleren Fehlers auf angemessene Art bei.

15.

Wenn in einer Triangulation alle Beobachtungen der Richtungen in Eine Klasse gestellt, und folglich Allen dasselbe Gewicht, welches $= 1$ gesetzt werden kann, beigelegt werden darf, so haben die im Vorhergehenden entwickelten Bestimmungen höchstens den Zweck die Güte der Beobachtungen an sich kennen zu lernen, und ihre Ausführung kann, wenn hiefür kein besonderer Grund vorhanden ist, unterlassen werden. Wenn aber auf verschiedenen Stationen verschiedene Gattungen von Beobachtungen angenommen werden müssen, dann tritt die Nothwendigkeit ihrer Ausführung ein.

Schreibt man zur Abkürzung für die rechte Seite des letzten Ausdrucks des vor. Art. K, so dass allgemein $\mu^2 = K$ wird, so bekommt man für die Stationen, deren Beobachtungen das Gewicht π beizulegen ist, die Gleichung

$$\frac{c}{\pi} = K$$

wo c eine beliebige Constante ist. Auf dieselbe Weise wird man für andere Stationen, auf welchen andere Gattungen von Beobachtungen vorkommen, die durch das im Vorhergehenden erklärte Verfahren K', K'', etc. statt K gegeben haben, die Gleichungen

$$\frac{c}{\pi'} = K', \quad \frac{c}{\pi''} = K'', \text{ etc.}$$

erhalten, wenn π', π'', etc. die Gewichte bezeichnen, die den Beobachtungen dieser Stationen beizulegen sind. Hieraus folgen

$$\pi' = \pi \frac{K}{K'}, \quad \pi'' = \pi \frac{K}{K''}, \text{ etc.}$$

oder da Ein Gewicht willkührlich ist, und man demnach

$$\pi = 1$$

setzen darf *),

$$\pi' = \frac{K}{K'}\,, \quad \pi'' = \frac{K}{K''}\,, \text{ etc.}$$

womit die Gewichte aller vorhandenen, verschiedenen Gattungen von Beobachtungen bestimmt sind, und man die Producte

$$(1,1)_s . \pi_s\,, \quad (2,2,1)_s . \pi_s\,, \quad (3,3,2)_s . \pi_s\,, \text{ etc. } (ll,n)_s\, \pi_s$$

berechnen kann, die zufolge des Art. 138 der Abhandlung im zweiten Theile der Auflösung gebraucht werden.

16.

Zur Berechnung von M sind noch einige Bemerkungen zu machen. Die Correctionen, die eine mit einem Theodoliten eingeschnittene Richtung verlangt, sind wenn man von den Theilungsfehlern des Kreises, und einem etwa durch das Niveau desselben angezeigten Mangel an Verticalität in der Stellung der Drehungsachse vorläufig absieht, durch den folgenden Ausdruck gegeben,

$$c \sec\theta + c' \operatorname{tg}\theta$$

in welchem $90^0 - c$ den Winkel zwischen der Absehungslinie und der Achse des Fernrohrs, $90^0 - c'$ den Winkel zwischen der Achse des Fernrohrs und der Achse der Alhidade, und θ den Winkel bezeichnet, den die Absehenslinie während der Beobachtung mit der Ebene des Horizontalkreises macht, (den Höhenwinkel des einzuschneidenden Punkts). Ausserdem hat die Erfahrung angezeigt, dass zuweilen während der Beobachtungen eine kleine Drehung des Stativs, gemeiniglich von Osten nach Westen, statt findet. Auch kommt die Correction in Betracht, die wegen etwaiger Excentricität des Fernrohrs erforderlich ist.

Die letzt genannte Correction anbelangend, die

$$\frac{r}{R}\, 206265''\, \sec\theta$$

zum Ausdruck hat, wenn R die Entfernung des Gegenstandes vom Theodoliten, und r die kürzeste Entfernung der Absehenslinie vom Mittelpunkt des Theodoliten bezeichnen, ist es klar, dass sie aus dem

*) Die Bestimmung, die man hie und da findet, dass die Einheit des Gewichts solchen Beobachtungen entsprechen soll, deren mittlerer Fehler $1''$ beträgt, hat gar keinen inneren Grund, und ist als unzweckmässig zu verwerfen; statt dessen ist für irgend eine der wirklich vorhandenen Gattungen von Beobachtungen $\pi = 1$ zu setzen.

Resultat verschwindet, wenn man einestheils aus den Beobachtungen mit dem Fernrohr linker Hand, anderntheils aus denen mit dem Fernrohr rechter Hand die Mittel, und aus diesen Mitteln wieder das Mittel nimmt. Sind in jeder dieser beiden Lagen gleich viele Beobachtungen angestellt, so verschwindet die Correction ohne Weiteres aus dem Mittel aus allen Beobachtungen. Aber auch die beiden von c und c' abhängigen Correctionen verschwinden durch dasselbe Verfahren, vorausgesetzt dass man bei der Veränderung der Lage des Fernrohrs dieselben Zapfen der Fernrohrsachse in denselben Lagern belassen hat.

Denn durch diese Aenderung wird bewirkt, dass der Winkel θ sich in $180°-\theta$ verwandelt, und folglich die obige Correctionsformel in

$$-c\sec\theta - c'\operatorname{tg}\theta$$

übergeht. Wollte man zugleich mit der genannten Aenderung die Zapfen der Fernrohrsachse in die entgegengesetzten Lager bringen, so würde nur das erste Glied des vorstehenden Ausdrucks sein Zeichen ändern, also die Correction nicht ganz verschwinden.

Dem schädlichen Einfluss einer etwaigen Drehung des Stativs auf die Beobachtungen beugt man dadurch möglichst vor, dass man von Gyrus zu Gyrus abwechselnd von der linken zur rechten, und von der rechten zur linken die Gegenstände nach und nach einschneidet.

Wenn man sich daher zur Regel macht, die vorbenannten Abänderungen zusammen genommen abwechselnd von Gyrus zu Gyrus eintreten zu lassen, so sind die Summen der Beobachtungen und die Mittel daraus von den erwähnten Fehlern unabhängig.

Die Berücksichtigung der Theilungsfehler wird am vollkommensten, wenn sie im Voraus für die anzuwendenden Theodoliten besonders ermittelt worden sind, wenn dieses aber nicht der Fall ist, so bleibt nichts weiter übrig als vor Anfang eines jeden Gyrus den Nullpunkt auf dem Kreise zu verändern, wodurch man hoffen darf, dass die Wirkung der Theilungsfehler im Ganzen vermindert wird. Eine etwa hierauf übrig bleibende Wirkung der Theilungsfehler ist unter diesen Umständen nicht zu vermeiden.

Wenn das Nivellement des Theodoliten nicht vollständig ausgeführt worden ist, so muss man, um die desfallsige Correction der beobachteten Richtungen berechnen zu können, die Neigung Δi des Horizontalkreises gegen den Horizont, und die Ablesung ϱ ermitteln, die dem höchsten Punkt dieses Kreises entspricht. Beide diese Data können nur durch das

Niveau bestimmt werden, und zwar Δi mit grosser Genauigkeit, aber ϱ weit weniger genau, wenn Δi klein ist; es kann aber auch in diesem Falle ein grösserer Fehler in ϱ zugegeben werden. Nennt man nun die Ablesung für irgend eine beobachtete Richtung r, so ist die Correction derselben

$$\Delta r = \operatorname{tg} \theta \sin (r - \varrho) \Delta i$$

Man erkennt hieraus, dass diese Correction bei kleinen Höhen- oder Tiefenwinkeln θ der einzuschneidenden Gegenstände unbedeutend ist, wenn nur Δi klein ist; in gebirgigen Gegenden, wo grössere Werthe von θ vorkommen können, kann sie aber nicht unbedeutend werden, man muss also in solchen Gegenden mehr Fleiss auf die Ausführung des Nivellements des Theodoliten verwenden.

17.

Aus dem vor. Art. ist ersichtlich, dass man, mit Ausnahme der zuletzt erklärten Correction, die Beobachtungen stets so einrichten kann, dass ihre Summen oder ihre Mittel, ohne besondere Rechnungen ausführen zu müssen, frei von den Correctionen des Instruments erhalten werden. Da in den Ausgleichungsrechnungen nur diese Summen gebraucht werden, so ist es für die Ausführung dieser gar nicht nöthig die Correctionen des Instruments in Erfahrung zu bringen, es wäre denn, dass man nach der Ausführung der Beobachtungen erkannt hätte, dass hie und da im Nivellement des Theodoliten zu grosse Fehler vorgekommen wären.

Da im Gegentheil in den Unterschieden der einzelnen Beobachtungen von dem Mittel derselben, oder von einer constanten Zahl, die Correctionen des Theodoliten ihre volle Wirkung äussern, so scheint es, als müsste man für die Bestimmung des mittleren Fehlers der nackten Beobachtungen diese Correctionen kennen, oder als könnte man hiefür die Beobachtungen nur paarweise benutzen. Dass man aber hiebei die Beobachtungen auch einzeln anwenden kann, ohne den Betrag der genannten Correctionen zu kennen, soll jetzt gezeigt werden.

18.

Dass die aus Δi entstehende Correction hiebei nicht in Betracht kommt, wenn auch Δi noch so gross ist, liegt an der Hand. Da man ferner vor dem Beginn der Beobachtungen sich immer bemühen wird

c und c' fast Null zu machen, dieses mit Leichtigkeit und Sicherheit auch geschehen kann, und ein Mal hergestellt, bei einem gut gebauten Theodoliten auch lange Zeit so bleibt, so kann man die durch c und c' entstehenden Fehler in den Unterschieden der einzelnen Beobachtungen von dem Mittel derselben wohl stets als verschwindend betrachten, und es bleibt also blos die etwaige Excentricität des Fernrohrs zu betrachten übrig.

Diese Excentricität hat nicht immer Einfluss auf die genannten Unterschiede, denn nehmen wir an, dass alle eingeschnittenen Gegenstände sich in gleicher Entfernung von der Station befinden und gleiche Höhenwinkel haben, so haben selbstverständlich alle Correctionen wegen Excentricität gleichen Betrag, und üben keine andere Wirkung aus, als dass sie die Correction der Nullpunkte der Gyri ändern. Wenn folglich die eingeschnittenen Gegenstände nahe gleiche Entfernungen und kleine Höhenwinkel haben, so werden sie nur kleine Wirkungen auf die Unterschiede, die hier in Rede stehen haben. Nur wenn die eingeschnittenen Gegenstände sehr ungleiche Entfernungen haben, oder sehr grosse und kleine Höhenwinkel vorkommen, wird der Einfluss der Excentricität auf die Unterschiede wesentlich gross, und darf nicht unberücksichtigt bleiben.

Aber man braucht deshalb nicht die Centrirungen zu berechnen, man braucht nur jede Gruppe von Gyris so in zwei Abtheilungen zu theilen, dass die eine dieser alle Beobachtungen enthält, die in der einen, und die andere Abtheilung alle Beobachtungen, die in der andern Lage des Fernrohrs angestellt worden sind. Hierauf ist nun nichts weiter zu thun, wie jede dieser beiden Abtheilungen für sich dem im Vorhergehenden erklärten Verfahren zu unterwerfen, worauf sich für jede derartige Gruppe von Gyris zwei Werthe von M ergeben, deren jeder denselben Divisor D bekommt. Das partielle Resultat, welches jede so behandelte Gruppe von Gyris für das Quadrat des mittleren Fehlers der nackten Beobachtungen giebt, wird also

$$\frac{m + m'}{2D}$$

zum Ausdruck haben, wenn m und m' die beiden Werthe von M sind, die man auf die eben angezeigte Art berechnet hat.

Das Resultat, welches man durch dieses Verfahren erhält, ist nicht nur frei von der Wirkung der Excentricität des Fernrohrs, sondern auch frei von der Wirkung der von c und c' abhängigen Correctionen der

Beobachtungen, ferner sind sie in dem Falle, dass man die Beobachtungen, wie oben erklärt, angestellt hat, möglichst frei von der Wirkung einer etwa vorgekommenen Drehung des Stativs während der Beobachtungen.

Die Theilungsfehler des Kreises üben freilich jeden Falls, sei es dass man die oben beschriebenen Abtheilungen hat einführen müssen, oder sei es dass dieses nicht nöthig gewesen ist, wenn sie nicht besonders ermittelt und angebracht worden sind, eine Wirkung auf das Resultat aus, aber sie gehören alsdann auch mit zu den Fehlerquellen, die den mittleren Fehler der nackten Beobachtungen bedingen.

19.

Bei der Bestimmung des mittleren Fehlers der nackten Beobachtungen ist es unerlässlich, die einzelnen Beobachtungen zu berücksichtigen, da man, wenn man hiezu Gruppen von Beobachtungen benutzen wollte, auf zu kleine Divisoren, und daher auf wenig sichere Resultate geführt werden würde. Hingegen zur Bestimmung des mittleren Fehlers einer Richtung, welcher sich schliesslich, nach der Ausführung der Ausgleichung des Dreiecksnetzes ergiebt, alle vorhandenen Fehlerquellen in sich schliesst, und zur Ermittelung der mittleren Fehler der Resultate, oder der einzelnen Stücke des Dreiecksnetzes dient; zur Bestimmung dieses mittleren Fehlers kann man sich der Gruppen von Gyris bedienen, aus welchen die strengen Werthe der Unbekannten hervorgehen, wie in der Abhandlung erklärt ist. Bei dieser Bestimmung vereinigen sich alle Beobachtungen, die bei der Ausführung der Triangulation angestellt worden sind, zu einem Ganzen, und der Divisor D bekommt daher schon, wenn er aus den Gruppen berechnet wird, und die Ausdehnung der Triangulation nicht zu klein ist, einen ansehnlichen Werth.

Dieses Verfahren ist dem der Bildung von Normalörtern, und der Verwendung dieser zur Bestimmung der Elemente, der Planeten- oder Cometenbahnen, nebst den sich hiebei ergebenden mittleren Fehlern, analog.

20.

Will man sich indessen die vergrösserte Arbeit nicht verdriessen lassen, die hier die Zuziehung der einzelnen Beobachtungen verursacht, so lässt sich weiter nichts dagegen sagen, als dass der Erfolg oftmals dieser Bemühung nicht adäquat ist. Ich will für den Fall, dass der Eine

oder der Andere zur Anwendung dieses Verfahrens geneigt sein möchte, die Aenderungen die es veranlasst, und die sich blos auf die Berechnung der in der Abhandlung mit (ll) bezeichneten Grössen erstrecken, angeben.

Seien für irgend eine Station, und für irgend eine der auf derselben vorkommenden Gruppen von Gyris l, l', l'', etc. $l_,$, $l_,'$, $l_,''$, etc. etc. die Unterschiede der einzelnen Beobachtungen von den vorläufigen Werthen der Richtungen, die im ersten Stationstäfelchen angenommen worden sind, und

$$q = \frac{l + l' + l'' + \ldots}{n}$$

$$q_, = \frac{l_, + l_,' + l_,'' + \ldots}{n}$$

$$q_{,,} = \frac{l_{,,} + l_{,,}' + l_{,,}'' + \ldots}{n}$$

wo n die Anzahl der Richtungen bezeichnet, die in der betrachteten Gruppe von Gyris vorkommen, dann wird

$$(ll) = \Sigma' \left\{ \begin{array}{l} (l-q)^2 + (l'-q)^2 + (l''-q)^2 + \ldots \\ + (l_,-q_,)^2 + (l_,'-q_,)^2 + (l_,''-q_,)^2 + \ldots \\ + (l_{,,}-q_{,,})^2 + (l_{,,}'-q_{,,})^2 + (l_{,,}''-q_{,,})^2 + \ldots \\ + \text{etc.} \end{array} \right.$$

wo das Summenzeichen Σ' sich auf alle Gruppen von Gyris bezieht, die auf der betreffenden Station vorhanden sind. Man kann diesen Ausdruck auf ähnliche Art, wie im Art. 11 bei M geschehen ist, umformen, und erhält dadurch

$$(ll) = \Sigma' \left\{ \begin{array}{l} l^2 + l'^2 + l''^2 + \ldots \\ + l_,^2 + l_,'^2 + l_,''^2 + \ldots \\ + l_{,,}^2 + l_{,,}'^2 + l_{,,}''^2 + \ldots \\ + \text{etc.} \end{array} \right. - \Sigma' \left\{ \frac{\left\{ \begin{array}{l} (l + l' + l'' + \ldots)^2 \\ + (l_, + l_,' + l_,'' + \ldots)^2 \\ + (l_{,,} + l_{,,}' + l_{,,}'' + \ldots)^2 \\ + \text{etc.} \end{array} \right.}{n} \right.$$

Man erkennt leicht, dass in den Fällen, in welchen auf der Station nur Eine Gruppe von Gyris vorhanden ist, (ll) sowohl mit M wie mit (ll,n) identisch wird, vorausgesetzt dass man unter den l nicht die Unterschiede der Beobachtungen von beliebigen, als vorläufige Werthe der Richtung angenommenen Zahlen, sondern von den bez. arithmetischen Mitteln versteht, die in diesem Falle die auf der Station ausgeglichenen Werthe der Richtungen sind.

Auf den Stationen, auf welchen zwei oder mehr Gruppen von Gyris vorkommen, finden die eben angeführten Identitäten nicht statt.

21.

Die Fälle, in welchen mit einem Theodoliten beobachtet worden ist, welcher mit einem excentrisch angebrachten Fernrohr versehen ist, erfordern hier eine besondere Betrachtung. Wenn auf der Station nur Eine Gruppe von Gyris vorhanden ist, dann ist leicht einzusehen, dass der Satz des vor. Art. seine volle Geltung behält, vorausgesetzt dass man die oben beschriebenen zwei Abtheilungen bildet, und unter den l die Unterschiede der Beobachtungen von den bez. beiden arithmetischen Mitteln versteht, denn die Werthe der auf der Station ausgeglichenen Richtungen sind in diesem Falle die Mittel aus jenen Mitteln.

Wenn aber auf der Station zwei oder mehr Gruppen von Gyris vorhanden sind, dann haben die arithmetischen Mittel in der Ausgleichungstheorie gar keine Bedeutung mehr, und es muss in diesen Fällen die hier in Rede stehende Untersuchung anders durchgeführt werden. Es müssen nun vor Allem, gleichwie oben, unter den l die Unterschiede der einzelnen Beobachtungen von den vorläufig angenommenen Werthen der Richtungen verstanden werden, aber diese Unterschiede begreifen die Wirkung der Excentricität des Fernrohrs in sich, die nicht zu den Beobachtungsfehlern gezählt werden kann, und daher daraus entfernt werden muss. Hiefür bieten sich zunächst zwei Mittel dar, man kann einestheils, wenn die Entfernungen der eingeschnittenen Gegenstände schon hinreichend genau bekannt sind, für jeden derselben die Wirkung der Excentricität berechnen, und die Beobachtungen davon befreien, anderntheils kann man diese Wirkung schon dadurch entfernen, dass man die Beobachtungen paarweise benutzt, nemlich vor Allem aus je zwei Beobachtungen, die in entgegengesetzten Lagen des Fernrohrs angestellt worden sind, das arithmetische Mittel nimmt, von diesen Mitteln den vorläufig angenommenen Werth der bez. Richtung abzieht, und die so erhaltenen Unterschiede als die Werthe der l betrachtet.

22.

Es ist ausser diesem noch ein drittes Verfahren möglich, welches die Kenntniss der Entfernungen der eingeschnittenen Gegenstände nicht voraussetzt, und dennoch die directe Benutzung der einzelnen Beobachtungen gestattet. Seien α, α', α'', etc. die einzelnen Beobachtungen irgend einer Richtung in einer Gruppe von Gyris, die in der einen Lage des

Fernrohrs erhalten worden sind, so wie β, β', β'', etc. die Beobachtungen derselben Richtung in derselben Gruppe von Gyris, die man in der anderen Lage des Fernrohrs erhalten hat; sei e die Wirkung der Excentricität des Fernrohrs in Bezug auf diese Richtung. Die von dieser Wirkung befreiten Beobachtungen sind also

$$\alpha + e\,,\quad \alpha' + e\,,\quad \alpha'' + e\,,\quad \text{etc.}$$
$$\beta - e\,,\quad \beta' - e\,,\quad \beta'' - e\,,\quad \text{etc.}$$

und wenn keine Beobachtungsfehler vorhanden wären, so müssten nicht nur

$$\alpha + e = \beta - e$$
$$\alpha' + e = \beta' - e$$
$$\alpha'' + e = \beta'' - e$$
$$\text{etc.}$$

sein, sondern es müsste auch aus allen diesen Gleichungen derselbe Werth von e hervorgehen. Zufolge des allgemeinen Grundsatzes des Art. 1 der Abhandlung wird hiemit, in der Voraussetzung dass allen Beobachtungen gleiche Güte beigelegt wird,

$$e = \frac{\beta + \beta' + \beta'' + \text{etc.} - \alpha - \alpha' - \alpha'' - \text{etc.}}{n}$$

wenn n die Anzahl der einzelnen Gyri der betreffenden Gruppe bezeichnet. Hiemit kann man die Summen und Unterschiede

$$\alpha + e\,,\quad \alpha' + e\,,\quad \alpha'' + e\,,\quad \text{etc.}$$
$$\beta - e\,,\quad \beta' - e\,,\quad \beta'' - e\,,\quad \text{etc.}$$

berechnen, von welchen um die bez. l zu bilden der vorläufig angenommene Werth der Richtung abzuziehen ist*). Dieses Verfahren ist für jede in der bez. Gruppe beobachtete Richtung besonders auszuführen.

Sind nun alle l dem Vorhergehenden gemäss berechnet worden, dann wird nach einem der beiden Ausdrücke des vorvor. Art. (ll) berechnet, und die darauf folgende Berechnung von (ll,n) wird ohne Veränderung so ausgeführt, wie in der Abhandlung erklärt worden ist.

---

*) Man kann bemerken, dass in dem Falle, wo die Gruppe von Gyris nur aus zwei Gyris besteht, hieraus

$$\alpha + e = \beta - e = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

hervor geht, und folglich dieses Verfahren mit dem oben angegebenen zweiten Verfahren identisch wird.

Suppl. 3. Ableitung einer bisher unbekannten Bedingungsgleichung, die im zweiten Theile der Ausgleichung eines Dreiecksnetzes statt findet.

1.

Der im Art. 72 der Abhandlung bewiesene und durch die Gleichung (64) ausgedrückte Satz, nemlich

$$Nx + N'x' + N''x'' + \ldots + \theta = 0$$

welcher, nachdem im Art. 76 $\theta = 0$ gesetzt worden, und diese Bestimmung im Verlaufe der Abhandlung beibehalten worden ist, auf

$$Nx + N'x' + N''x'' + \ldots = 0$$

reducirt wird, bezieht sich auf die Ausgleichungen auf den Stationen, indem hier x, x', x'' etc. die Resultate dieser Ausgleichungen bezeichnen. Später, nach Abänderung der anfänglich benutzten Bezeichnungen in andere, die in der Anwendung passender erscheinen, nimmt er die Form

$$Nw(1) + N'w(2) + N''w(3) + \ldots = 0$$

an, und in dieser Form ist er namentlich im § 6 angeführt, und als ein, zur Prüfung der Richtigkeit der Ausführung der numerischen Berechnungen der Ausgleichungen auf den Stationen geeignetes, einfaches Mittel bezeichnet worden, da er für beliebige Werthe der N, N', etc. gilt, und nur seine Wirksamkeit aufhört, wenn man alle N gleich Null macht. In diesem Falle, welcher im zweiten Verfahren vorkommt, ist dieser Satz nemlich stets identisch erfüllt, welche Rechnungsfehler man auch in der Ausgleichung auf den Stationen begangen haben mag.

Ich werde hier weiter gehen, und den Beweis führen, dass dieser Satz auch im zweiten Theile der Auflösung statt findet, das ist, dass auch die Gleichung

$$Nz(1)_s + N'z(2)_s + N''z(3)_s + \ldots = 0$$

statt findet, wodurch für die Prüfung der Richtigkeit der Berechnung der numerischen Werthe der $z(1)_s$, $z(2)_s$, etc. und, wie man sehen wird, auch der $f(r,I)$, $f(r,II)$, etc. eine neue Controle erlangt wird.

2.

Wenden wir uns zum Art. 35 der Abhandlung und multipliciren die dort befindlichen Ausdrücke für $(\alpha\eta)$, $(\beta\eta)$, $(\gamma\eta)$, etc., bez. mit N, N', N'', etc. dann erhalten wir

$$(\alpha\eta)N + (\beta\eta)N' + (\gamma\eta)N'' + \ldots = \{(1,1)N + (1,2)N' + (1,3)N'' + \ldots\}q$$
$$+ \{(1,2)N + (2,2)N' + (2,3)N'' + \ldots\}q'$$
$$+ \{(1,3)N + (2,3)N' + (3,3)N'' + \ldots\}q''$$
$$+ \text{etc.}$$

Aber im Art. 71 haben die mit (1,1), (1,2), etc. etc. bezeichneten Grössen dieselbe Bedeutung wie im Art. 35, und folglich geht die vorstehende Gleichung durch Hülfe der (63) in die folgende über,

$$(\alpha\eta)N + (\beta\eta)N' + (\gamma\eta)N'' + \ldots = \frac{S}{\Sigma N}(q + q' + q'' + \ldots$$

Eben so bekommt man

$$(\alpha\varkappa)N + (\beta\varkappa)N' + (\gamma\varkappa)N'' + \ldots = \frac{S}{\Sigma N}(r + r' + r'' + \ldots$$

$$(\alpha\lambda)N + (\beta\lambda)N' + (\gamma\lambda)N'' + \ldots = \frac{S}{\Sigma N}(s + s' + s'' + \ldots$$

etc. etc.

wo zufolge der (30) q, q', q'', etc. r, r', r'', etc. s, s', s'', etc. etc. die Coefficienten der Unbekannten in den verschiedenen Bedingungsgleichungen sind.

Gehen wir nun speciel zur geodätischen Aufgabe über, und bemerken, dass in dieser die Bedingungsgleichungen blos Winkel, oder Unterschiede von paarweise genommenen Richtungen enthalten, so folgt dass in dieser Aufgabe nicht blos im Allgemeinen, sondern für jede Station ins Besondere

$$0 = q + q' + q'' + \ldots$$
$$0 = r + r' + r'' + \ldots$$
$$0 = s + s' + s'' + \ldots$$
$$\text{etc.}$$

sind. Die oben erhaltenen Gleichungen gehen daher über in

$$0 = (\alpha\eta)N + (\beta\eta)N' + (\gamma\eta)N'' + \ldots$$
$$0 = (\alpha\varkappa)N + (\beta\varkappa)N' + (\gamma\varkappa)N'' + \ldots$$
$$0 = (\alpha\lambda)N + (\beta\lambda)N' + (\gamma\lambda)N'' + \ldots$$
$$\text{etc.}$$

Da nun zufolge des Art. 49

$$z = (\alpha\eta)\alpha, + (\alpha\varkappa)\beta, + (\alpha\lambda)\gamma, + \ldots$$
$$z' = (\beta\eta)\alpha, + (\beta\varkappa)\beta, + (\beta\lambda)\gamma, + \ldots$$
$$z'' = (\gamma\eta)\alpha, + (\gamma\varkappa)\beta, + (\gamma\lambda)\gamma, + \ldots$$
$$\text{etc.}$$

und dort z. z', z'', etc. dieselbe Bedeutung haben, wie später $z(1)_s$, $z(2)_s$, $z(3)_s$, etc., so bekommt man sogleich

$$0 = Nz(1)_s + N'z(2)_s + N''z(3)_s + \ldots$$

für jede Station besonders. W. z. b. w.

3.

Um diesen Satz auf ein Beispiel anzuwenden nehme ich die Station (1) des Hauptbeispiels vor. Im Art. 96 wurde gefunden

$$z(1)_1 = + 0''.107 \;,\; z(2)_1 = + 0''.073 \;,\; z(3)_1 = - 0''.440$$
$$z(4)_1 = + 0.459 \;,\; z(a)_1 = - 0.038 \;,\; z(b)_1 = - 0.068 \,.$$

und im Art. 84 für dieselbe Station

$$N = 1.5 \;,\; N' = 3.0 \;,\; N'' = 0.5 \;,$$
$$N''' = 0 \;,\; N^{IV} = 2.5 \;,\; N^{V} = 0.9444$$

Die Rechnung giebt daher

$$\begin{array}{lll} z(1)_1 = (9.0294) \;,\; z(2)_1 = (8.8633) \;,\; z(3)_1 = (9.6435n) \\ N \;\; = (0.1769) \;,\; N' \;\; = (0.4771) \;,\; N'' \;\; = (9.6990\;) \\ \hline 9.2063 & 9.3404 & 9.3425n \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} z(4)_1 = (\quad\quad) \;,\; z(a)_1 = (8.5798n) \;,\; z(b)_1 = (8.8325n) \\ N''' = (-\infty) \;,\; N^{IV} = (0.3979\;) \;,\; N^{V} = (9.9752\;) \\ & \hline 8.9777n & 8.8077n \end{array}$$

und die Producte sind folglich

$$\begin{array}{r} + 0''.161 \\ + 0.219 \\ - 0.220 \\ 0 \\ - 0.095 \\ - 0.064 \\ \hline \text{Sa.} = + 0.001 \end{array}$$

welches für Null zu erachten ist.

Im Art. 78 wurde bewiesen, dass für jede Station, auf welcher in jedem Gyrus alle vorhandenen Richtungen eingeschnitten worden sind, die Gleichung

$$N = N' = N'' = \text{etc.}$$

statt findet. und für jede solche Station wird also der oben bewiesene Satz

$$0 = z(1)_s + z(2)_s + z(3)_s + \ldots$$

Das Beispiel der Abhandlung bietet keinen solchen Fall dar, aber in der Gaussischen Abhandlung «Supplementum theoriae combinationis etc.» findet er auf allen im dortigen, aus der hannöverschen Gradmessung entlehnten, Beispiel vorkommenden Stationen statt. Da die dortige Bezeichnung (0), (1), (2), (3); (4), (5) (6); etc. mit der hier eingeführten $z(1)_1$, $z(2)_1$, $z(3)_1$, $z(4)_1$; $z(1)_2$, $z(2)_2$, $z(3)_2$; etc. identisch ist, so findet man im Art. 24 der angezogenen Abhandlung,

$$\begin{array}{llll}
z(1)_1 = +\,0''.065, & & & z(1)_3 = -\,0''.481 \\
z(2)_1 = -\,0.212\ , & z(1)_2 = +\,0''.233\ , & z(2)_3 = +\,0.406 \\
z(3)_1 = +\,0.339\ , & z(2)_2 = -\,0.071\ , & z(3)_3 = +\,0.021 \\
z(4)_1 = -\,0.193\ , & z(3)_2 = -\,0.162\ , & z(4)_3 = +\,0.054 \\
\text{Sa.} = -\,0.001\ , & \text{Sa.} = \quad 0.000\ . & \text{Sa.} = \quad 0.000
\end{array}$$

u. s. w. mit dem obigen Satze übereinstimmend. Da Gauss dieses Satzes gar nicht erwähnt, so muss man schliessen, dass er ihm entgangen ist.

4.

Als Corollarium zum oben bewiesenen Satze kann noch das Folgende bemerkt werden. Da statt der oben angewandten Bezeichnungen

$$(\alpha\eta)\ ,\ (\beta\eta)\ ,\ (\gamma\eta)\ ,\ \text{etc.}$$
$$(\alpha\varkappa)\ ,\ (\beta\varkappa)\ ,\ (\gamma\varkappa)\ ,\ \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

im Verlaufe der Abhandlung die folgenden eingeführt worden sind,

$$f(1,I)_s\ ,\ f(2,I)_s\ ,\ f(3,I)_s\ ,\ \text{etc.}$$
$$f(1,II)_s,\ f(2,II)_s,\ f(3,II)_s,\ \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

so giebt der vorvor. Art. auch die Relationen

$$\begin{array}{l}
0 = N.f(1,I)_s + N'.f(2,I)_s + N''.f(3,I)_s + \ldots \\
0 = N.f(1,II)_s + N'.f(2,II)_s + N''.f(3,II)_s + \ldots \\
0 = N.f(1,III)_s + N'.f(2,III)_s + N''.f(3,III)_s + \ldots \\
\qquad\text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{array}$$

die für jede Station besonders statt finden, und auch zur Prüfung der Richtigkeit der numerischen Rechnungen, so wie zur leichteren Auffindung etwaiger Fehler in denselben dienen können.

Ich bemerke noch, dass alle hier entwickelten Relationen wegfällig werden, wenn man sich des in der Abhandlung entwickelten zweiten Verfahrens bedient.

Suppl. 4. Von der Behandlung etwa vorhandener, überzähligen Richtungen.

1.

Im Art. 79 der Abhandlung habe ich in Bezug auf etwa vorhandene überzählige Richtungen angegeben diesen in der Reihenfolge der Richtungen der betreffenden Station die letzten Stellen zuzutheilen, indem sie darauf im zweiten Theile der Auflösung so wenig wie möglich eintreten. Hier werde ich zeigen, wie man bewirken kann, dass sie im zweiten Theile der Auflösung gar nicht erscheinen, und dabei alle übrigen Vortheile, die das erste Verfahren darbietet, vollständig bewahrt bleiben. Ich werde zuerst den Fall Einer überzähligen Richtung, und darauf den, in welchem zwei solcher auf irgend einer Station vorhanden sind, betrachten; aus den hiedurch sich ergebenden Formeln kann man leicht erkennen, wie in Fällen, wo drei oder mehr überzählige Richtungen vorhanden sind, zu verfahren ist.

2.

Die erste jetzt zu beachtende Regel ist die, dass man alle vorhandenen überzähligen Richtungen aus der natürlichen Reihenfolge der überhaupt auf der Station vorhandenen Richtungen herausheben, und den Richtungen nach den Dreieckspunkten voran stellen muss.

Sei nun Eine überzählige Richtung vorhanden, so stelle ich die Aufgabe zu bewirken, dass nicht wie im Art. 76 die Coefficienten

$$(ab)\ ,\ (ac)\ ,\ (ad)\ ,\ \text{etc. nebst } (bc)$$

der Gleichungen (61) des Art. 69, sondern statt dieser die Coefficienten

$$(bc,1)\ ,\ (bd,1)\ ,\ (be,1)\ ,\ \text{etc. nebst } (cd,1)$$

Null werden.

3.

Wenden wir uns zu den Ausdrücken des Art. 43, so finden wir, dass die oben aufgestellten Bedingungen zunächst auf die folgenden Gleichungen führen,

$$\left.\begin{array}{l} (bc,1) = 0 = (bc) + (ac)\alpha' \\ (bd,1) = 0 = (bd) + (cd)\alpha' \\ (be,1) = 0 = (be) + (ae)\alpha' \\ \qquad\qquad \text{etc.} \\ (cd,1) = 0 = (cd) + (ad)\beta' \end{array}\right\} \quad (A)$$

in welchen

$$\left.\begin{array}{l} (ab) + (aa)\alpha' = 0 \\ (ac) + (aa)\beta' = 0 \end{array}\right\} \quad (B)$$

sind; auf der Auflösung dieser Gleichungen beruht die Auflösung unserer Aufgabe, als deren Unbekannte die im Art. 69 eingeführten, und mit N, N', N'', etc. bezeichneten Grössen zu betrachten sind.

4.

Es wären nun zunächst aus den Gleichungen des vor. Art. α' und β' zu eliminiren, und in die daraus hervorgehenden Gleichungen die allgemeinen Ausdrücke der (aa), (ab), etc. etc., die auch im Art. 69 gegeben sind, zu substituiren. Diese Gleichungen würden hierauf zu Functionen der N, N', N'', etc. werden, deren Ausdrücke hierauf durch wechselseitige Eliminationen zu entwickeln wären. Diese Behandlung dieser Gleichungen führt indess auf Ausdrücke für die genannten Unbekannten, die so verwickelt sind, dass sie sich zur Anwendung nicht eignen. Man muss daher ein anderes Verfahren anwenden, und dieses kann man auf den Umstand stützen, dass nicht alle N aus diesen Gleichungen bestimmt werden können, sondern eine dieser Grössen willkührlich bleibt. Man hat a. a. O. gesehen, dass die Anzahl der N der Anzahl aller auf der Station überhaupt eingeschnittenen Richtungen gleich ist, findet dagegen aber leicht, dass die Anzahl der Bedingungen, die im vorvor. Art. eingeführt wurden, um Eins kleiner ist, wie diese Richtungen, und hieraus folgt, dass Eine der Grössen N, N', N'', etc. willkührlich bleibt. Wenn man diesen Umstand zweckmässig benutzt, so ergiebt sich eine sehr einfache Auflösung unserer Aufgabe.

5.

Sei von nun an

$$N = 0$$

und in Folge dessen

$$\begin{array}{ll} (aa) = Q - (pp) , & (bb)' = Q' - (p'p') \\ (ab) = \quad - (pp') , & (bc)' = \quad - (p'p'') \\ (ac) = \quad - (pp'') , & (bd)' = \quad - (p'p''') \\ (ad) = \quad - (pp''') , & \text{etc.} \end{array}$$

etc.

$$\begin{array}{ll} (al) = (lx) , & (bl) = (lx') \\ \hline (cc)' = Q'' - (p''p'') , & (dd)' = Q''' - (p'''p''') \\ (cd)' = \quad - (p''p''') , & \text{etc.} \\ \text{etc.} & (dl) = (lx''') \\ (cl) = (lx'') & \hline \\ \hline & \text{etc.} \end{array}$$

worauf

$$\begin{array}{ll} (bb) = (bb)' + N'^2 , & (cc) = (cc)' + N''^2 \\ (bc) = (bc)' + N'N'' , & (cd) = (cd)' + N''N''' \\ (bd) = (bd)' + N'N''' , & \text{etc.} \\ \text{etc.} & \hline \\ \hline & (dd) = (dd)' + N'''^2 \\ & \text{etc.} \end{array}$$

etc. werden, während der Ausdruck für (ll) unverändert bleibt. Setzt man nun diese letzteren Ausdrücke in die Gleichungen (A), so erhält man

$$\begin{array}{l} N'N'' = - (bc)' - (ac)\alpha' = - (bc,1)' \\ N'N''' = - (bd)' - (ad)\alpha' = - (bd,1)' \\ N'N'' = - (be)' - (ae)\alpha' = - (be,1)' \\ \text{etc.} \\ N''N''' = - (cd)' - (ad)\beta' = - (cd,1)' \end{array}$$

wenn

$$\begin{array}{l} (bc,1)' = (bc)' + (ac)\alpha' \\ (bd,1)' = (bd)' + (ad)\alpha' \\ (be,1)' = (be)' + (ae)\alpha' \\ \text{etc.} \\ (cd,1)' = (cd)' + (ad)\beta' \\ (ce,1)' = (ce)' + (ae)\beta' \\ \text{etc.} \\ (de,1)' = (de)' + (ae)\gamma' \\ \text{etc.} \\ \text{etc.} \end{array}$$

gesetzt wird. Bestimmt man nun die N', N'', etc. so dass

$$N' = \sqrt{-\frac{(bc,1)'\,(bd,1)'}{(cd,1)}} \qquad N'' = -\frac{(be,1)'}{N'}$$

$$N'' = \sqrt{-\frac{(bc,1)'\,(cd,1)'}{(bd,1)'}} \qquad \text{etc.}$$

$$N''' = \sqrt{-\frac{(bd,1)'\,(cd,1)'}{(bc,1)'}}$$

werden, so erhält man sogleich

$$\begin{aligned}
(bb,1) &= (bb,1)' + N'^2\\
(bc,1) &= 0\\
(bd,1) &= 0\\
(be,1) &= 0\\
&\text{etc.}\\
(cc,1) &= (cc,1)' + N''^2\\
(cd,1) &= 0\\
(ce,1) &= (ce,1)' + N''N'''\\
&\text{etc.}\\
(dd,1) &= (dd,1)' + N'''^2\\
(de,1) &= (de,1)' + N'''N''\\
&\text{etc.}\\
(ee,1) &= (ee,1)' + N''^2\\
&\text{etc.}\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

wo die $(bb,1)'$, $(cc,1)'$, etc. eben so zu berechnen sind, wie die übrigen, ähnlich bezeichneten, Grössen, und die Berechnung der $(bl,1)$, $(cl,1)$, etc. unverändert so ausgeführt wird, wie im § 4 der Abhandlung angegeben ist. Hiemit ist die Aufgabe schon vollständig gelöst, und vorausgesetzt, dass man den wahrscheinlichsten Werth der überzähligen Richtung nicht kennen zu lernen braucht, wird der weitere Verlauf der Auflösung genau so durchgeführt, wie im § 6 bei dem «ersten Verfahren» gezeigt worden ist. In dem Falle, dass man auch den wahrscheinlichsten Werth der überzähligen Richtung kennen lernen will, kommt eine kleine Rechnung hinzu, die weiter unten erklärt werden wird.

6.

Dass im ersten Theile der Auflösung die überzählige Richtung nicht weiter eintritt, ist an sich klar, aber dass sie im zweiten Theile der Auflösung gar nicht eintritt, muss besonders gezeigt werden. Da in Folge der Coefficienten, die oben gleich Null gemacht worden sind, auch

$$\beta'' = \gamma'' = \delta'' = \text{etc.} = \gamma''' = 0$$

werden, so nehmen die allgemeinen Ausdrücke der $\eta(r,I)_s$, $\eta(r,II)_s$, etc. die folgende Form an

$$\begin{aligned}
\eta(a,I)_s &= q(a,I)_s \\
\eta(b,I)_s &= \alpha'.q(a,I)_s + q(b,I)_s \\
\eta(c,I)_s &= \alpha''.q(a,I)_s + q(c,I)_s \\
\eta(d,I)_s &= \alpha'''.q(a,I)_s + q(d,I)_s \\
\eta(e,I)_s &= \alpha^{IV}.q(a,I)_s + \gamma''.q(c,I)_s + \delta''.q(d,I)_s + q(e,I) \\
&\quad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

die durch Vertauschung der I mit der II, III, etc. nach und nach auf alle Bedingungsgleichungen auszudehnen sind. Da aber die Richtung a eine überzählige ist, die mit dem Dreiecksnetze in keiner Verbindung steht, so sind immer die Differentialquotienten

$$q(a,I)_s = q(a,II)_s = q(a,III)_s = \text{etc.} = 0$$

und streicht man demzufolge die betreffenden Glieder aus den vorstehenden Ausdrücken weg, so werden erstlich

$$\eta(a,I)_s = \eta(a,II)_s = \eta(a,III)_s = \text{etc.} = 0$$

und aus den übrigen Grössen dieser Gattung verschwindet Alles, was von der überzähligen Richtung abhängt, indem γ'', δ'', etc. etc. von den α', α'', α''', etc. unabhängig sind. Da somit die $\eta(r,I)_s$, $\eta(r,II)_s$, etc. von der überzähligen Richtung unabhängig sind, so sind die $f(r,I)_s$, $f(r,II)_s$, etc. und die Coefficienten der Endgleichungen es auch, und der ganze zweite Theil der Auflösung ist demnach von der überzähligen Richtung unabhängig. W. z. b. w.

7.

Zur leichteren Uebersicht sollen jetzt die im Vorhergehenden entwickelten Ausdrücke in die im § 6 der Abhandlung angewandte Bezeichnung übersetzt, und ausführlich angeführt werden. Die überzählige Richtung werde ich mit a bezeichnen, während wie a. a. O. die übrigen Richtungen mit den fortlaufenden Zahlen 1, 2, 3, etc. bezeichnet werden. Die Hülfsgrössen α', β', γ', etc., die von der überzähligen Richtung abhängen, sollen um sie von den übrigen ähnlichen zu unterscheiden mit a', b', c', etc. bezeichnet, und hierauf mit α', β', etc. β'', γ'', etc. γ''', δ''', etc etc. fortgefahren werden. Da endlich $N = 0$ ist, so werde ich auch N statt N', N' statt N'', etc. schreiben. Es sind nun erst zu berechnen

$$(aa) = Q - (pp), \quad (bb) = Q' - (p'p')$$
$$(ab) = \quad - (pp'), \quad (bc) = \quad - (p'p'')$$
$$(ac) = \quad - (pp''), \quad (bd) = \quad - (p'p''')$$
$$(ad) = \quad - (pp'''), \qquad \text{etc.}$$
$$\text{etc.} \qquad (bl) = (lx')$$
$$(al) = (lx) \quad ,$$

$$(cc) = Q'' - (p''p''), \quad (dd) = Q''' - (p'''p''')$$
$$(cd) = \quad - (p''p'''), \qquad \text{etc.}$$
$$\text{etc.} \qquad (dl) = (lx''')$$
$$(cl) = (lx'') \quad ,$$

u. s. w. so wie (ll) wie vorher zu berechnen. Hierauf rechne man

$$a' = -\frac{(ab)}{(aa)}, \quad b' = -\frac{(ac)}{(aa)}, \quad c' = -\frac{(ad)}{(aa)}, \text{ etc. } \chi^{(a)} = -\frac{(al)}{(aa)}$$

$$(bb,1) = (bb) + (ab)a'$$
$$(bc,1) = (bc) + (ac)a'$$
$$(bd,1) = (bd) + (ad)a'$$
$$\text{etc.}$$
$$(bl,1) = (bl) + (al)a'$$

$$(cc,1) = (cc) + (ac)b'$$
$$(cd,1) = (cd) + (ad)b'$$
$$\text{etc.}$$
$$(cl,1) = (cl) + (al)b'$$

$$(dd,1) = (dd) + (ad)c'$$
$$\text{etc.}$$
$$(dl,1) = (dl) + (al)c'$$

etc. bis

$$(ll,a) = (ll) + (al)\chi^{(a)}$$

Man sieht, dass diese Ausdrücke die erste Abtheilung der bekannten Auflösung der Gleichungen bilden, auf die die Methode der kleinsten Quadrate immer hinführt. Hierauf ist zu berechnen

$$M = \sqrt{-(bc,1)(bd,1)(cd,1)}$$
$$N = -\frac{M}{(cd,1)} \qquad N''' = -\frac{(be,1)}{N}$$
$$N' = -\frac{M}{(bd,1)} \qquad N'' = -\frac{(bf,1)}{N}$$
$$N'' = -\frac{M}{(bc,1)} \qquad \text{etc.}$$

worauf sich die folgenden Ausdrucke ergeben,

$$(1,1) = (bb,1) + N^2 \quad , \quad (2,2,1) = (cc,1) + N'^2$$
$$(1,2) = 0 \qquad\qquad (2,3,1) = 0$$
$$(1,3) = 0 \qquad\qquad (2,4,1) = (ce,1) + N'N'''$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$
$$(1,l) = (bl,1) \quad , \quad (2,l,1) = (cl,1)$$

$$(3,3,2) = (dd,1) + N''^2 \quad , \quad (4,4,1) = (ee,1) + N'''^2$$
$$(3,4,2) = (de,1) + N''N''' \quad , \quad \text{etc.}$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad (4,l,1) = (el,1)$$
$$(3,l,2) = (dl,1) \quad ,$$

u. s. w. wenn mehr Richtungen vorhanden sind. Mit diesen Coefficienten wird nun die fernere Rechnung bis an das Ende derselben genau so ausgeführt wie im § 6 bei dem ersten Verfahren beschrieben worden ist. In Bezug auf die Bezeichnung ist die einzige Bemerkung zu machen, dass man statt des a. a. O. vorkommenden Ausdrucks

$$(ll,1) = (ll) + (1,l)\chi'$$

jetzt

$$(ll,1) = (ll,a) + (1,l)\chi'$$

schreiben muss.

8.

Wenn man auch den wahrscheinlichsten Werth der überzähligen Richtung kennen lernen will, so dienen dazu die folgenden Ausdrücke. Man rechne zuerst

$$a' = a'$$
$$a'' = b'$$
$$a''' = c'$$
$$a^{IV} = d' + \gamma'' a'' + \gamma''' a'''$$
$$a^{V} = e' + \delta'' a'' + \delta''' a''' + \delta^{IV} a^{IV}$$
$$\text{etc.}$$

worauf man

$$-w(a) = \chi^{(a)} + \chi' a' + \chi'' a'' + \chi''' a''' + \chi^{IV} a^{IV} + \chi^{V} a^{V} + \ldots$$

erhält. Setzt man ferner

$$f(a,I)_s = a'Q(1,I)_s + a''Q(2,I)_s + a'''Q(3,I)_s + a^{IV}Q(4,I)_s + \ldots$$

und demgemäss für alle übrigen vorhandenen Bedingungsgleichungen, so ergiebt sich

$$z(a) = f(a,I)_3(I) + f(a,II)_3(II) + f(a,III)_3(III) + \ldots$$

wo wieder (I), (II), (III), etc. die Werthe der Unbekannten der Endgleichungen bezeichnen. Nennt man endlich wieder (a) den vorläufigen Werth, den man im ersten Anfange der Rechnung für die überzählige Richtung angenommen hat, so wird der wahrscheinlichste Werth derselben

$$x(a) = (a) + w(a) - z(a) .$$

9.

Nehmen wir nun an, dass auf irgend einer Station zwei überzählige Richtungen eingeschnitten worden sind, so folgt die Auflösung dieser Aufgabe so einfach aus der vorhergehenden, sich auf Eine solche Richtung beziehenden, dass sie ohne Weiteres hingeschrieben werden kann. Man setze zuerst die beiden überzähligen Richtungen allen andern voran, und mache wie in der vorhergehenden Aufgabe

$$\begin{array}{llll}
(aa) = Q - (pp), & (bb) = Q' - (p'p') \\
(ab) = \quad - (pp'), & (bc) = \quad - (p'p'') \\
(ac) = \quad - (pp''), & (bd) = \quad - (p'p''') \\
(ad) = \quad - (pp'''), & \text{etc.} \\
\text{etc.} & \\
(al) = (lx) & , \quad (bl) = (lx') \\
\hline
(cc) = Q'' - (p''p''), & (dd) = Q''' - (p'''p''') \\
(cd) = \quad - (p''p'''), & \text{etc.} \\
\text{etc.} & \\
(cl) = (lx'') & , \quad (dl) = (lx''') \\
\hline
\end{array}$$

u. s. w. und rechne auch (ll) wie immer. Hierauf berechne man die zwei ersten Abtheilungen der bekannten Auflösung, nemlich

$$a' = -\frac{(ab)}{(aa)}, \quad b' = -\frac{(ac)}{(aa)}, \quad c' = -\frac{(ad)}{(aa)}, \text{ etc. } \chi^{(a)} = -\frac{(al)}{(aa)}$$

$$\begin{array}{l}
(bb,1) = (bb) + (ab)a' \\
(bc,1) = (bc) + (ac)a' \\
(bd,1) = (bd) + (ad)a' \\
\text{etc.} \\
(bl,1) = (bl) + (al)a' \\
\hline
(cc,1) = (cc) + (ac)b'
\end{array}$$

$$(cd,1) = (cd) + (ad)b'$$

etc.

$$(cl,1) = (cl) + (al)b'$$

$$(dd,1) = (dd) + (ad)c'$$

etc.

$$(dl,1) = (dl) + (al)c'$$

etc. bis

$$(ll,a) = (ll) + (al)\chi^{(a)}$$

$$b'' = -\frac{(bc,1)}{(bb,1)},\quad c'' = -\frac{(bd,1)}{(bb,1)},\quad \text{etc.}\quad \chi^{(b)} = -\frac{(bl,1)}{(bb,1)}$$

$$(cc,2) = (cc,1) + (bc,1)b''$$

$$(cd,2) = (cd,1) + (bd,1)b''$$

etc.

$$(cl,2) = (cl,1) + (bl,1)b''$$

$$(dd,2) = (dd,1) + (bd,1)c''$$

etc.

$$(dl,2) = (dl,1) + (bl,1)c''$$

etc. bis

$$(ll,b) = (ll,a) + (bl,1)\chi^{(b)}$$

Hierauf werden

$$M = \sqrt{-(cd,2)\,(ce,2)\,(de,2)}$$

$$N = -\frac{M}{(de,2)} \qquad N''' = -\frac{(cf,2)}{N}$$

$$N'' = -\frac{M}{(ce,2)} \qquad N^{IV} = -\frac{(cg,2)}{N}$$

$$N'' = -\frac{M}{(cd,2)} \qquad \text{etc.}$$

berechnet, worauf man

$$(1,1) = (cc,2) + N^2\,, \qquad (2,2,1) = (dd,2) + N'^2$$

$$(2,4,1) = (df,2) + N'N'''$$

$$(2,5,1) = (dg,2) + N'N^{IV}$$

etc.

$$(1,l) = (cl,1)\,, \qquad (2,l,1) = (dl,2)$$

$$(3,3,2) = (ee,2) + N''^2\,, \qquad (4,4,1) = (ff,2) + N'''^2$$

$$(3,4,2) = (ef,2) + N''N'''\,, \qquad (4,5,1) = (fg,2) + N'''N^{IV}$$

$$(3,5,2) = (eg,2) + N''N^{IV}\,,$$

etc.

$$(3,l,2) = (el,2)$$

etc.

$$(4,l,1) = (fl,2)$$

$$(5,5,1) = (gg,2) + N^{IV2}$$

etc.

$$(5,l,1) = (gl,2)$$

u. s. w. erhält. Mit diesen Coefficienten ist wieder die fernere Rechnung bis an das Ende derselben genau so auszuführen, wie im § 6 der Abhandlung bei dem ersten Verfahren beschrieben worden ist. Nur muss wieder statt des dort befindlichen Ausdrucks

$$(ll,1) = (ll) + (1,l)\chi'$$

jetzt

$$(ll,1) = (ll,b) + (1,l)\chi'$$

geschrieben werden.

10.

Wenn auch die wahrscheinlichsten Werthe der beiden überzähligen Richtungen zur Kenntniss gebracht werden sollen, so sind im gegenwärtigen Falle die folgenden Ausdrücke anzuwenden. Zuerst

$$\begin{array}{l}
a' = a' \\
\hline
a'' = b' + b''a' \\
b'' = \quad b'' \\
\hline
a''' = c' + c''a' \\
b''' = \quad c'' \\
\hline
a'' = d' + d''a' \\
b'' = \quad d'' \\
\hline
a^{v} = e' + e''a' + \gamma''a''' + \gamma'''a'' \\
b^{v} = \quad e'' + \gamma''b''' + \gamma'''b'' \\
\hline
a^{vi} = f' + f''a' + \delta''a''' + \delta'''a'' + \delta''a^{v} \\
b^{vi} = \quad f''' + \delta''b''' + \delta'''b'' + \delta''b^{v} \\
\hline
\text{etc.}
\end{array}$$

woraus

$$-w(a) = \chi^{(a)}a' + \chi^{(b)}a' + \chi'a'' + \chi''a''' + \chi'''a'' + \chi''a^{v} + \chi^{v}a'' + \ldots$$
$$-w(b) = \qquad \chi^{(b)} + \chi'b'' + \chi''b''' + \chi'''b'' + \chi''b^{v} + \chi^{v}b'' + \ldots$$

hervorgehen. Ferner

$$f(a,I)_s = a''Q(1,I)_s + a'''Q(2,I)_s + a''Q(3,I)_s + a^{v}Q(4,I)_s + a^{vi}Q(5,I)_s + \ldots$$
$$f(b,I)_s = b''Q(1,I)_s + b'''Q(2,I)_s + b''Q(3,I)_s + b^{v}Q(4,I)_s + b^{vi}Q(5,I)_s + \ldots$$

und demgemäss für alle übrigen Bedingungsgleichungen. Endlich

$$z(a) = f(a,I)_s(I) + f(a,II)_s(II) + f(a,III)_s(III) + \ldots$$
$$z(b) = f(b,I)_s(I) + f(b,II)_s(II) + f(b,III)_s(III) + \ldots$$

nebst den wahrscheinlichsten Werthen

$$x(a) = (a) + w(a) - z(a)$$
$$x(b) = (b) + w(b) - z(b)$$

wenn wieder (a) und (b) die beim ersten Anfang der Rechnungen diesen Richtungen beigelegten vorläufigen Werthe bedeuten.

11.

Die Fälle, in welchen auf einer Station drei oder mehr überzählige Richtungen eingeschnitten worden sind, brauchen nun nicht weiter erörtert zu werden, da das in denselben einzuhaltende Verfahren sehr leicht aus den zwei behandelten Fällen sich ergiebt. Höchstens kann die Ausdehnung der Berechnung der a'', b'', etc. auf drei oder mehr Richtungen eine kleine Schwierigkeit verursachen, und ich will daher diese Ausdrücke auf drei Richtungen ausgedehnt hier zum Ueberfluss anführen.

$$
\begin{aligned}
a' &= a' \\
a'' &= b' + b''a' \\
b'' &= \quad b'' \\
a''' &= c' + c''a' + c'''a'' \\
b''' &= \quad c'' + c'''b'' \\
c''' &= \quad\quad c''' \\
a^{IV} &= d' + d''a' + d'''a'' \\
b^{IV} &= \quad d'' + d'''b'' \\
c^{IV} &= \quad\quad d''' \\
a^{V} &= e' + e''a' + e'''a'' \\
b^{V} &= \quad e'' + e'''b'' \\
c^{V} &= \quad\quad e''' \\
a^{VI} &= f' + f''a' + f'''a'' + \gamma''a' + \gamma'''a' \\
b^{VI} &= \quad f'' + f'''b'' + \gamma''b^{V} + \gamma'''b' \\
c^{VI} &= \quad\quad f''' + \gamma''c^{V} + \gamma'''c^{V} \\
a^{VII} &= g' + g''a' + g'''a'' + \delta''a^{IV} + \delta'''a^{V} + \delta^{IV}a^{VI} \\
b^{VII} &= \quad g'' + g'''b'' + \delta''b^{IV} + \delta'''b^{V} + \delta^{IV}b^{VI} \\
c^{VII} &= \quad\quad g''' + \delta''c^{IV} + \delta'''c^{V} + \delta^{IV}c^{VI}
\end{aligned}
$$

etc.

Vergleicht man diese Ausdrücke mit denen, die oben für zwei und eine überzähligen Richtungen gegeben worden sind, so findet man leicht die Ausdrücke für vier und mehr dieser Richtungen.

12.

Um die vorhergehenden Entwickelungen durch ein Beispiel zu erläutern, soll die erste Station des Hauptbeispiels der Abhandlung dienen,

auf welcher zwei überzählige Richtungen vorkommen. Setzt man diese jetzt voran, so steht das Täfelchen für die (pp), (pp'), etc. wie folgt

$r =$	(a)	(b)	(1)	(2)	(3)	(4)
	p	p'	p''	p'''	p^{IV}	p^{V}
p	20.4167	12.0833	3.75	2.6667	7.75	5.3333
p'		20.75	1.4167	1.3333	9.9167	5.5
p''			6.5833	4.5	0.75	0
p'''				6.0	1.5	0
p^{IV}					14.0833	2.0
p^{V}						10.1667
Q	52	51	17	16	36	23
(lx)	+ 15″.983	− 22″.704	− 9″.220	+ 13″.523	+ 6″.742	− 4″.323

Hiemit bekommt man zuerst

$(aa) = 31.5833$

$(ab) = -12.0833$, $(bb) = 30.25$

$(ac) = -3.75$, $(bc) = -1.4167$, $(cc) = 10.4167$

$(ad) = -2.6667$, $(bd) = -1.3333$, $(cd) = -4.5$

$(ae) = -7.75$, $(be) = -9.9167$, $(ce) = -0.75$

$(af) = -5.3333$, $(bf) = -5.5$, $(cf) = 0$

$(al) = +15''.983$, $(bl) = -22''.704$, $(cl) = -9''.220$

$(dd) = 10.0$

$(de) = -1.5$, $(ee) = 21.9167$

$(df) = 0$, $(ef) = -2.0$, $(ff) = 12.8333$

$(dl) = +13''.523$, $(el) = +6''.742$, $(fl) = -4''.323$

und wie in der Abhandlung

$$(ll) = 174.367$$

Die Ausdrücke des Art. 9 geben nun hiemit

$a' = (9.58273)$, $b' = (9.07459)$, $c' = (8.92651)$

$d' = (9.38984)$, $e' = (9.22754)$, $\chi^{(a)} = -(9.70420)$

wo, wie immer, die in Klammern eingeschlossenen Zahlen die Logarithmen sind. Ferner

$(bb,1) = 25.6270$

$(bc,1) = -2.8514$, $(cc,1) = 9.9714$,

$(bd,1) = -2.3535$, $(cd,1) = -4.8166$, $(dd,1) = 9.7748$

$(be,1) = -12.8818$, $(ce,1) = -1.6702$, $(de,1) = -2.1544$

$(bf,1) = -7.5405$, $(cf,1) = -0.6333$, $(df,1) = -0.4503$

$(bl,1) = -16''.5891$, $(cl,1) = -7''.3222$, $(dl,1) = +14''.8725$

$(ee,1) = \quad 20.0150$

$(ef,1) = -\ 3\ 3087\ ,\ (ff,1) = \quad 11.9327$

$(el,1) = +\ 10''.6639\ ,\ (fl,1) = -\ 1''.6240\ ,\ (ll,a) = 166\ 279$

$b'' = (9.04636)\ ,\ c'' = (8.96301)\ ,\ d'' = (9.70129)$

$e'' = (9.46870)\ ,\ \chi^{(b)} = (9.81112)$

$(cc,2) = \quad 9.6541$

$(cd,2) = -\ 5.0785\ ,\ (dd,2) = \quad 9.5587$

$(ce,2) = -\ 3.1035\ ,\ (de,2) = -\ 3.3374\ ,\ (ee,2) = \quad 13.5397$

$(cf,2) = -\ 1.4723\ ,\ (df,2) = -\ 1.1428\ ,\ (ef,2) = -\ 7.0990$

$(cl,2) = -\ 9''.1679\ ,\ (dl,2) = +\ 13''.3491\ .\ (el,2) = +\ 2''.3253$

$(ff,2) = \quad 9.7141$

$(fl,2) = -\ 6''.5049\ .\ (ll,b) = 155.541$

Die Rechnung für die N, N', etc. steht nun vollständig so

$$\begin{aligned} -(cd,2) &= (0.70574) \\ -(ce,2) &= (0.49185) \\ -(de,2) &= (0.52341) \\ &\overline{1.72100} \\ M &= (0.86050) \\ N &= (0.33709) \\ N' &= (0.36865) \qquad -(cf,2) = (0.16800) \\ N'' &= (0.15476) \qquad N = (0.33709) \\ N''' &= (9.83091) \qquad \ldots\ldots\ldots\ 9.83091 \end{aligned}$$

und hieraus

$N^2 = \quad 4.7225$

$NN' = +5.0785, \quad N'^2 = \quad 5.4614$

$NN'' = +3.1035, \ N'N'' = +3.3374, \quad N''^2 = \quad 2.0395$

$NN''' = +1.4723, \ N'N''' = +1.5833, \ N''N''' = +0.9675, \ N'''^2 = 0.4590$

womit die Werthe

$(1,1) = \quad 14.3766\ ,\ (2,2,1) = \quad 15.0201$

$(3,3,2) = \quad 15.5792$

$(2,4,1) = +\ 0.4405\ ,\ (3,4,2) = -\ 6.1315$

$(1,l) = -\ 9''.1679\ ,\ (2,l,1) = +13''.3491\ ,\ (3,l,2) = +\ 2''.3253$

$(4,4,1) = \quad 10.1731$

$(4,l,1) = -\ 6''.5049\ ,\ (ll,b) = 155.541$

erhalten werden, auf welche die betr. Ausdrücke des § 6 anzuwenden sind. Diese geben

$$\chi' = (9.80461)\,,\ (ll,1) = 149.695$$
$$\gamma'' = -(8.46728)\,,\ \chi'' = -(9.94878)$$
$$(4,4,2) = 10.1602$$
$$(4,l,2) = -6''.8964\,,\ (ll,2) = 137.831$$
$$\gamma''' = (9.59501)\,,\ \chi''' = -(9.17404)$$
$$(4,4,3) = 7.7471$$
$$(4,l,3) = -5''.9810\,,\ (ll,3) = 137.484$$
$$\chi'' = (9.88763)$$
$$(ll,4) = 132.866$$

Dieser Werth von $(ll,4)$, welcher mit dem von $(ll,6)$ des Art. 84 identisch sein muss, stimmt mit diesem so nahe überein, wie die Ausdehnung der angewandten Logarithmen es gestattet. Es wird nun ferner durch die oben angezogenen Ausdrücke

$$w(1) = -0''.6377$$
$$w(2) = +0.9114$$
$$w(3) = -0.1545$$
$$w(4) = -0.7720$$

und diese müssen vor Allem der Bedingungsgleichung

$$Nw(1) + N'w(2) + N''w(3) + N'''w(4) = 0$$

gnügen. Man findet

$$N = (0.3371)\,,\ N' = (0.3687),\ N'' = (0.1548)\,,\ N''' = (9.8309)$$
$$w(1) = (9.8046n), w(2) = (9.9597),\ w(3) = (9.1889n),\ w(4) = (9.8876n)$$

und die vier Producte werden

$$-1''.386$$
$$+2.130$$
$$-0.221$$
$$-0.523$$
$$\text{Sa.} = 0.000$$

Zweitens müssen die Unterschiede der w mit denen des Art. 84 der Abhandlung übereinstimmen, und die Vergleichung zeigt, dass dieses auch der Fall ist.

13.

Zur Ausführung des zweiten Theils der Auflösung sind nun aus den vorhergehenden Rechnungen zu entlehnen,

$$(1,1) = (1.15766) \quad \beta''' = -(8.46728)$$
$$(2,2,1) = (1.17667) \quad \gamma''' = +(9.59501)$$
$$(3,3,2) = (1.19255)$$
$$(4,4,3) = (0.88914)$$

nebst den Differentialquotienten der Bedingungsgleichungen des Dreiecksnetzes, oder den $q(r,I)_1$, $q(r,II)_1$, etc., deren Werthe man im Art. 93 der Abhandlung findet. Die betr. im § 6 zusammengestellten Ausdrücke gaben,

r	s	$\log\eta(r,I)_1$	$\log\eta(r,II)_1$	$\log\eta(r,III)_1$	$\log\eta(r,IV)_1$	$\log\eta(r,V)_1$	$\log\eta(r,VI)_1$
1	1	0.	0. n	—	—	0.46280n	9.99860n
2		—	0.	0. n	—	9.81470	—
3		0. n	—	—	0.	—	9.28926
4		9.59501n	8.46728n	0.01257	9.78297n	9.89376	9.94385

r	s	$\log Q(r,I)_1$	$\log Q(r,II)_1$	$\log Q(r,III)_1$	$\log Q(r,IV)_1$	$\log Q(r,V)_1$	$\log Q(r,VI)_1$
1	1	8.84234	8.84234n	—	—	9.00514n	8.84094n
2		—	8.82333	8.82333n	—	8.63803	—
3		8.80745n	—	—	8.80745n	—	8.09671
4		8.70587n	7.57814n	9.12343	8.89365n	9.00462	9.05471

r	s	$\log f(r,I)_1$	$\log f(r,II)_1$	$\log f(r,III)_1$	$\log f(r,IV)_1$	$\log f(r,V)_1$	$\log f(r,VI)_1$
1	1	8.84234	8.84234n	—	—	9.00514n	8.84094n
2		7.17345	8.82406	8.84803n	7.36093	8.60735	7.32199n
3		8.92521n	7.17345n	8.71844	8.52349	8.59963	8.75690
4		8.70587n	7.57814n	9.12343	8.89365n	9.00462	9.05471

Aus der Verbindung der q mit diesen Werthen der f ergiebt sich der folgende Beitrag, den die Station (1) jetzt zu den Coefficienten der Endgleichungen liefert, dem ich die einzelnen Glieder, aus welchen er besteht, hinzufüge. Ich füge diesen ferner noch eine Abschrift der bez. Glieder hinzu, die zu den in der Abhandlung gegebenen Werthen gehören, damit man die neuen mit den alten Werthen vergleichen kann. Die oberen Abtheilungen der folgenden Tafel enthalten die neuen, und die unteren Abtheilungen die alten Werthe dieser Glieder.

r	s	logg.	(I,I)	logg.	(I,II)	logg.	(I,III)
1	1	8.84234	0.06955	8.84234n	−0.06955	—	—
2		—	—	—	—	—	—
3		8.92521	0.08418	7.17315	+0.00149	8.71844n	−0.05229
4		—	—	—	—	—	—
			0.15373		−0.06806		−0.05229
1	1	8.89734	0.07893	8.89734n	−0.07894	—	—
2		—	—	—	—	—	—
3		8.87386	0.07480	8.03663	+0.01088	8.71846n	−0.05229
4		—	—	—	—	—	—
			0.15373		−0.06806		−0.05229

r	s	logg.	(I,IV)	logg.	(I,V)	logg.	(I,VI)
1	1	—	—	9.00514n	−0.10119	8.84094n	−0.06933
2		—	—	—	—	—	—
3		8.52349n	−0.03338	8.59963	−0.03977	8.75690n	−0.05714
4		—	—	—	—	—	—
			−0.03338		−0.14096		−0.12647
1		—	—	9.06014n	−0.11485	8.89594n	−0.07868
2		—	—	—	—	—	—
3		8.52349n	−0.03338	8.41694n	−0.02612	8.67923n	−0.04778
4		—	—	—	—	—	—
			−0.03338		−0.14097		−0.12646

r	s	logg.	(II,II)	logg.	(II,III)	logg.	(II,IV)
1	1	8.84234	0.06955	—	—	—	—
2		8.82406	0.06670	8.84803n	−0.07047	7.36093	+0.00230
3		—	—	—	—	—	—
4		—	—	—	—	—	—
			0.13625		−0.07047		+0.00230
1	1	8.89734	0.07894	—	—	—	—
2		8.75814	0.05729	8.84805n	−0.07047	7.36078	+0.00230
3		—	—	—	—	—	—
4		—	—	—	—	—	—
			0.13623		−0.07047		+0.00230

r	s	logg.	(II,V)	logg.	(II,VI)	logg.	(III,III)
1	1	9.00514	+0.10119	8.84094	+0.06933	—	—
2		8.60735	+0.04049	7.52199n	−0.00333	8.84803	0.07047
3		—	—	—	—	—	—
4		—	—	—	—	9.12342	0.13287
			+0.14168		+0.06600		0.20334

1	1	9.06014	+0.11485	8.89594	+0.07868	—	—
2		8.42862	+0.02683	8.10332*n*	−0.01268	8.84805	0.07047
3		—	—	—	—	—	—
4		—	—	—	—	9.12342	0.13287
			+0.14168		+0.06600		0.20334

r	*s*	logg.	(*III*,*IV*)	logg.	(*III*,*V*)	logg.	(*III*,*VI*)
1	1	—	—	—	—	—	—
2		7.36093*n*	−0.00230	8.60735*n*	−0.04049	7.52199	+0.00333
3		—	—	—	—	—	—
4		8.83965*n*	−0.06913	9.00462	+0.10107	9.05471	+0.11343
			−0.07143		+0.06058		+0.11676
1	1	—	—	—	—	—	—
2		7.36078*n*	−0.00230	8.42862*n*	−0.02683	8.10332	+0.01268
3		—	—	—	—	—	—
4		8.89364*n*	−0.06913	8.94156	+0.08741	9.01732	+0.10407
			−0.07143		+0.06058		+0.11675

r	*s*	logg.	(*IV*,*IV*)	logg.	(*IV*,*V*)	logg.	(*IV*,*VI*)
1	1	—	—	—	—	—	—
2		—	—	—	—	—	—
3		8.52349	0.03338	8.59963	+0.03977	8.75690	+0.05714
4		8.89365	0.07828	9.00462*n*	−0.10107	9.05471*n*	−0.11343
			0.11166		−0.06130		−0.05629
1	1	—	—	—	—	—	—
2		—	—	—	—	—	—
3		8.52349	0.03338	8.44694	+0.02612	8.67923	+0.04778
4		8.89364	0.07828	8.94156*n*	−0.08741	9.01732*n*	−0.10407
			0.11166		−0.06129		−0.05629

r	*s*	logg.	(*V*,*V*)	logg.	(*V*,*VI*)	logg.	(*VI*,*VI*)
1	1	9.16794	0.14721	9.00374	+0.10086	8.83954	0.06911
2		8.42205	0.02643	7.33669*n*	−0.00217	—	—
3		—	—	—	—	8.04616	0.01112
4		8.90886	0.08107	8.95895	+0.09098	8.95895	0.09098
			0.25471		+0.18967		0.17121
1	1	9.22294	0.16708	9.05874	+0.11448	8.89454	0.07844
2		6.24332	0.01754	7.91802*n*	−0.00828	—	—
3		—	—	—	—	7.96849	0.00930
4		8.84580	0.07044	8.92156	+0.08348	8.92156	0.08348
			0.25470		+0.18968		0.17122

Man erkennt hieraus, dass nach der neuen, hier ausgeführten Berechnung die Coefficienten der Endgleichungen unverändert dieselben bleiben, obgleich die einzelnen Glieder, aus welchen sie zusammenge-

setzt sind, grösstentheils sehr verschiedene Werthe haben. Die Unbekannten (*I*), (*II*), etc. dieser Gleichungen behalten daher jetzt auch noch dieselben Werthe, die im Art. 95 der Abhandlung gegeben sind. Verbindet man diese mit den oben gegebenen Werthen der f nach Anleitung des Art. 142, so bekommt man die folgenden Werthe der $z(r)$.

$$z(1) = + 0''.0937$$
$$z(2) = + 0.0603$$
$$z(3) = - 0.4529$$
$$z(4) = + 0.4460$$

Diese müssen zufolge des vorhergehenden Suppl. vor Allem der Gleichung

$$Nz(1) + N'z(2) + N''z(3) + N'''z(4) = 0$$

gnügen, und die numerische Rechnung bestätigt dieses. Denn es werden

$N = (0.3371)$, $N' = (0.3687)$, $N'' = (0.1548)$, $N''' = (9.8309)$
$z(1) = (8.9717)$, $z(2) = (8.7803)$, $z(3) = (9.6560n)$, $z(4) = (9.6493)$

und die einzelnen Glieder der vorstehenden Gleichung

$$+ 0''.2036$$
$$+ 0\ .1409$$
$$- 0\ .6469$$
$$+ 0\ .3021$$
$$\text{Sa.} = - 0\ .0003$$

welche Summe für Null zu achten ist. Die Unterschiede dieser Werthe der $z(r)$ müssen ferner mit den Unterschieden der in der Abhandlung im Art. 96 erhaltenen übereinstimmen, und die Vergleichung zeigt, dass dieses auch der Fall ist.

14.

Die Ausgleichung des betr. Dreiecksnetzes ist mit dem Vorhergehenden schon vollständig, auf die neue hier entwickelte Art, ausgeführt, ich werde aber um die betreffenden Ausdrücke zu erläutern, hier noch die wahrscheinlichsten Werthe der beiden überzähligen Richtungen berechnen. Durch die Ausdrücke des Art. 10 findet man

$$a' = (9.58273)$$
$$a'' = (9.20764), \quad b'' = (9.04634)$$
$$a''' = (9.07761), \quad b''' = (8.96300)$$
$$a'^{v} = (0.64116), \quad b'^{v} = (9.70124)$$
$$a^{v} = (9.65337), \quad b^{v} = (9.68960)$$

und hiemit, so wie mit den obigen Werthen der $\chi^{(a)}$, $\chi^{(b)}$, χ', etc.

$$w(a) = -\ 0''.0204$$
$$w(b) = -\ 0.9395$$

Der Unterschied dieser beiden, so wie die Unterschiede derselben mit den oben gefundenen Werthen der $w(1)$, $w(2)$, etc. müssen mit den Unterschieden der im Art. 84 der Abhandlung erhaltenen Werthe derselben Grössen übereinstimmen, und die Vergleichung zeigt, dass dieses auch der Fall ist.

Die Ausdrücke des Art. 10 geben ferner

r	s	$\log f(r,I)_s$	$\log f(r,II)_s$	$\log f(r,III)_s$	$\log f(r,IV)_s$	$\log f(r,V)_s$	$\log f(r,VI)_s$
a	1	8.5992n	7.6958n	8.7148	7.8539n	8.5362	8.6565
b		8.6935n	7.5412n	8.7701	7.7812n	8.6252	8.7330

und hiemit, so wie mit den Werthen der (I), (II), etc., die aus der Abhandlung zu nehmen sind, ergeben sich

$$z(a) = -\ 0''.0505$$
$$z(b) = -\ 0.0805$$

Der Unterschied dieser beiden, so wie die Unterschiede derselben mit den oben gefundenen Werthen der $z(1)$, $z(2)$, etc. müssen wieder mit den Unterschieden der im Art. 96 der Abhandlung erhaltenen Werthe derselben Grössen übereinstimmen, und man kann sich leicht überzeugen, dass dieses in der That der Fall ist.

Suppl. 5. Entwickelung eines besonderen Falles, in welchem die für die Ausgleichung auf der Station aufzulösenden Gleichungen sich in zwei oder mehrere, von einander völlig unabhängige Systeme zerlegen lassen.

1.

Wenn auf einer Station eine gewisse Anzahl der überhaupt beobachteten Richtungen in keinem Gyrus mit den übrigen Richtungen zugleich beobachtet worden ist, so ist von selbst klar, dass die Gleichungen, die für die Ausgleichung auf dieser Station aufzulösen sind, in zwei von einander unabhängige Systeme zerfallen müssen, und wenn auf derselben Station mehr solcher Lücken vorhanden sind, so müssen die genannten Gleichungen in mehr wie zwei von einander unabhängige

Systeme zerfallen. Um diese Fälle, die sich von selbst verstehen, handelt es sich aber hier nicht, sondern es soll gezeigt werden, dass die genannte Zerlegung sich auch auf den Stationen ausführen lässt, auf welchen eine gewisse Anzahl von Richtungen mit einer gewissen anderen Anzahl durch Eine, sowohl zugleich mit diesen wie mit jenen, beobachtete Richtung verbunden sind. Es wird dabei gezeigt werden, dass sich diese Zerlegung auf verschiedene Arten ausführen lässt.

2.

Es braucht nur der Fall der Zerlegung in zwei Systeme betrachtet zu werden, da die Behandlung der Fälle, wo mehr Zerlegungen möglich sind, daraus von selbst folgt. Die Richtung die mit allen anderen verbunden ist, will ich zuerst in der Reihenfolge voranstellen, und mit x bezeichnen, die übrigen eingeschnittenen Richtungen sollen mit x', x'', x''', etc. und $x_{,}$, $x_{,,}$, $x_{,,,}$, etc. bezeichnet und angenommen werden, dass die mit oben angehängten Strichen versehenen Richtungen mit denen, welchen die Striche unten angehängt worden sind, nicht zugleich beobachtet worden sind. Es können übrigens so viele verschiedenartige Gruppen von Gyris vorkommen, wie die Anzahl der Richtungen zulässt. Versieht man nun die Hülfsgrössen eben so mit oben und bez. unten angehängten Strichen, so findet man leicht, dass in dem hier in Betrachtung stehenden Falle die

$$\begin{aligned}
(p'p_{,}) &= (p'p_{,,}) = (p'p_{,,,}) = \text{etc.} = 0\\
(p''p_{,}) &= (p''p_{,,}) = (p''p_{,,,}) = \text{etc.} = 0\\
(p'''p_{,}) &= (p'''p_{,,}) = (p'''p_{,,,}) = \text{etc.} = 0\\
&\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

werden, und es werden daher, wenn das erste in der Abhandlung entwickelte Verfahren befolgt wird, die aufzulösenden Gleichungen die folgenden sein.

$$\begin{aligned}
&\{Q+N^2-(pp)\}x+\{NN' - (pp')\}x'+\{NN''-(pp'')\}x''+\{NN'''- (pp''')x''' \quad +\text{etc.}\\
&\qquad +\{NN_{,} - (pp_{,})\}x_{,}+\{NN_{,,}-(pp_{,,})\}x_{,,}+\{NN_{,,,}- (pp_{,,,})x_{,,,} \quad +\text{etc.}=(lx\\
&\{NN'-(pp')\}x+\{Q'+N'^2-(p'p')\}x'+\{N'N''-(p'p'')\}x''+\{N'N'''- (p'p''')x''' \quad +\text{etc.}\\
&\qquad + N'N_{,}x_{,} + N'N_{,,}x_{,,} + NN_{,,,}x_{,,,} \quad +\text{etc.}=(lx')\\
&\{NN''-(pp'')\}x+\{N'N' - (p'p'')\}x'+\{Q''+N''^2-(p''p'')\}x''+\{N''N'''-(p''p''')\}+\text{etc.}\\
&\qquad + N''N_{,}x_{,} + N''N_{,,}x_{,,} + N'N_{,,,}x_{,,,} \quad +\text{etc.}=(lx'')\\
&\{NN'''-(pp''')\}x+\{N'N''-(p'p''')\}x'+\{N''N'''-(p''p''')\}x''+\{Q'''+N'''^2-(p'''p''')\}x'''+\text{etc.}\\
&\qquad + N'''N_{,}x_{,} + N'''N_{,,}x_{,,} + N'''N_{,,,}x_{,,,} \quad +\text{etc.}=(lx''')\\
&\qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

$$\{NN_{,}-(pp_{,})\}x + N'N_{,}x' + N''N_{,}x'' + N'''N_{,}x''' + \text{etc.}$$
$$+\{Q_{,}+N_{,}^{2}-(p_{,}p_{,})\}x_{,}+\{N_{,}N_{,,}-(p_{,}p_{,,})\}x_{,,}+\{N_{,}N_{,,,}-(p_{,}p_{,,,})\}x_{,,,}+\text{etc.}=(lx_{,})$$
$$\{NN_{,,}-(pp_{,,})\}x+ N'N_{,,}x' + N''N_{,,}x'' + N'''N_{,,}x''' + \text{etc.}$$
$$+\{N_{,}N_{,,}-(p_{,}p_{,,})\}x_{,}+\{Q_{,,}+N_{,,}^{2}-(p_{,,}p_{,,})\}x_{,,}+\{N_{,,}N_{,,,}-(p_{,,}p_{,,,})\}x_{,,,}+\text{etc.}=(lx_{,,})$$
$$\{NN_{,,,}-(pp_{,,,})\}x+ N'N_{,,,}x' + N''N_{,,,}x'' + N'''N_{,,,}x''' + \text{etc.}$$
$$+\{N_{,}N_{,,,}-(p_{,}p_{,,,})\}x_{,}+\{N_{,,}N_{,,,}-(p_{,,}p_{,,,})\}x_{,,}+\{Q_{,,,}+N_{,,,}^{2}-(p_{,,,}p_{,,,})\}x_{,,,}+\text{etc.}=(lx_{,,,})$$
etc. etc.

3.

Um die eben erhaltenen Gleichungen in zwei von einander unabhängige Systeme zu zerlegen braucht man nur

$$NN_{,}=(pp_{,})\ ,\quad NN_{,,}=(pp_{,,})\ ,\quad NN_{,,,}=(pp_{,,,})\ ,\quad \text{etc.}$$
$$N'=0\ ,\quad N''=0\ ,\quad N'''=0\ ,\quad \text{etc.}$$

zu setzen, denn hiemit bekommt man sogleich

$$\{Q+N^{2}-(pp)\}x \quad -(pp')x' \quad -(pp'')x'' \quad -(pp''')x''' \quad +\text{etc.}=(lx)$$
$$-(pp')x \quad +\{Q'-(p'p')\}x' \quad -(p'p'')x'' \quad -(p'p''')x''' \quad +\text{etc.}=(lx')$$
$$-(pp'')x \quad -(p'p'')x' \quad +\{Q''-(p''p'')\}x'' \quad -(p''p''')x''' \quad +\text{etc.}=(lx'')$$
$$-(pp''')x \quad -(p'p''')x' \quad -(p''p''')x'' \quad +\{Q'''-(p'''p''')\}x''' \quad +\text{etc.}=(lx''')$$
etc. etc.

$$\{Q_{,}+N_{,}^{2}-(p_{,}p_{,})\}x_{,}+\{N_{,}N_{,,}-(p_{,}p_{,,})\}x_{,,}+\{N_{,}N_{,,,}-(p_{,}p_{,,,})\}x_{,,,}+\text{etc.}=(lx_{,})$$
$$\{N_{,}N_{,,}-(p_{,}p_{,,})\}x_{,}+\{Q_{,,}+N_{,,}^{2}-(p_{,,}p_{,,})\}x_{,,}+\{N_{,,}N_{,,,}-(p_{,,}p_{,,,})\}x_{,,,}+\text{etc.}=(lx_{,,})$$
$$\{N_{,}N_{,,,}-(p_{,}p_{,,,})\}x_{,}+\{N_{,,}N_{,,,}-(p_{,,}p_{,,,})\}x_{,,}+\{Q_{,,,}+N_{,,,}^{2}-(p_{,,,}p_{,,,})\}x_{,,,}+\text{etc.}=(lx_{,,,})$$
etc. etc.

Diese Gleichungen haben auch die allgemeine Form, die alle Gleichungen haben, auf welche die Methode der kleinsten Quadrate hinführt.

Die obigen Gleichungen für die Bestimmung der betr. N lassen die erste dieser Grössen, nemlich N unbestimmt, und man kann daher noch eine Bedingung einführen. Setzt man

$$N_{,}N_{,,}=(p_{,}p_{,,})$$

so werden wie im Allgemeinen, nachdem

$$M=\sqrt{(pp_{,})(pp_{,,})(p_{,}p_{,,})}$$

gesetzt worden ist,

$$N=\frac{M}{(p_{,}p_{,,})}\ ,\qquad N_{,,,}=\frac{(pp_{,,,})}{M}\ ,$$
$$N_{,}=\frac{M}{(pp_{,,})}\ ,\qquad \text{etc.}$$
$$N_{,,}=\frac{M}{(pp_{,})}\ ,$$

und das zweite System von Gleichungen nimmt die folgende Form an

$$\{Q_{,}+N_{,}^{2}-(p_{,}p_{,})\}x_{,} \qquad +\{N_{,}N_{,,}-(p_{,}p_{,,})\}x_{,,}+\text{etc.} = (lx_{,})$$
$$\{Q_{,,}+N_{,,}^{2}-(p_{,,}p_{,,})\}x_{,,}+\{N_{,}N_{,,}-(p_{,}p_{,,})\}x_{,}+\text{etc.} = (lx_{,,})$$
$$\{N_{,}N_{,,}-(p_{,}p_{,,})\}x_{,}+\{N_{,,}N_{,,}-(p_{,,}p_{,,})\}x_{,,}+\{Q_{,,}+N_{,,}^{2}-(p_{,,}p_{,,})\}x_{,,}+\text{etc.} = (lx_{,,})$$
$$\text{etc} \qquad\qquad \text{etc.}$$

welche auch mit der allgemeinen Form übereinstimmt. Ich bemerke hiezu noch, dass man durch dasselbe Verfahren auch die Zerlegung so bewirken kann, dass das eine System von Gleichungen die Unbekannten x, $x_{,}$, $x_{,,}$, $x_{,,,}$, etc. und das andere die x', x'', x''', etc. enthält. Man braucht zu dem Ende nur in den ersten allgemeinen Gleichungen die $x_{,}$, $x_{,,}$, $x_{,,,}$, etc. den x', x'', x''', etc. voran zu stellen.

4.

Um die Zerlegung in zwei Systeme auf eine andere Art auszuführen, werde ich der Richtung, die durchgängig beobachtet worden ist, den letzten Platz in der Reihenfolge der ersten Abtheilung von Richtungen anweisen, und diese daher so stellen,

$$x\ ,\ x'\ ,\ x''\ ,\ x'''\ ,\ \text{etc.}\ ,\ x^{(h-1)}$$

während die andere

$$x^{(h-1)}\ ,\ x_{,}\ ,\ x_{,,}\ ,\ x_{,,,}\ ,\ \text{etc.}$$

sein soll, und $x^{(h-1)}$ die durchgehends beobachtete Richtung bedeutet. Man kann jetzt die N ganz auf dieselbe Weise bestimmen, wie bei Anwendung des ersten Verfahrens der Abhandlung gezeigt worden ist, und ich will daher die Coefficienten in den allgemeinen, in der Abhandlung angewandten Zeichen ausdrücken. Da es leicht zu finden ist, dass nun immer

$$(pp_{,}) = (pp_{,,}) = (pp_{,,,}) = \text{etc.} = 0$$
$$(p'p_{,}) = (p'p_{,,}) = (p'p_{,,,}) = \text{etc.} = 0$$
$$(p''p_{,}) = (p''p_{,,}) = (p''p_{,,,}) = \text{etc.} = 0$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

werden, so sollen auch

$$N_{,} = N_{,,} = N_{,,,} = \text{etc.} = 0$$

gesetzt werden, welches stets unbeschadet der eben genannten Bestimmungsart der übrigen N geschehen kann, ja eigentlich von selbst daraus folgt. Die allgemeinen Gleichungen, die man hierauf bekommt, werden nun die folgenden sein.

$$
\begin{aligned}
(1,1)x &= (lx)\\
(2,2,1)x + (2,4,1)x''' + \text{etc.} + (2,h,1)x^{(h-1)} &= (lx')\\
(3,3,2)x'' + (3,4,2)x''' + \text{etc.} + (3,h,2)x^{(h-1)} &= (lx'')\\
(2,4,1)x' + (3,4,2)x'' + (4,4,1)x''' + \text{etc.} + (4,h,1)x^{(h-1)} &= (lx''')\\
\text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.}&\\
(2,h,1)x' + (3,h,2)x'' + (4,h,1)x''' + \text{etc.} + (h,h,1)x^{(h-1)}&\\
+ (h,h+1,1)x_{,} + (h,h+2,1)x_{''} + (h,h+3,1)x_{'''} + \text{etc.} &= (lx^{(h-1)})\\
(h,h+1,1)x^{(h-1)} + (h+1,h+1,1)x_{,} + (h+1,h+2,1)x_{''} + (h+1,h+3,1)x_{'''} + \text{etc.} &= (lx_{,})\\
(h,h+2,1)x^{(h-1)} + (h+1,h+2,1)x_{,} + (h+2,h+2,1)x_{''} + (h+2,h+3,1)x_{'''} + \text{etc.} &= (lx_{''})\\
(h,h+3,1)x^{(h-1)} + (h+1,h+3,1)x_{,} + (h+2,h+3,1)x_{''} + (h+3,h+3,1)x_{'''} + \text{etc.} &= (lx_{'''})\\
\text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.}&
\end{aligned}
$$

Aber da hier $N_{,}$, $N_{''}$, $N_{'''}$, etc. Null sind, so entstehen, zufolge des Art. 71. der Abhandlung, die folgenden Bedingungsgleichungen

$$
\begin{aligned}
(h,h+1,1)+(h+1,h+1,1)+(h+1,h+2,1)+(h+1,h+3,1)+\text{etc.} &= 0\\
(h,h+2,1)+(h+1,h+2,1)+(h+2,h+2,1)+(h+2,h+3,1)+\text{etc.} &= 0\\
(h,h+3,1)+(h+1,h+3,1)+(h+2,h+3,1)+(h+3,h+3,1)+\text{etc.} &= 0\\
\text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.}&
\end{aligned}
$$

addirt man daher die letzte Abtheilung der vorstehenden Gleichungen, nemlich diejenigen die nur die Unbekannten $x^{(h-1)}$, $x_{,}$, $x_{''}$, $x_{'''}$, etc. enthalten, zur nächst vorhergehenden Gleichung, die alle Unbekannten enthält, so geht diese letzt genannte in die folgende über.

$$
\begin{aligned}
&(2,h,1)x' + (3,h,2)x'' + (4,h,1)x''' + \text{etc.}\\
&+ \{(h,h,1) + (h,h+1,1) + (h,h+2,1) + (h,h+3,1) + \text{etc.}\}x^{(h-1)}\\
&= (lx^{(h-1)}) + (lx_{,}) + (lx_{''}) + (lx_{'''}) + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

aus welcher die Unbekannten $x_{,}$, $x_{''}$, $x_{'''}$, etc. eliminirt sind. Um aus den obigen Gleichungen, die diese Unbekannten nebst $x^{(h-1)}$ enthalten, diese letzt genannte zu eliminiren, braucht man in dieselben nur

$$
\begin{aligned}
(x_{,} - x^{(h-1)}) + x^{(h-1)} &\text{ statt } x_{,}\\
(x_{''} - x^{(h-1)}) + x^{(h-1)} &\text{ statt } x_{''}\\
(x_{'''} - x^{(h-1)}) + x^{(h-1)} &\text{ statt } x_{'''}\\
\text{etc.} \qquad \text{etc.}&
\end{aligned}
$$

zu substituiren, worauf vermöge der angeführten Bedingungsgleichungen die Coefficienten von $x^{(h-1)}$ verschwinden. Die obigen Gleichungen sind hiemit, abgesehen von der Gleichung

$$(1,1)x = (lx)$$

welche schon ein System für sich bildet, in die folgenden verwandelt worden, die zwei völlig von einander abgesonderte Systeme bilden.

$$\begin{aligned}
(2,2,1)x' &+ (2,4,1)x''' + \text{etc.} + (2,h,1)x^{(h-1)} = (lx')\\
(3,3,2)x'' &+ (3,4,2)x''' + \text{etc.} + (3,h,2)x^{(h-1)} = (lx'')\\
(2,4,1)x' + (3,4,2)x'' &+ (4,4,1)x''' + \text{etc.} + (4,h,1)x^{(h-1)} = (lx''')\\
&\text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.}\\
(2,h,1)x' + (3,h,2)x'' &+ (4,h,1)x''' + \text{etc.} + Hx^{(h-1)} = L\\
(h+1,h+1,1)x'_{,} + (h+1,h+2,1)x'_{,,} &+ (h+1,h+3,1)x'_{,,,} + \text{etc.} = (lx_{,})\\
(h+1,h+2,1)x'_{,} + (h+2,h+2,1)x'_{,,} &+ (h+2,h+3,1)x'_{,,,} + \text{etc.} = (lx_{,,})\\
(h+1,h+3,1)x'_{,} + (h+2,h+3,1)x'_{,,} &+ (h+3,h+3,1)x'_{,,,} + \text{etc.} = (lx_{,,,})\\
&\text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

wo zur Abkürzung

$$\begin{aligned}
H &= (h,h,1) + (h,h+1,1) + (h,h+2,1) + (h,h+3,1) + \text{etc.}\\
L &= (lx^{(h-1)}) + (lx_{,}) + (lx_{,,}) + (lx_{,,,}) + \text{etc.}\\
x'_{,} &= x_{,} - x^{(h-1)}\\
x'_{,,} &= x_{,,} - x^{(h-1)}\\
x'_{,,,} &= x_{,,,} - x^{(h-1)}\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

gesetzt worden sind. Auch diese Gleichungen haben, wie man sieht, die allgemeine Form, und die Bemerkung des vor. Art., dass sich ein zweites analoges Resultat erlangen lässt, kann hier wiederholt werden.

5.

Auch bei der Anwendung des zweiten Verfahrens der Abhandlung lässt sich in demselben Falle die Zerlegung der Gleichungen in zwei von einander unabhängige Systeme ausführen. Nachdem alle N Null gemacht worden sind bekommt man zuerst das folgende System von Gleichungen, die den (61) der Abhandlung entsprechen,

$$\begin{aligned}
(1,1)x + (1,2)x' + (1,3)x'' + (1,4)x''' + \text{etc.} + (1,h)x^{(h-1)} &= (lx)\\
(1,2)x + (2,2)x' + (2,3)x'' + (2,4)x''' + \text{etc.} + (2,h)x^{(h-1)} &= (lx')\\
(1,3)x + (2,3)x' + (3,3)x'' + (3,4)x''' + \text{etc.} + (3,h)x^{(h-1)} &= (lx'')\\
(1,4)x + (2,4)x' + (3,4)x'' + (4,4)x''' + \text{etc.} + (4,h)x^{(h-1)} &= (lx''')\\
&\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

$$(1,h)x + (2,h)x' + (3,h)x'' + (4,h)x''' + \text{etc.}$$
$$+ (h,h)x^{(h-1)} + (h,h+1)x_{,} + (h,h+2)x_{,,} + (h,h+3)x_{,,,} + \text{etc.} = (lx^{(h-1)})$$
$$(h,h+1)x^{(h-1)} + (h+1,h+1)x_{,} + (h+1,h+2)x_{,,} + (h+1,h+3)x_{,,,} + \text{etc.} = (lx_{,})$$
$$(h,h+2)x^{(h-1)} + (h+1,h+2)x_{,} + (h+2,h+2)x_{,,} + (h+2,h+3)x_{,,,} + \text{etc.} = (lx_{,,})$$
$$(h,h+3)x^{(h-1)} + (h+1,h+3)x_{,} + (h+2,h+3)x'' + (h+3,h+3)x_{,,,} + \text{etc.} = (lx_{,,,})$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

und zwischen den Coefficienten dieser Gleichungen bestehen jetzt nach Art. 108 der Abhandlung die folgenden Bedingungsgleichungen,

$$(1,1) + (1,2) + (1,3) + (1,4) + \text{etc.} + (1,h) = 0$$
$$(1,2) + (2,2) + (2,3) + (2,4) + \text{etc.} + (2,h) = 0$$
$$(1,3) + (2,3) + (3,3) + (3,4) + \text{etc.} + (3,h) = 0$$
$$(1,4) + (2,4) + (3,4) + (4,4) + \text{etc.} + (4,h) = 0$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

$$(1,h) + (2,h) + (3,h) + (4,h) + \text{etc.}$$
$$+ (h,h) + (h,h+1) + (h,h+2) + (h,h+3) + \text{etc.} = 0$$
$$(h,h+1) + (h+1,h+1) + (h+1,h+2) + (h+1,h+3) + \text{etc.} = 0$$
$$(h,h+2) + (h+1,h+2) + (h+2,h+2) + (h+2,h+3) + \text{etc.} = 0$$
$$(h,h+3) + (h+1,h+3) + (h+2,h+3) + (h+3,h+3) + \text{etc.} = 0$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

$$(lx) + (lx') + (lx'') + (lx''') + \text{etc.} + (lx^{(h-1)})$$
$$+ (lx_{,}) + (lx_{,,}) + (lx_{,,,}) \text{ etc.} = 0$$

durch welche bewirkt wird, dass die Summe der vorstehenden Gleichungen identisch Null ist, und folglich jede derselben in den übrigen enthalten ist.

6.

Die Zerlegung der Gleichungen des vor. Art. in zwei von einander unabhängige Systeme kann nun auf die folgende Weise bewirkt werden. Substituirt man zuerst

$$(x'-x) + x \text{ statt } x'$$
$$(x''-x) + x \text{ — } x''$$
$$(x'''-x) + x \text{ — } x'''$$
$$\text{etc.}$$
$$(x^{(h-1)}-x) + x \text{ statt } x^{(h-1)}$$
$$(x_{,}-x) + x \text{ — } x_{,}$$
$$(x_{,,}-x) + x \text{ — } x_{,,}$$
$$(x_{,,,}-x) + x \text{ — } x_{,,,}$$
$$\text{etc.}$$

in diese Gleichungen, so gehen sie in die folgenden über,

$$
\begin{aligned}
&(1,2)(x'-x) + (1,3)(x''-x) + (1,4)(x'''-x) + \text{etc.} + (1,h)(x^{(h-1)}-x) &&= (lx)\\
&(2,2)(x'-x) + (2,3)(x''-x) + (2,4)(x'''-x) + \text{etc.} + (2,h)(x^{(h-1)}-x) &&= (lx')\\
&(2,3)(x'-x) + (3,3)(x''-x) + (3,4)(x'''-x) + \text{etc.} + (3,h)(x^{(h-1)}-x) &&= (lx'')\\
&(2,4)(x'-x) + (3,4)(x''-x) + (4,4)(x'''-x) + \text{etc.} + (4,h)(x^{(h-1)}-x) &&= (lx''')\\
&\qquad\text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.} &&\quad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(2,h)(x'-x) + (3,h)(x''-x) + (4,h)(x'''-x) + \text{etc.}\\
&+(h,h)(x^{(h-1)}-x) + (h,h+1)(x_{,}-x) + (h,h+2)(x_{,,}-x) + (h,h+3)(x_{,,,}-x) + \text{etc.} &&= (lx^{(h-1)})\\
&(h,h+1)(x^{(h-1)}-x)+(h+1,h+1)(x_{,}-x)+(h+1,h+2)(x_{,,}-x)+(h+1,h+3)(x_{,,,}-x)+\text{etc.} &&= (lx_{,})\\
&(h,h+2)(x^{(h-1)}-x)+(h+1,h+2)(x_{,}-x)+(h+2,h+2)(x_{,,}-x)+(h+2,h+3)(x_{,,,}-x)+\text{etc.} &&= (lx_{,,})\\
&(h,h+3)(x^{(h-1)}-x)+(h+1,h+3)(x_{,}-x)+(h+2,h+3)(x_{,,}-x)+(h+3,h+3)(x_{,,,}-x)+\text{etc.} &&= (lx_{,,,})\\
&\qquad\text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

von welchen immer noch jede in den übrigen enthalten ist, da ihre Summe wieder identisch Null ist. Aber jetzt ist die Anzahl der Gleichungen um Eins grösser wie die Anzahl der Unbekannten. und wir dürfen und müssen daher Eine derselben weglassen. Die übrigen Gleichungen werden hierauf von einander unabhängig. und können vollständig aufgelöst werden. Da die weggelassene Gleichung in den übrigen enthalten ist, so wird ihr durch die Auflösung dieser letzteren von selbst Gnüge geleistet. Es ist in der That gleichgültig, welche Gleichung man weglässt, aber um die allgemeine Form dieser Gleichungen zu bewahren, muss man die erste derselben weglassen.

7.

Um die Zerlegung auszuführen kann man jetzt eben so verfahren wie oben im Art 4. Man addire die zweite Abtheilung der Gleichungen des vor. Art., hierauf ergiebt sich vermöge der Bedingungsgleichungen des Art. 5 ohne Weiteres eine Gleichung, in welcher die Unbekannten $x_{,}-x$, $x_{,,}-x$, $x_{,,,}-x$, etc. verschwunden sind. Um ferner die Unbekannte $x^{(h-1)}-x$ aus der zweiten Abtheilung zu eliminiren ist weiter nichts nöthig wie in jeder dieser, mit Ausnahme der ersten,

$$
\begin{aligned}
&(x_{,}-x^{(h-1)}) + (x^{(h-1)}-x) \text{ statt } x_{,}-x\\
&(x_{,,}-x^{(h-1)}) + (x^{(h-1)}-x) \quad - \quad x_{,,}-x\\
&(x_{,,,}-x^{(h-1)}) + (x^{(h-1)}-x) \quad - \quad x_{,,,}-x\\
&\qquad\text{etc.}
\end{aligned}
$$

zu schreiben. Die Gleichungen, die durch dieses Verfahren hervorgehen, sind

$$\begin{aligned}
&(2,2)(x'-x) + (2,3)(x''-x) + (2,4)(x'''-x) + \text{etc.} + (2,h)(x^{(h-1)}-x) &&= (lx')\\
&(2,3)(x'-x) + (3,3)(x''-x) + (3,4)(x'''-x) + \text{etc.} + (3,h)(x^{(h-1)}-x) &&= (lx'')\\
&(2,4)(x'-x) + (3,4)(x''-x) + (4,4)(x'''-x) + \text{etc.} + (4,h)(x^{(h-1)}-x) &&= (lx''')\\
&\qquad\text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{etc.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(2,h)(x'-x) + (3,h)(x''-x) + (4,h)(x'''-x) + \text{etc.} + H'(x^{(h-1)}x) &&= L'\\
&(h+1,h+1)(x_{,}-x^{(h-1)}) + (h+1,h+2)(x_{,,}-x^{(h-1)}) + (h+1,h+3)(x_{,,,}-x^{(h-1)}) + \text{etc.} &&= (lx_{,})\\
&(h+1,h+2)(x_{,}-x^{(h-1)}) + (h+2,h+2)(x_{,,}-x^{(h-1)}) + (h+2,h+3)(x_{,,,}-x^{(h-1)}) + \text{etc.} &&= (lx_{,,})\\
&(h+1,h+3)(x_{,}-x^{(h-1)}) + (h+2,h+3)(x_{,,}-x^{(h-1)}) + (h+3,h+3)(x_{,,,}-x^{(h-1)}) + \text{etc.} &&= (lx_{,,,})\\
&\qquad\text{etc.} \qquad\qquad\qquad\text{etc.} \qquad\qquad\qquad\text{etc.}
\end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned}
H' &= (h,h) + (h,h+1) + (h,h+2) + (h,h+3) + \text{etc.}\\
L' &= (lx^{(h-1)}) + (lx_{,}) + (lx_{,,}) + (lx_{,,,}) + \text{etc.}
\end{aligned}$$

sind. Die vorstehenden Gleichungen bilden wieder, wie man sieht, zwei von einander unabhängige Systeme, und das zweite dieser ist mit dem im Art. 4 erhaltenen identisch, da man hier, gleich wie dort geschehen ist, allen Coefficienten als dritten Index die Zahl 1 hinzufügen kann.

8.

Eine andere Art der Zerlegung wird auf die folgende Weise bewirkt. In die Gleichungen des Art. 5 substituire man durchgehends

$$\begin{aligned}
(x-x^{(h-1)}) + x^{(h-1)} &\text{ statt } x\\
(x'-x^{(h-1)}) + x^{(h-1)} &- x'\\
&\text{etc.}\\
(x_{,}-x^{(h-1)}) + x^{(h-1)} &- x_{,}\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

worauf diese sich in die folgenden verwandeln

$$\begin{aligned}
&(1,1)u + (1,2)u' + (1,3)u'' + (1,4)u''' + \text{etc.} &&= (lx)\\
&(1,2)u + (2,2)u' + (2,3)u'' + (2,4)u''' + \text{etc.} &&= (lx')\\
&(1,3)u + (2,3)u' + (3,3)u'' + (3,4)u''' + \text{etc.} &&= (lx'')\\
&(1,4)u + (2,4)u' + (3,4)u'' + (4,4)u''' + \text{etc.} &&= (lx''')\\
&\qquad\text{etc.} \qquad\qquad\qquad\text{etc.} \qquad\qquad\qquad\text{etc.}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&(1,h)u + (2,h)u' + (3,h)u'' + (4,h)u''' + \text{etc.} \\
&+ (h,h+1)u_{,} + (h,h+2)u_{,,} + (h,h+3)u_{,,,} + \text{etc.} &&= (lx^{(h-1)}) \\
&(h+1,h+1)u_{,} + (h+1,h+2)u_{,,} + (h+1,h+3)u_{,,,} + \text{etc.} &&= (lx_{,}) \\
&(h+1,h+2)u_{,} + (h+2,h+2)u_{,,} + (h+2,h+3)u_{,,,} + \text{etc.} &&= (lx_{,,}) \\
&(h+1,h+3)u_{,} + (h+2,h+3)u_{,,} + (h+3,h+3)u_{,,,} + \text{etc.} &&= (lx_{,,,}) \\
&\qquad\text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

in welchen zur Abkürzung durchgehends

$$
\begin{aligned}
u &= x - x^{(h-1)} \\
u' &= x' - x^{(h-1)} \\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

gesetzt worden ist, und da es hier die h^{te} Gleichung ist, die weggelassen werden muss, um die allgemeine Form der Gleichungen zu bewahren, so sind die aufzulösenden Gleichungen,

$$
\begin{aligned}
&(1,1)u + (1,2)u' + (1,3)u'' + (1,4)u''' + \text{etc.} &&= (lx) \\
&(1,2)u + (2,2)u' + (2,3)u'' + (2,4)u''' + \text{etc.} &&= (lx') \\
&(1,3)u + (2,3)u' + (3,3)u'' + (3,4)u''' + \text{etc.} &&= (lx'') \\
&(1,4)u + (2,4)u' + (3,4)u'' + (4,4)u''' + \text{etc.} &&= (lx''') \\
&\quad\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.} \\
&(h+1,h+1)u_{,} + (h+1,h+2)u_{,,} + (h+1,h+3)u_{,,,} + \text{etc.} &&= (lx_{,}) \\
&(h+1,h+2)u_{,} + (h+2,h+2)u_{,,} + (h+2,h+3)u_{,,,} + \text{etc.} &&= (lx_{,,}) \\
&(h+1,h+3)u_{,} + (h+2,h+3)u_{,,} + (h+3,h+3)u_{,,,} + \text{etc.} &&= (lx_{,,,}) \\
&\qquad\text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

die auch in zwei von einander abgesonderte Systeme zerfallen, deren jedes die allgemeine Form hat. Das zweite System ist wieder mit den zwei zunächst vorhergehenden identisch. Es würden sich wohl noch mehr Verfahren angeben lassen um diese Zerlegung zu bewirken, allein ich will es bei den im Vorhergehenden erklärten bewenden lassen.

9.

Als Beispiel zu den vorhergehenden Entwickelungen soll die Station Mallwischken der Preuss. Landestriangulation des Jahres 1858 dienen, auf welcher unter anderen der hier abgehandelte Fall eintritt*). Für die Bezeichnungen werde ich die wählen, die in der Abhandlung für die

*) S. Die Königl. Preuss. Landestriangulation. Hauptdreiecke. Erster Theil, etc. Berlin 1866.

Anwendung als die zweckmässigste erkannt worden sind. Es sollen demgemäss die eingeschnittenen Gegenstände,

Szillen mit (1)
Ob. Eissuln — (2)
Wersmeningken — (3)
Pillkallen — (4)
Kattenau — (5)
Schwentischken — (6)
Kucklinsberg — (7)

und demgemäss die Hülfsgrössen und die Coefficienten der Gleichungen bezeichnet werden. Lässt man nun vorläufig die Centrirungen weg, welches fast immer, und hier jedenfalls zulässig ist, so steht das erste Stationstäfelchen wie folgt,

r	Vorl. Werthe	20	4	4	24
(1)	0° 0′ 0″	0″,00	0″,00	—	—
(2)	31 50 10	−25,40	−15,55	—	—
(3)	77 34 45	+28,40	− 4,70	0″,00	—
(4)	119 30 30	− 2,03	—	− 7,40	—
(5)	161 13 45	+ 2,29	—	− 9,15	0″,00
(6)	191 48 45	—	—	—	+21,85
(7)	254 45 55	—	—	—	+55,93
	Summen	+ 3″,26	−20″,25	−16″,55	+77″,78
	Mittel	+ 0″,652	− 6″,750	− 5″,517	+25″,927

von welchen Daten in jedem Falle ausgegangen werden muss.

10.

Es soll nun zuerst die Ausgleichung auf dieser Station ohne Anwendung der Zerlegung der Gleichungen in zwei, von einander unabhängige, Systeme ausgeführt werden, und es soll hiebei die Reihenfolge der Richtungen so gewählt werden wie im Art. 2 verlangt wurde. Es soll also die durchgehends beobachtete Richtung allen übrigen vorangestellt werden, und das Täfelchen des vor. Art. zeigt, dass dieses die Richtung (5) ist. Das zweite Stationstäfelchen steht also wie folgt.

No.	(5)	(1)	(2)	(3)	(4)	(6)	(7)	p	P	$p^2 : P$
1	+ 1″,638	−0″,652	−26″,052	+27″,748	−2″,682	—	—	20	100	4,0
2	—	+6,750	− 8,800	+ 2,050	—	—	—	4	12	1,3333
3	− 3,633	—	—	+ 5,546	−1″,883	—	—	4	12	1,3333
4	−25,927	—	—	—	—	−4″,077	+30″,004	24	72	8,0
(lx)	−27″,922	+6″,098	−34″,852	+35″,344	−4″,565	−4″,077	+30″,004	Sa.	196	
Q	48	24	24	28	24	24	24	=	196	

Wählen wir nun die Accente und Indices in der natürlichen Reihenfolge, ungeachtet dieses in der Numerirung der Richtungen nicht der Fall ist, so erhalten wir das folgende Täfelchen der (pp).

	p	p'	p''	p'''	p^{IV}	p^{V}	p^{VI}
p	13.3333	4.0	4.0	5.3333	5.3333	8.0	8.0
p'		5.3333	5.3333	5.3333	4.0	0	0
p''			5.3333	5.3333	4.0	0	0
p'''				6.6667	5.3333	0	0
p^{IV}					5.3333	0	0
p^{V}						8.0	8.0
p^{VI}							8.0

Die Berechnung der N und der zu den Controlen erforderlichen Grössen, die nach den Angaben der Abhandlungen auszuführen ist, steht nun im Einzelnen wie folgt, wo ich der Kürze wegen die Bezeichnung ob Logarithmus oder Zahl weggelassen habe, da dieses ohnehin erkennbar ist.

(pp') . . . 0.60206 (pp''') . . . 0.72700 , (pp^{IV}) . . . 0.72700
(pp'') . . . 0.60206 N . . . 0.23856 , . . . 0.23856
$(p'p'')$ . . . 0.72700 (pp^{V}) . . . 0.90309 , (pp^{VI}) . . . 0.90309
1.93112
M . . . 0.96556

N . . . 0.23856 = 1.7320
N' . . . 0.36350 = 2.3094
N'' . . . 0.36350 = 2.3094
N''' . . 0.48844 = 3.0792
N^{IV} . . . 0.48844 = 3.0792
N^{V} . . . 0.66453 = 4.6188
N^{VI} . . . 0.66453 = 4.6188
ΣN . . . 1.33739 = 21.7468
$N\Sigma N$ . . . 1.57595 = 37.666
$N'\Sigma N$ . . . 1.70089 = 50.221
$N''\Sigma N$ . . . 1.70089 = 50.221
$N'''\Sigma N$ . . . 1.82583 = 66.962
$N^{IV}\Sigma N$ . . . 1.82583 = 66.962
$N^{V}\Sigma N$ . . . 2.00192 = 100.443
$N^{VI}\Sigma N$ . . . 2.00192 = 100.443

Die Coefficienten der aufzulösenden Gleichungen bekommen hierauf die folgenden Werthe.

$(1,1) = 37.667$, $(3,3,2) = 24.0$, $(4,4,1) = 30.8149$
$(2,2,1) = 24.0$, $(3,4,2) = +1.7779$, $(4,5,1) = +4.1483$
$(2,4,1) = +1.7779$, $(3,5,2) = +3.1112$, $(4,6,1) = +14.222$
$(2,5,1) = +3.1112$, $(3,6,2) = +10.6667$, $(4,7,1) = +14.222$
$(2,6,1) = +10.6667$, $(3,7,2) = +10.6667$
$(2,7,1) = +10.6667$
$(5,5,1) = 28.1483$, $(6,6,1) = 37.333$, $(7,7,1) = 37.333$
$(5,6,1) = +14.222$, $(6,7,1) = +13.333$ $(ll) = 182.752$
$(5,7,1) = +14.222$

Durch die vorstehenden Zahlenwerthe sind diese Coefficienten controlirt worden. Die fernere Rechnung giebt nun nach und nach

$$\chi' = +(9.86999)$$
$$(ll,1) = 162.054$$
$$\gamma'' = -(8.86970)\ ,\ \delta'' = -(9.11272)\ ,\ \varepsilon'' = -(9.64782)$$
$$\zeta'' = -(9.64782)\ ,\ \chi'' = -(9.40498)$$

$(4,4,2) = 30.6832$
$(4,5,2) = +3.9178$, $(5,5,2) = 27.7450$
$(4,6,2) = +13.4318$, $(5,6,2) = +12.8392$, $(6,6,2) = 32.5925$
$(4,7,2) = +13.4318$, $(5,7,2) = +12.8392$, $(6,7,2) = +8.5925$
$(4,l,2) = +34''.8624$, $(5,l,2) = -5''.3555$, $(6,l,2) = -6''.7873$

$(7,7,2) = 32.5925$
$(7,l,2) = +27''.2937$, $(ll,2) = 160.505$

$\gamma''' = -(8.86970)$, $\delta''' = -(9.11272)$, $\varepsilon''' = -(9.64782)$
$\zeta''' = -(9.64782)$, $\chi''' = +(0.16202)$

$(4,4,3) = 30.5515$
$(4,5,3) = +3.6873$, $(5,5,3) = 27.3417$
$(4,6,3) = +12.6416$, $(5,6,3) = +11.4564$, $(6,6,3) = 27.8517$
$(4,7,3) = +12.6416$, $(5,7,3) = +11.4564$, $(6,7,3) = +3.8517$
$(4,l,3) = +37''.4441$, $(5,l,3) = -0''.8375$, $(6,l,3) = +8''.7027$

$(7,7,3) = 27.8517$
$(7,l,3) = 42''.7837$, $(ll,3) = 109.894$

$\delta^{IV} = -(9.08167)$, $\varepsilon^{IV} = -(9.61677)$, $\zeta^{IV} = -(9.61677)$
$\chi^{II} = -(0.08835)$

$(5,5,4) = 26.8967$
$(5,6,4) = +9.9306$, $(6,6,4) = 22.6208$
$(5,7,4) = +9.9306$, $(6,7,4) = -1.3792$, $(7,7,4) = 22.6208$
$(5,l,4) = -5''.3567$, $(6,l,4) = -6''.7909$, $(7,l,4) = +27''.2901$

$(ll,4) = 64.003$
$\varepsilon^{I} = -(9.56727)$, $\zeta^{I} = -(9.56727)$, $\chi^{I} = +(9.29920)$

$(6,6,5) = 18.9544$
$(6,7,5) = -5.0456$, $(7,7,5) = 18.9544$
$(6,l,5) = -4''.8132$, $(7,l,5) = +29''.2678$, $(ll,5) = 62.936$
$\zeta^{II} = +(9.42520)$, $\chi^{II} = +(9.40473)$
$(7,7,6) = 17.6111$
$(7,l,6) = +27''.9865$, $(ll,6) = 61.714$
$\chi^{III} = -(0.20116)$
$(ll,7) = 17.240$

Ferner

$\beta^{III} = -(8.86970)$, $\beta^{IV} = -(9.08167)$, $\beta^{I} = -(9.56730)$, $\beta^{II} = -(9.66980)$
$\gamma^{III} = -(8.86970)$, $\gamma^{IV} = -(9.08167)$, $\gamma^{I} = -(9.56730)$, $\gamma^{II} = -(9.66980)$
$\delta^{IV} = -(9.08167)$, $\delta^{I} = -(9.56730)$, $\delta^{II} = -(9.66980)$
$\varepsilon^{I} = -(9.56727)$, $\varepsilon^{II} = -(9.66980)$
$\zeta^{II} = +(9.42520)$

und hiemit

$w(1) = -0''.462$
$w(2) = -2.168$
$w(3) = +0.600$
$w(4) = -0.848$
$w(5) = -0.741$
$w(6) = +0.169$
$w(7) = +1.589$

Diese müssen nun vor Allem der oft erwähnten Bedingungsgleichung gnügen, die Producte die diese giebt sind

$$\begin{aligned} N.w(5) &= -\ 1''.284 \\ N'.w(1) &= -\ 1.067 \\ N''.w(2) &= -\ 5.007 \\ N'''.w(3) &= +\ 1.849 \\ N''''.w(4) &= -\ 2.612 \\ N^{v}.w(6) &= +\ 0.781 \\ N^{vi}.w(7) &= +\ 7.340 \\ \text{Sa.} &= 0.000 \end{aligned}$$

wie es sein muss. Es müssen nun nicht nur die vorstehenden Werthe der $w(r)$ den im vor. Art. angenommenen, vorläufigen Werthen der Richtungen hinzugefügt, sondern es müssen auch die Centrirungen berücksichtigt werden. Diese findet man in dem oben angezogenen Werke Seite 36, und fügt man, der leichteren Vergleichung wegen, jeder derselben 0″.462 hinzu, so ergiebt sich die folgende Zusammenstellung.

r	Vorl. Werthe	Centr.	$w(r)$	Ausgegl. Richt.
(1)	0° 0′ 0″	+ 8″.822	−0″.462	0° 0′ 8″.360
(2)	31 50 10	+ 6.867	−2.168	31 50 14.699
(3)	77 34 45	+ 3.840	+0.600	77 34 49.440
(4)	119 13 30	− 3.943	−0.848	119 13 25.209
(5)	161 13 45	−14.276	−0.741	161 13 29.983
(6)	191 48 45	− 7.681	+0.169	191 48 37.488
(7)	254 45 55	− 1.532	+1.589	254 45 55.057

die mit den Resultaten des angezogenen Werks übereinstimmen.

11.

Es soll jetzt unser Beispiel mit Anwendung der im Art. 3 erklärten Zerlegung der Gleichungen in zwei von einander unabhängige Systeme ausgeführt werden. Um möglichste Verschiedenheit in der Behandlung herbeizuführen sollen den Richtungen (6) und (7) die zweite und dritte Stelle in der Reihenfolge gegeben werden. Das zweite Stationstäfelchen steht daher jetzt wie folgt.

No.	(5)	(6)	(7)	(1)	(2)	(3)	(4)	p	P	$p^2 : P$
1	+ 1″.638	—	—	−0″.652	−26″.052	+27″.748	−2″.682	20	100	4.0
2	—	—	—	+6.750	− 8.800	+ 2.050	—	4	12	1.3333
3	− 3.633	—	—	—	—	+ 5.516	−1.883	4	12	1.3333
4	−25.927	−4″.077	+30″.004	—	—	—	—	24	72	8.0
(lx)	−27″.922	−4″.077	+30″.004	+6″.098	−34″.852	+35″.314	−4.565	Sa.	196	
Q	48	24	24	24	24	28	24	=	196	

und die (pp) erhalten hierauf die folgenden Werthe.

	p	p'	p''	$p_{,}$	$p_{,,}$	$p_{,,,}$	$p_{,v}$
p	13.3333	8.0	8.0	4.0	4.0	5.3333	5.3333
p'		8.0	8.0	0	0	0	0
p''			8.0	0	0	0	0
$p_{,}$				5.3333	5.3333	5.3333	4.0
$p_{,,}$					5.3333	5.3333	4.0
$p_{,,,}$						6.6667	5.3333
$p_{,v}$							5.3333

Es wird nun zuerst

$$N' = 0 \ , \ N'' = 0$$

und für die Bestimmung der übrigen N ergiebt sich die folgende Rechnung

$(pp_{,}) \ldots 0.60206$ $\quad$ $(pp_{,,,}) \ldots 0.72700 = (pp_{,v})$

$(pp_{,,}) \ldots 0.60206$ $\quad$ $N \ \ldots 0.23856$

$(p_{,}p_{,,}) \ldots 0.72700$

1.93112

$M \ldots 0.96556$

N	0.23856	1.7320
$N_{,}$	0.36350	2.3094
$N_{,,}$	0.36350	2.3094
$N_{,,,}$	0.48844	3.0792
$N_{,v}$	0.48844	3.0792
ΣN	1.09723	12.5092
$N\Sigma N$	1.33579	21.667
$N_{,}\Sigma N$	1.46073	28.889
$N_{,,}\Sigma N$	1.46073	28.889
$N_{,,,}\Sigma N$	1.58567	38.518
$N_{,v}\Sigma N$	1.58567	38.518

Die Coefficienten des ersten Systems von Gleichungen folgen hieraus

$(1,1) = 37.667$

$(1,2) = -8.0 \ , \ (2,2) = 16.0$

$(1,3) = -8.0 \ , \ (2,3) = -8.0 \ , \ (3,3) = 16.0$

und die des zweiten Systems

$(4,4,3)=24.0$

$(4,5,3)= 0 \quad , (5,5,3)=24.0$

$(4,6,3)=+1.7779, (5,6,3)=+1.7779, (6,6,3)=30.8149$

$(4,7,3)=+3.1112, (5,7,3)=+3.1112, (6,7,3)=+4.1483, (7,7,3)=28.1483$

ausserdem wie vorher $(ll) = 182.752$

die durch die vorhergehenden Zahlenwerthe controlirt worden sind.

Es ist sehr dienlich bei der Auflösung dieser Gleichungen beide Systeme als Ein System zu betrachten, in welchem sich das zweite unmittelbar an das erste knüpft, und dem gemäss alle Bezeichnungen zu wählen. Aus diesem Grunde sind im zweiten System für die Bezeichnungen der Coefficienten (4,4,3), (4,5,3), etc. statt (4,4), (4,5), etc. eingeführt worden. Die Auflösung kann nun durchaus nach den allgemeinen Formeln für Ein System ausgeführt werden, und giebt nach und nach die folgenden Zahlenwerthe

$$\alpha' = +(9.32713)\,,\ \beta' = +(9.32713)\,,\ \chi' = +(9.86999)$$

$$(2,2,1) = 14.3009$$

$$(2,3,1) = -\ 9.6991\,,\ (3,3,1) = 14\ 3009$$

$$(2,l,1) = -10''.0074\,,\ (3,4,1) = +24''.0736\,,\ (u,1) = 162.053$$

$$\beta'' = +(9.83137)\,,\ \chi'' = +(9.84495)$$

$$(3,3,2) = 7.7226$$

$$(3,l,2) = -17''.2864\,,\ (u,2) = 155.050$$

$$\gamma''' = \delta''' = \text{etc.} = 0\,,\ \chi''' = -(0.34994)$$

$$\left.\begin{matrix}(4,4,3)\,,\ (4,5,3)\,,\ \text{etc.}\\ (5,5,3)\,,\ \text{etc.}\end{matrix}\right\}\ \text{wie oben, } (u,3) = 116.355$$

$$\delta^{IV} = 0\,,\ \varepsilon^{IV} = -(8.86970)\,,\ \zeta^{IV} = -(9.11272)\,,\ \chi^{IV} = -(9.40498)$$

$$(5,5,4) = 24.0$$

$$(5,6,4) = +1.7779, (6,6,4) = 30.6832$$

$$(5,7,4) = +3.1112, (6,7,4) = +3.9178, (7,7,4) = 27.7450$$

$$(5,l,4) = -34''.852, (6,l,4) = +34''.8623, (7,l,4) = 114.806, (u,4) = 114.806$$

$$\varepsilon^{V} = -(8.86970)\,,\ \zeta^{V} = -(9.11272)\,,\ \chi^{V} = +(0.16202)$$

$$(6,6,5) = 30.5515$$

$$(6,7,5) = +\ 3.6873\,,\ (7,7,5) = 27.3417$$

$$(6,l,5) = +37''.4441\,,\ (7,l,5) = -0''.8375\,,\ (u,5) = 64.195$$

$$\zeta^{VI} = -(9.08168)\,,\ \chi^{VI} = -(0.08835)$$

$$(7,7,6) = 26.8967$$

$$(7,l,6) = -5''.3567\,,\ (u,6) = 18.304$$

$$\chi^{VII} = +(9.29920)$$

$$(u,7) = 17.237 \text{ (möglichst nahe wie oben.)}$$

Für die Berechnung der übrigen Grössen ziehe ich vor die betreffenden

Formeln ohne Abkürzungen vollständig herzusetzen, da bei gegenwärtigem Verfahren die Grössen, die Null werden, in verschiedenen Fällen verschiedene Stellen einnehmen. Um die Fortsetzung möglichst zu erleichtern, sollen diese Formeln für sieben Unbekannte angesetzt werden. Sie sind

$$
\begin{array}{llllllll}
\alpha'' = & \beta' + \beta''\alpha' & & & & & & \\
\beta'' = & \beta'' & & & & & & \\
\alpha''' = & \gamma' + \gamma''\alpha' & + \gamma'''\alpha'' & & & & & \\
\beta''' = & \gamma'' & + \gamma'''\beta'' & & & & & \\
\gamma''' = & \gamma''' & & & & & & \\
\alpha^{IV} = & \delta' + \delta''\alpha' & + \delta'''\alpha'' & + \delta^{IV}\alpha''' & & & & \\
\beta^{IV} = & \delta'' & + \delta'''\beta'' & + \delta^{IV}\beta''' & & & & \\
\gamma^{IV} = & \delta''' & + \delta^{IV}\gamma''' & & & & & \\
\delta^{IV} = & \delta^{IV} & & & & & & \\
\alpha^{V} = & \varepsilon' + \varepsilon''\alpha' & + \varepsilon'''\alpha'' & + \varepsilon^{IV}\alpha''' & + \varepsilon^{V}\alpha^{IV} & & & \\
\beta^{V} = & \varepsilon'' & + \varepsilon'''\beta'' & + \varepsilon^{IV}\beta''' & + \varepsilon^{V}\beta^{IV} & & & \\
\gamma^{V} = & \varepsilon''' & + \varepsilon^{IV}\gamma''' & + \varepsilon^{V}\gamma^{IV} & & & & \\
\delta^{V} = & \varepsilon^{IV} & + \varepsilon^{V}\delta^{IV} & & & & & \\
\varepsilon^{V} = & \varepsilon^{V} & & & & & & \\
\alpha^{VI} = & \zeta' + \zeta''\alpha' & + \zeta'''\alpha'' & + \zeta^{IV}\alpha''' & + \zeta^{V}\alpha^{IV} & + \zeta^{VI}\alpha^{V} & & \\
\beta^{VI} = & \zeta'' & + \zeta'''\beta'' & + \zeta^{IV}\beta''' & + \zeta^{V}\beta^{IV} & + \zeta^{VI}\beta^{V} & & \\
\gamma^{VI} = & \zeta''' & + \zeta^{IV}\gamma''' & + \zeta^{V}\gamma^{IV} & + \zeta^{VI}\gamma^{V} & & & \\
\delta^{VI} = & \zeta^{IV} & + \zeta^{V}\delta^{IV} & + \zeta^{VI}\delta^{V} & & & & \\
\varepsilon^{VI} = & \zeta^{V} & + \zeta^{VI}\varepsilon^{V} & & & & & \\
\zeta^{VI} = & \zeta^{VI} & & & & & & \\
-w(1) = & \chi' + \chi''\alpha' & + \chi'''\alpha'' & + \chi^{IV}\alpha''' & + \chi^{V}\alpha^{IV} & + \chi^{VI}\alpha^{V} & + \chi^{VII}\alpha^{VI} & \\
-w(2) = & \chi'' & + \chi'''\beta' & + \chi^{IV}\beta'' & + \chi^{V}\beta''' & + \chi^{VI}\beta^{IV} & + \chi^{VII}\beta^{V} & \\
-w(3) = & \chi''' & + \chi^{IV}\gamma'' & + \chi^{V}\gamma''' & + \chi^{VI}\gamma^{IV} & + \chi^{VII}\gamma^{V} & & \\
-w(4) = & \chi^{IV} & + \chi^{V}\delta''' & + \chi^{VI}\delta^{IV} & + \chi^{VII}\delta^{V} & & & \\
-w(5) = & \chi^{V} & + \chi^{VI}\varepsilon^{IV} & + \chi^{VII}\varepsilon^{V} & & & & \\
-w(6) = & \chi^{VI} & + \chi^{VII}\zeta^{V} & & & & & \\
-w(7) = & \chi^{VII} & & & & & &
\end{array}
$$

sie kürzen sich in jedem Falle nach der Zerlegung der Gleichungen in zwei Systeme bedeutend ab. In unserem Beispiel sind, wie man gesehen hat, die folgenden Grössen Null,

$$\begin{array}{cccc} \gamma' , & \delta' , & \varepsilon' , & \zeta' \\ \gamma'' , & \delta'' , & \varepsilon'' , & \zeta'' \\ \gamma''' , & \delta''' , & \varepsilon''' , & \zeta''' \\ & \delta^{IV} , & & \end{array}$$

und alle Glieder der vorstehenden Formeln, in welchen eine dieser Grössen vorkommt, fallen daher auch weg, und ähnlich wird es sich in allen Fällen verhalten. Die folgenden Zahlenwerthe sind daher durch eine sehr kurze Rechnung erhalten worden.

$$\begin{array}{lll} \alpha' = + (9.32713) , & \alpha'' = + (9.55199) & \\ & \beta'' = + (9.83137) & \\ & \delta' = - (8.86970) , & \delta'' = - (9.08168) \\ & \varepsilon' = - (8.86970) , & \varepsilon'' = - (9.08168) \\ & & \zeta'' = - (9.08168) \end{array}$$

Bei der Berechnung der Werthe der $w(r)$, die hieraus folgen, ist die Reihenfolge der Richtungen, die oben angenommen wurde, zu beachten. In den vorstehenden Ausdrücken der $w(r)$ sind daher

$$w(5) , \ w(6) , \ w(7) , \ w(1) , \ w(2) , \ w(3) , \ w(4)$$

bez. statt

$$w(1) , \ w(2) , \ w(3) , \ w(4) , \ w(5) , \ w(6) , \ w(7)$$

anzunehmen. Man erhält

$$\begin{array}{l} w(1) = + 0''.187 \\ w(2) = - 1.519 \\ w(3) = + 1.250 \\ w(4) = - 0.199 \\ w(5) = - 0.092 \\ w(6) = + 0.818 \\ w(7) = + 2.238 \end{array}$$

die vor Allem der oft erwähnten Bedingungsgleichung gnügen müssen. Diese giebt

$$\begin{array}{l} N \ . \ w(5) = - 0''.159 \\ N' \ . \ w(6) = \quad 0 \\ N'' \ . \ w(7) = \quad 0 \\ N_{,} \ . \ w(1) = + 0.433 \\ N_{,,} \ . \ w(2) = - 3.508 \\ N_{,,,} \ . \ w(3) = + 3.847 \\ N_{,,,,} \ . \ w(4) = - 0.613 \\ \qquad \text{Sa.} = 0.000 \end{array}$$

wie es sein muss. Die Werthe der $w(6)$ und $w(7)$ entziehen sich dieser

Prüfung nicht ganz, denn sie tragen mit dazu bei um die übrigen zu berechnen. Die Unterschiede der $w(r)$ müssen ferner mit denen, die das Verfahren des vor. Art. gegeben hat, übereinstimmen, und die Vergleichung zeigt, dass dieses in der That der Fall ist.

12.

Bei der Anwendung des im Art. 4 entwickelten Verfahrens werde ich die Reihenfolge der Richtungen so wählen wie das folgende Täfelchen zeigt.

No.	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	p	P	$p^2 : P$
1	−0″.652	−26″.052	+27″.748	−2″.682	+ 1″.638	—	—	20	100	4.0
2	+6.750	− 8.800	+ 2.050	—	—	—	—	4	12	1.3333
3	—	—	+ 5.516	−1.883	− 3.633	—	—	4	12	1.3333
4	—	—	—	—	−25.927	−4″.077	+30″.004	24	72	8.0
(lx)	+6″.098	−34″.852	+35″.314	−4″.565	−27″.922	−4″.077	+30.004	Sa.	196	
Q	24	24	28	24	48	24	24	=	196	

Das Täfelchen der (pp) steht in Folge dessen so,

	p	p'	p''	p'''	p^{IV}	$p_{,}$	$''d$
p	5.3333	5.3333	5.3333	4.0	4.0	0	0
p'		5.3333	5.3333	4.0	4.0	0	0
p''			6.6667	5.3333	5.3333	0	0
p'''				5.3333	5.3333	0	0
p^{IV}					13.3333	8.0	8.0
$p_{,}$						8.0	8.0
$p_{,,}$							8.0

und hieraus bekommt man, in Folge der Bestimmungen des Art. 4, zuerst

$$N = 2.3095\ ,\ N' = 2.3095\ ,\ N'' = 2.3095$$
$$N''' = 1.7320\ ,\ N^{IV} = 1.7320\ ,\ N^{V} = 0\ \ ,\ N^{VI} = 0$$

und wenn man vorläufig auf die Zerlegung des Systems keine Rücksicht nimmt,

$(1,1) = 24.0$
$(1,l) = +6''.098$

$(2,2,1) = 24.0$
$(2,3,1) = 0$, $(3,3,2) = 26.6667$
$(2,4,1) = 0$, $(3,4,2) = -1.3333$, $(4,4,1) = 21.6667$
$(2,5,1) = 0$, $(3,5,2) = -1.3333$, $(4,5,1) = -2.3333$
$(2,6,1) = 0$, $(3,6,2) = 0$, $(4,6,1) = 0$
$(2,7,1) = 0$, $(3,7,2) = 0$, $(4,7,1) = 0$
$(2,l,1) = -34''.852$, $(3,l,2) = +35''.314$, $(4,l,1) = -4''.565$

$(5,5,1) = 37.6667$
$(5,6,1) = -8.0$, $(6,6,1) = 16.0$
$(5,7,1) = -8.0$, $(6,7,1) = -8.0$, $(7,7,1) = 16.0$
$(5,l,1) = -27''.922$, $(6,l,1) = -4''.077$, $(7,l,1) = +30''.004$, $(ll) = 182.752$

oder (ll) wie oben. Hier ist es blos Zufall, dass $(2,4,1)$ und $(2,5,1)$ Null werden, welches in anderen speciellen Fällen nicht statt finden wird. Zerlegt man nun dieses System von Gleichungen nach dem Verfahren des Art. 4, so bleiben die Werthe der Coefficienten der vier ersten Gleichungen unverändert wie oben, aber für die fünfte Gleichung tritt

$$H = (5,5,1) + (5,6,1) + (5,7,1) = 21.6667 \text{ statt } (5,5,1)$$

und

$$= (5,l,1) + (6,l,1) + (7,l,1) = -1''.995 \text{ statt } (5,l,1)$$

ein, womit die Coefficienten des ersten Systems von Gleichungen vollständig gegeben sind. Für die des zweiten Systems bekommt man, wenn man in Betreff der Bezeichnungen die bez. Bemerkung des vor. Art. benutzt,

$(6,6,5) = 16.0$
$(6,7,5) = -8.0$, $(7,7,5) = 16.0$
$(6,l,5) = -4''.077$, $(7,l,5) = +30''.004$

während der Werth von (ll) durch die Zerlegung nicht berührt wird. Die Auflösung giebt nun nach und nach

$\chi' = -(9.40498)$
$(ll,1) = 181.203$
$\gamma'' = 0$, $\delta'' = 0$, $\chi'' = +(0.16202)$
$(4,4,2) = (4,4,1)$
$(4,5,2) = (4,5,1)$, $(5,5,2) = (5,5,1)$
$(4,l,2) = (4,l,1)$, $(5,l,2) = (5,l,1)$, $(ll,2) = 130.592$

$\gamma''' = +(8.69897)$, $\delta''' = +(8.69897)$, $\chi''' = -(0.12198)$

$(4,4,3) = 21.6$

$(4,5,3) = -2.4$, $(5,5,3) = 21.6$

$(4,l,3) = -2''.7993$, $(5,l,3) = -0''.2293$, $(ll,3) = 83.826$

$\delta'' = +(9.04576)$, $\chi'' = +(9.11260)$

$(5,5,4) = 21.3333$

$(5,l,4) = -0''.5403$, $(ll,4) = 83.463$

$\varepsilon' = \zeta' = 0$, $\chi' = +(8.40357)$

$(ll,5) = 83.449$

$\zeta'' = +(9.69897)$, $\chi'' = +(9.40622)$

$(7,7,6) = 12.0$

$(7,l,6) = +27''.9655$, $(ll,6) = 82.410$

$\chi''' = -(0.36744)$

$(ll,7) = 17.238$ (wie oben)

Hieraus ferner nach den Ausdrücken der Abhandlung

$$\beta'' = 0 \ , \ \gamma'' = +(8.74476)$$

und

$$w(1) = +0''.254$$
$$w(2) = -1.452$$
$$w(3) = +1.316$$
$$w(4) = -0.133$$
$$w(5) = -0.025$$
$$w(6) - w(5) = +0.910$$
$$w(7) - w(5) = +2.330$$

die auch den oft erwähnten Bedingungsgleichungen gnügen. Die beiden letzten Werthe entziehen sich aber dieser Controle, weil $N_{,}$ und $N_{,,}$ Null sind. Man bekommt, wenn man $w(5)$ durch Addition seines Werthes $-0''.025$ eliminirt

$$w(6) = +0''.885$$
$$w(7) = +2.305$$

und die Unterschiede aller dieser Werthe stimmen mit den bezüglichen Resultaten der beiden nächstvorhergehenden Artikel überein.

13.

Wenden wir jetzt das Verfahren des Art. 6 auf unser Beispiel an, so sind alle N Null zu machen, und in dieser Annahme zuerst die Coefficienten der Gleichungen mit Weglassung der der ersten Gleichung zu

berechnen, und dabei keine Rücksicht auf die Zerlegung zu nehmen. Benutzt man dazu das Täfelchen der (pp) des vor. Art., so sind diese Coefficienten

$(2,2,1) = 18.6667$

$(2,3,1) = -5.3333$, $(3,3,1) = 21.3333$

$(2,4,1) = -4.0$, $(3,4,1) = -5.3333$, $(4,4,1) = 18.6667$

$(2,5,1) = -4.0$, $(3,5,1) = -5.3333$, $(4,5,1) = -5.3333$

$(2,6,1) = 0$, $(3,6,1) = 0$, $(4,6,1) = 0$

$(2,7,1) = 0$, $(3,7,1) = 0$, $(4,7,1) = 0$

$(2,l,1) = -34''.852$, $(3,l,1) = +35''.314$, $(4,l,1) = -4''.565$

$(5,5,1) = 34.6667$

$(5,6,1) = -8.0$, $(6,6,1) = 16.0$

$(5,7,1) = -8.0$, $(6,7,1) = -8.0$, $(7,7,1) = 16.0$

$(5,l,1) = -27''.922$, $(6,l,1) = -4''.077$, $(7,l,1) = +30''.004$, $(ll,1) = 182.752$

Die Coefficienten der Gleichung mit dem Index 5 werden nun eben so erhalten wie im vor. Art. und es sind folglich die Coefficienten der ersten vier Gleichungen mit den vorstehenden bis auf die Ausnahme identisch, dass

$$II \text{ oder } (5,5,1) = 18.667$$
$$L \text{ oder } (5,l,1) = -1''.995$$

werden, und damit das erste System abschliesst. Die Coefficienten des zweiten Systems sind hier dieselben wie im vor. Art. nemlich

$(6,6,5) = 16.0$

$(6,7,5) = -8.0$, $(7,7,5) = 16.0$

$(6,l,5) = -4''.077$, $(7,l,5) = +30''.004$

Die Auflösung giebt hienach

$$\beta'' = +(9.45594), \quad \gamma'' = +(9.33100)$$
$$\delta'' = +(9.33100), \quad \chi'' = +(0.27117)$$

$(3,3,2) = 19.8094$

$(3,4,2) = -6.4762$, $(4,4,2) = 17.8095$

$(3,5,2) = -6.4762$, $(4,5,2) = -6.1905$, $(5,5,2) = 17.8095$

$(3,l,2) = +25''.3560$, $(4,l,2) = -12''.0335$, $(5,l,2) = -9.4635$, $(ll,2) = 117.679$

$$\gamma''' = +(9.51445), \quad \delta''' = +(9.51445), \quad \chi''' = -(0.10721)$$

$(4,4,3) = 15.6923$

$(4,5,3) = -8.3077$, $(5,5,3) = 15.6923$

$(4,l,3) = -3''.7439$, $(5,l,3) = -1''.1739$, $(ll,3) = 85.223$

$$\delta'' = + (9.72380) \,, \quad \chi'' = + (0.37765)$$

$(5,5,4) = 11.2941$

$(5,l,4) = -3''.1560 \,, \quad (ll,4) = 84.330$

$$\chi' = + (9.44630)$$

$$(ll,5) = 83.448$$

$$\zeta'' = + (9.69897) \,, \quad \chi'' = + (9.40622)$$

$(7,7,6) = 12.0$

$(7,l,6) = +27''.9655 \,, \quad (ll,6) = 82.409$

$$\chi''' = - (0.36744)$$

$$(ll,7) = 17.237 \text{ (wie oben)}$$

Ferner nach den Ausdrücken der Abhandlung

$$\delta''' = + (9.48813) \,, \quad \beta'' = + (9.67265) \,, \quad \gamma'' = + (9.69897)$$

und hiemit

$$w(2) - w(1) = -1''.706$$
$$w(3) - w(1) = + 1.062$$
$$w(4) - w(1) = - 0.387$$
$$w(5) - w(1) = - 0.279$$
$$w(6) - w(5) = + 0.910$$
$$w(7) - w(5) = + 2.330$$

Die im Vorhergehenden zur Prüfung dieser Endwerthe angewandte Bedingungsgleichung ist hier nicht anwendbar, da sie identisch erfüllt wird. Die Vergleichung mit den im Vorhergehenden erhaltenen Werthen zeigt die Uebereinstimmung.

14.

Da das Verfahren des vor. Art. mit demjenigen übereinstimmt, welches in dem mehrmals genannten Werke über die Preuss. Landestriangulation angewandt worden ist, und dort nach Bessel die an sich überflüssige unbestimmte Elimination der Gleichungen ausgeführt worden ist, so halte ich es für nicht überflüssig zu zeigen, dass die Coefficienten dieser Elimination dort auch richtig berechnet worden sind. Bezeichnet man diese Coefficienten mit $[2,2]$, $[2,3]$, etc., so sind sie im gegenwärtigen Falle durch die folgenden Ausdrücke gegeben,

$$
\begin{aligned}
[2,2] &= \frac{1}{(2,2,1)} + \frac{\beta''^2}{(3,3,2)} + \frac{\beta'''^2}{(4,4,3)} + \frac{\beta''^2}{(5,5,4)} \\
[2,3] &= \qquad\quad \frac{\beta''}{(3,3,2)} + \frac{\beta'''\gamma'''}{(4,4,3)} + \frac{\beta''\gamma''}{(5,5,4)} \\
[2,4] &= \qquad\qquad\quad \frac{\beta'''}{(4,4,3)} + \frac{\beta''\delta''}{(5,5,4)} \\
[2,5] &= \qquad\qquad\qquad\quad \frac{\beta''}{(5,5,4)} \\
[2,6] &= [2,7] = 0 \\
[3,3] &= \frac{1}{(3,3,2)} + \frac{\gamma'''^2}{(4,4,3)} + \frac{\gamma''^2}{(5,5,4)} \\
[3,4] &= \qquad\quad \frac{\gamma'''}{(4,4,3)} + \frac{\gamma''\delta''}{(5,5,4)} \\
[3,5] &= \qquad\qquad\quad \frac{\gamma''}{(5,5,4)} \\
[3,6] &= [3,7] = 0 \\
[4,4] &= \frac{1}{(4,4,3)} + \frac{\delta''^2}{(5,5,4)} \\
[4,5] &= \qquad\quad \frac{\delta''}{(5,5,4)} \\
[4,6] &= [4,7] = 0 \\
[5,5] &= \frac{1}{(5,5,4)} \\
[5,6] &= [5,7] = 0 \\
[6,6] &= \frac{1}{(6,6,5)} + \frac{\zeta''^2}{(7,7,6)} \\
[6,7] &= \qquad\quad \frac{\zeta''}{(7,7,6)} \\
[7,7] &= \frac{1}{(7,7,6)}
\end{aligned}
$$

Die Substitution der numerischen Werthe des vor. Art. in diese Ausdrücke gab

$$
\begin{aligned}
&[2,2] = 0.08333 \\
&[2,3] = 0.04167\,,\ [3,3] = 0.07943 \\
&[2,4] = 0.04167\,,\ [3,4] = 0.04427\,,\ [4,4] = 0.08854 \\
&[2,5] = 0.04167\,,\ [3,5] = 0.04427\,,\ [4,5] = 0.04688 \\
&[5,5] = 0.08854\,,\ [6,6] = 0.08333 \\
&\qquad\qquad [6,7] = 0.04167\,,\ [7,7] = 0.08333
\end{aligned}
$$

die auch mit den Angaben des angezogenen Werks übereinstimmen.

15.

Wenden wir endlich auch das Verfahren des Art. 7 auf unser Beispiel an, so ist wieder das Täfelchen der (pp) des Art. 12 zu benutzen, und es sind hiebei wieder alle N Null zu machen, aber die fünfte Glei-

chung wegzulassen. Die Coefficienten des ersten Systems der hiemit schon in zwei Systeme zerlegten Gleichungen sind nun die folgenden,

$(1,1) = 18.6667$

$(1,2) = -5.3333$, $(2,2) = 18.6667$

$(1,3) = -5.3333$, $(2,3) = -5.3333$, $(3,3) = 21.3333$

$(1,4) = -4.0$, $(2,4) = -4.0$, $(3,4) = -5.3333$

$(1,l) = +6''.098$, $(2,l) = -34''.852$, $(3,l) = +35''.314$

$(4,4) = 18.6667$

$(4,l) = -4''.565$, $(ll) = 182.752$

und die Coefficienten des zweiten Systems sind dieselben, wie im Art. 13, weshalb ich sie nicht wiederholen werde. Die Auflösung giebt jetzt

$$\alpha' = +(9.45594) , \beta' = +(9.45594)$$
$$\gamma' = +(9.33100) , \chi' = -(9.51413)$$

$(2,2,1) = 17.1428$

$(2,3,1) = -6.8572$, $(3,3,1) = 19.8094$

$(2,4,1) = -5.1429$, $(3,4,1) = -6.4762$, $(4,4,1) = 17.8095$

$(2,l,1) = -33''.1097$, $(3,l,1) = +37''.0563$, $(4,l,1) = -3''.2583$, $(ll,1) = 180.76$

$$\beta'' = +(9.60206) , \gamma'' = +(9.47713) , \chi'' = +(0.28588)$$

$(3,3,2) = 17.0667$

$(3,4,2) = -8.5334$, $(4,4,2) = 16.2666$

$(3,l,2) = +23''.8124$, $(4,l,2) = -13''.1916$, $(ll,2) = 116.810$

$$\gamma''' = +(9.69897) , \chi''' = -(0.14464)$$

$(4,4,3) = 12.0000$

$(4,l,3) = -1''.2855$, $(ll,3) = 83.586$

$$\chi'' = +(9.02989)$$

$(ll,4) = (ll,5) = 83.448$

Da dieser Werth von $(ll,5)$ mit dem im Art. 13 gefundenen übereinstimmt, so muss der hier sich für $(ll,7)$ ergebende auch mit jenem übereinstimmen.

Die Ausdrücke der Abhandlung geben ferner

$$\alpha'' = +(9.60206) , \alpha''' = +(9.69897) , \beta''' = +(9.69897)$$

und hiemit

$$w(1) - w(5) = +0''.279$$
$$w(2) - w(5) = -1.427$$
$$w(3) - w(5) = +1.342$$
$$w(4) - w(5) = -0.107$$

während $w(6) - w(5)$ und $w(7) - w(5)$ eben so bleiben wie im vorvor. Art. Die Anwendung der Bedingungsgleichung findet hier wieder nicht statt, weil sie wieder identisch wird. Durch die Subtraction des ersten der vorstehenden Ausdrücke von allen übrigen bekommt man

$$w(2) - w(1) = -1''.706$$
$$w(3) - w(1) = +1.063$$
$$w(4) - w(1) = -0.386$$
$$w(5) - w(1) = -0.279$$

die mit den im Vorhergehenden gefundenen Werthen übereinstimmen.

16.

Im Vorhergehenden ist zur Gnüge gezeigt worden, dass die Zerlegung der Stationsgleichungen in zwei Systeme, wo dieses an sich möglich ist, in den Resultaten der Ausgleichungen auf den Stationen durchaus keine Verschiedenheiten in den ausgeglichenen Werthen der Winkel hervorbringt. Aber nicht blos in diesem ersten Theil der Auflösung werden die Resultate identisch, sondern dasselbe findet auch im zweiten Theile derselben statt, so dass man überhaupt identische Endresultate erhält, man mag die Zerlegung angewandt haben oder nicht. Jeder, der sich die Mühe giebt, die Theorie dieser Aufgabe etwas mehr wie oberflächlich zu betrachten, wird sich leicht überzeugen können, dass dieses in der That statt finden muss. Ich könnte daher diesen Aufsatz hier schliessen, um aber diese Sache möglichst klar zu machen, will ich dasselbe Beispiel mit allen fünf verschiedenen Verfahrungsarten, die im Vorhergehenden enthalten sind, so weit fortsetzen, wie die Betrachtung einer einzigen Station erlaubt; ich werde mich hiebei indess nur der Logarithmen von vier Decimalen bedienen, da man in der Regel damit ausreicht.

Geht man die in dem oft genannten Werke angegebenen Bedingungsgleichungen des Dreiecksnetzes durch, zu welchem die hier behandelte Station gehört, so findet man dass diese letztere nur in denjenigen derselben vorkommt, die mit den Zahlen *IX*, *X*, *XII*, *XIV*, *XV*, *XVI*, *XVII*, *XVIII*, *XIX*, *XX*, *XXII* bezeichnet sind. Zieht man diese aus, und ergänzt die erste Richtung, deren Verbesserung dem Besselschen Verfahren zufolge weggelassen worden ist, so erhält man das folgende Täfelchen der Differentialquotienten, bei welchen es überflüssig

war eine Stationsnummer anzuführen, da es sich hier nur um Eine Station handelt.

r	$q(r,IX)$	$\log q(r,X)$	$\log q(r,XII)$	$q(r,XIV)$	$\log q(r,XV)$	$q(r,XVI)$
1	— 1	0.2071n	—	—	—	—
2	+ 1	0.4239	9.6930n	— 1	—	—
3	—	0.0185n	0.0185	—	0.2547n	—
4	—	—	9.7405n	—	0.2931	—
5	—	—	—	+ 1	9.2205n	— 1
6	—	—	—	—	—	+ 1
7	—	—	—	—	—	—

r	$\log q(r,XVII)$	$q(r,XVIII)$	$\log q(r,XIX)$	$q(r,XX)$	$\log q(r,XXII)$
1	—	—	—	—	—
2	—	—	—	—	—
3	—	—	—	—	—
4	0.2931n	—	—	—	—
5	0.5630	+ 1	0.2284n	—	—
6	0.2284n	— 1	0.2284	— 1	9.7080
7	—	—	—	+ 1	9.7080n

17.

Wendet man nun zuerst das allgemeine Verfahren ohne Zerlegung der Gleichungen an, nach welchem im Art. 10 die Ausgleichung auf der Station ausgeführt wurde, so sind die in Betracht kommenden Hülfsgrössen die folgenden,

$\beta''' = -(8.8697)$, $\beta^{IV} = -(9.0817)$, $\beta^{V} = -(9.5673)$, $\beta^{VI} = -(9.6698)$

$\gamma''' = -(8.8697)$, $\gamma^{IV} = -(9.0817)$, $\gamma^{V} = -(9.5673)$, $\gamma^{VI} = -(9.6698)$

$\delta^{IV} = -(9.0817)$, $\delta^{V} = -(9.5673)$, $\delta^{VI} = -(9.6698)$

$\varepsilon^{V} = -(9.5673)$, $\varepsilon^{VI} = -(9.6698)$

$\zeta^{VI} = +(9.4252)$

$(1,1) = (1.5760)$, $(5,5,4) = (1.4297)$

$(2,2,1) = (1.3802)$, $(6,6,5) = (1.2777)$

$(3,3,2) = (1.3802)$, $(7,7,6) = (1.2460)$

$(4,4,3) = (1.4850)$

und es ist hiebei zu beachten, dass hier die Reihenfolge der Richtungen (5), (1), (2), (3), (4), (6), (7) ist. Man kann immerhin demungeachtet das Täfelchen der q des vor. Art. so wie es aufgestellt worden ist, anwenden, wenn man nur die vorbenannte Reihenfolge beachtet, allein um Irrthümern möglichst vorzubeugen, verfährt man sicherer, wenn man dieses Täfelchen nach der geänderten Reihenfolge umschreibt. Es steht daher für die jetzige Anwendung wie folgt.

r	$q(r,IX)$	$\log q(r,X)$	$\log q(r,XII)$	$q(r,XIV)$	$\log q(r,XV)$	$q(r,XVI)$	
5	—	—	—	+ 1	9.2205n	— 1	1
1	— 1	0.2071n	—	—	—	—	2
2	+ 1	0.4239	9.6930n	— 1	—	—	3
3	—	0.0185n	0.0185	—	0.2547n	—	4
4	—	—	9.7405n	—	0.2931	—	5
6	—	—	—	—	—	+ 1	6
7	—	—	—	—	—	—	7

r	$\log q(r,XVII)$	$q(r,XVIII)$	$\log q(r,XIX)$	$q(r,XX)$	$\log q(r,XXII)$	
5	0.5630	+ 1	0.2284n	—	—	1
1	—	—	—	—	—	2
2	—	—	—	—	—	3
3	—	—	—	—	—	4
4	0.2931n	—	—	—	—	5
6	0.2284n	— 1	0.2284	— 1	9.7080	6
7	—	—	—	+ 1	9.7080n	7

Die Ausdrücke der Abhandlung, für welche die rechter Hand angesetzten Indices zu benutzen sind, geben nun die folgenden Werthe der Hülfsgrössen,

r	$\log\eta(r,IX)$	$\log\eta(r,X)$	$\log\eta(r,XII)$	$\log\eta(r,XIV)$	$\log\eta(r,XV)$	$\log\eta(r,XVI)$	
5	—	—	—	0.	9.2205n	0. n	1
1	0. n	0.2071n	—	—	—	—	2
2	0.	0.4239	9.6930n	0. n	—	—	3
3	—	0.0495n	0.0344	8.8697	0.2547n	—	4
4	—	—	9.7900n	9.0817	0.3387	—	5
6	—	—	—	9.5673	8.7889n	0.	6
7	—	—	—	9.6698	8.8940n	9.4252	7

r	$\log\eta(r,XVII)$	$\log\eta(r,XVIII)$	$\log\eta(r,XIX)$	$\log\eta(r,XX)$	$\log\eta(r,XXII)$	
5	0.5630	0.	0.2284n	—	—	1
1	—	—	—	—	—	2
2	—	—	—	—	—	3
3	—	—	—	—	—	4
4	0.2931n	—	—	—	—	5
6	9.9854n	0. n	0.2284	0. n	9.7080	6
7	9.6700	9.4252n	9.6536	9.8656	9.5735n	7

r	$\log Q(r,IX)$	$\log Q(r,X)$	$\log Q(r,XII)$	$\log Q(r,XIV)$	$\log Q(r,XV)$	$\log Q(r,XVI)$	
5	—	—	—	8.4240	7.6445n	8.4240n	1
1	8.6198n	8.8269n	—	—	—	—	2
2	8.6198	9.0437	8.3128n	8.6198n	—	—	3
3	—	8.5645n	8.5484	7.3847	8.7697n	—	4
4	—	—	8.3603n	7.6520	8.9090	—	5
6	—	—	—	8.2896	7.5112n	8.7223	6
7	—	—	—	8.4238	7.6450n	8.4792	7

r	log Q(r,XVII)	log Q(r,XVIII)	log Q(r,XIX)	log Q(r,XX)	log Q(r,XXII)	
5	8.9870	8.4240	8.6524n	—	—	1
1	—	—	—	—	—	2
2	—	—	—	—	—	3
3	—	—	—	—	—	4
4	8.8634n	—	—	—	—	5
6	8.7077n	8.7223n	8.9507	8.7223n	8.4303	6
7	8.4240	8.1792n	8.4076	8.6196	8.3275n	7

r	log f(r,IX)	log f(r,X)	log f(r,XII)	log f(r,XIV)	log f(r,XV)	log f(r,XVI)	
5	—	—	—	8.4240	7.6445n	8.4240n	1
1	8.6198n	8.8090n	6.1703	8.3079n	7.3357n	8.4239n	2
2	8.6198	9.0544	8.3096n	8.7923n	7.3357n	8.4239n	3
3	—	8.5645n	8.5811	8.2483n	8.8153n	8.4239n	4
4	—	—	8.3603n	8.1793n	8.9261	8.4239n	5
6	—	—	—	8.4239	7.6454n	8.7542	6
7	—	—	—	8.4238	7.6450n	8.1792	7

r	log f r,XVII)	log f(r,XVIII)	log f(r,XIX)	log f(r,XX)	log f(r,XXII)	
5	8.9870	8.4240	8.6524n	—	—	1
1	8.1830	8.4239	8.6523n	—	—	2
2	8.1830	8.4239	8.6523n	—	—	3
3	8.1830	8.4239	8.6523n	—	—	4
4	8.8234n	8.4239	8.6523n	—	—	5
6	8.6429n	8.7542n	8.9826	8.6198n	8.3276	6
7	8.4240	8.1792n	8.4076	8.6198	8.3275n	7

Man kann die Richtigkeit dieser Werthe der f Functionen durch das Corollarium zu dem im Suppl. 3 bewiesenen Satze prüfen. Wir erhalten hier z. B.

		$N.f(5,XIV) = +0.0460$
$N.f(1,X) = -0.1488$,	$N.f(1,XII) = +0.0003$	$N'.f(1,XIV) = -0.0469$
$N'.f(2,X) = +0.2618$,	$N''.f(2,XII) = -0.0471$	$N''.f(2,XIV) = -0.1432$
$N''.f(3,X) = -0.1130$,	$N'''.f(3,XII) = +0.1173$	$N'''.f(3,XIV) = -0.0545$
Sa. $= 0.0000$,	$N^{IV}.f(4,XII) = -0.0706$	$N^{IV}.f(4,XIV) = -0.0465$
	Sa. $= -0.0001$	$N^{V}.f(6,XIV) = +0.1226$
		$N^{VI}.f(7,XIV) = +0.1226$
		Sa. $= +0.0001$

u. s. w.

18.

Aus den vorstehenden Zahlenwerthen ergiebt sich der Beitrag, den die in Rede stehende Station zu den Coefficienten der Endgleichungen liefert. Ich habe diesen in der folgenden Tafel zusammengestellt, und dabei zugleich die einzelnen Theile, aus welchen er besteht, hinzugefügt.

r	(IX,IX)	(IX,X)	(IX,XII)	(IX,XIV)	(IX,XV)	(IX,XVI)
1	0.04167	+ 0.0644	−0.00015	+0.02032	+0.00217	+0.02654
2	0.04167	+ 0.1133	−0.02040	−0.06199	−0.00217	−0.02654
	0.08334	+ 0.1777	−0.02055	−0.04167	0.	0.

r	$(IX,XVII)$	$(IX,XVIII)$	(IX,XIX)	(IX,XX)	$(IX,XXII)$	
1	−0.01524	−0.02654	+0.04491	0.	0.	
2	+0.01524	+0.02654	−0.04491	0.	0.	
	0.	0.	0.			

r	(X,X)	(X,XII)	(X,XIV)	(X,XV)	(X,XVI)	$(X,XVII)$
1	0.1038	−0.00024	+0.0327	+0.00349	+0.04276	−0.02455
2	0.3008	−0.05415	−0.1645	−0.00575	−0.07043	+0.04045
3	0.0383	−0.03977	+0.0185	+0.06820	+0.02769	−0.01590
	0.4429	−0.09416	−0.1133	+0.06594	+0.00002	0.00000

r	$(X,XVIII)$	(X,XIX)	(X,XX)	$(X,XXII)$		
1	−0.04276	+0.0724	0.	0.		
2	+0.07043	−0.1192	0.	0.		
3	−0.02769	+0.0469	0.	0.		
	−0.00002	+0.0001				

r	(XII,XII)	(XII,XIV)	(XII,XV)	(XII,XVI)	$(XII,XVII)$	$(XII,XVIII)$
2	0.01006	+0.03057	+0.00107	+0.01309	−0.00752	−0.01309
3	0.03978	−0.01848	−0.06820	−0.02769	+0.01590	+0.02769
4	0.01261	+0.00832	−0.04641	+0.01460	+0.03663	−0.01460
	0.06245	+0.02041	−0.11354	0.00000	+0.04501	0.00000

r	(XII,XIX)	(XII,XX)	$(XII,XXII)$			
2	+0.02215	0.	0.			
3	−0.04686	0.	0.			
4	+0.02471	0.	0.			
	0.00000					

r	(XIV,XIV)	(XIV,XV)	(XIV,XVI)	$(XIV,XVII)$	$(XIV,XVIII)$	(XIV,XIX)
5	0.02655	−0.00441	−0.02655	+0.09705	+0.02655	−0.04492
2	0.06199	+0.00217	+0.02655	−0.01524	−0.02655	+0.04492
	0.08854	−0.00224	0.	+0.08181	0.	0.

r	(XIV,XX)	$(XIV,XXII)$				
5	0.	0.				
2	0.	0.				

r	(XV,XV)	(XV,XVI)	(XV,XVII)	(XV,XVIII)	(XV,XIX)	(XV,XX)
5	0.0007	+0.00441	−0.0161	−0.00441	+0.00746	0.
3	0.1175	+0.04771	−0.0274	−0.04771	+0.08072	0.
4	0.1656	−0.05212	−0.1308	+0.05212	−0.08818	0.
	0.2838	0.00000	−0.1743	0.00000	0.00000	

r	(XV,XXII)
5	0.
3	0.
4	0.

r	(XVI,XVI)	(XVI,XVII)	(XVI,XVIII)	(XVI,XIX)	(XVI,XX)	(XVI,XXII)
5	0.02655	−0.09705	−0.02655	+0.04492	0.	0.
6	0.05679	−0.04394	−0.05679	+0.09608	−0.04167	+0.02126
	0.08334	−0.14099	−0.08334	+0.14100	−0.04167	+0.02126

r	(XVII,XVII)	(XVII,XVIII)	(XVII,XIX)	(XVII,XX)	(XVII,XXII)
5	0.3548	+0.09705	−0.1642	0.	0.
4	0.1311	−0.05212	+0.0882	0.	0.
6	0.0743	+0.09608	−0.1626	+0.07050	−0.03598
	0.5602	+0.14101	−0.2386	+0.07050	−0.03598

r	(XVIII,XVIII)	(XVIII,XIX)	(XVIII,XX)	(XVIII,XXII)
5	0.02655	−0.04492	0.	0.
6	0.05679	−0.09608	+0.04167	−0.02126
	0.08334	−0.14100	+0.04167	−0.02126

r	(XIX,XIX)	(XIX,XX)	(XIX,XXII)
5	0.0760	0.	0.
6	0.1626	−0.07050	+0.03598
	0.2386	−0.07050	+0.03598

r	(XX,XX)	(XX,XXII)
6	0.04167	−0.02126
7	0.04167	−0.02126
	0.08334	−0.04252

r	(XXII,XXII)
6	0.01086
7	0.01086
	0.02172

Weiter kann man in der Betrachtung einer einzelnen Station nicht gehen, aber das Vorstehende reicht aus, um ihre volle Einwirkung auf die ganze Berechnung des betreffenden Dreiecksnetzes zu erkennen, und

mit den Resultaten der übrigen hier erklärten Verfahrungsarten vergleichen zu können.

19.

Indem wir nun zur Fortsetzung der Rechnungen übergehen, die sich an das im Art. 11 angewandte Verfahren der Zerlegung der Stationsgleichungen anknüpfen, haben wir zuerst zu erwägen, dass dort die Reihenfolge der Richtungen eine andere ist, wie im Vorhergehenden. Dieser Umstand muss wieder bei der Benutzung des Täfelchens für die Differentialquotienten der Bedingungsgleichungen berücksichtigt werden, und stellt man dieses demgemäss um, so erhält man das folgende.

r	$q(r,IX)$	$\log q(r,X)$	$\log q(r,XII)$	$q(r,XIV)$	$\log q(r,XV)$	$q(r,XVI)$	
5	—	—	—	+ 1	9.2205n	— 1	1
6	—	—	—	—	—	+ 1	2
7	—	—	—	—	—	—	3
1	— 1	0.2071n	—	—	—	—	4
2	+ 1	0.4239	9.6930n	— 1	—	—	5
3	—	0.0185n	0.0185	—	0.2547n	—	6
4	—	—	9.7405n	—	0.2931	—	7

r	$\log q(r,XVII)$	$q(r,XVIII)$	$\log q(r,XIX)$	$q(r,XX)$	$\log q(r,XXII)$	
5	0.5630	+ 1	0.2284n	—	—	1
6	0.2284n	— 1	0.2284	— 1	9.7080	2
7	—	—	—	+ 1	9.7080n	3
1	—	—	—	—	—	4
2	—	—	—	—	—	5
3	—	—	—	—	—	6
4	0.2931n	—	—	—	—	7

Die Werthe der jetzt in Betracht kommenden Hülfsgrössen sind zufolge des Art. 11.

$$\alpha' = +(9.3271),\ \alpha'' = +(9.5520),\ \alpha''' = 0,\ \alpha'^{\text{v}} = 0,\ \alpha^{\text{v}} = 0,\ \alpha^{\text{vi}} = 0$$
$$\beta'' = +(9.8314),\ \beta''' = 0,\ \beta'^{\text{v}} = 0,\ \beta^{\text{v}} = 0,\ \beta^{\text{vi}} = 0$$
$$\gamma''' = 0,\ \gamma'^{\text{v}} = 0,\ \gamma^{\text{v}} = 0,\ \gamma^{\text{vi}} = 0$$
$$\delta'^{\text{v}} = 0,\ \delta^{\text{v}} = -(8.8697),\ \delta^{\text{vi}} = -(9.0817)$$
$$\varepsilon^{\text{v}} = -(8.8697),\ \varepsilon^{\text{vi}} = -(9.0817)$$
$$\zeta^{\text{vi}} = -(9.0817)$$

$$(1,1) = (1.5760),\ (5,5,4) = (1.3802)$$
$$(2,2,1) = (1.1554),\ (6,6,5) = (1.4850)$$
$$(3,3,2) = (0.8878),\ (7,7,6) = (1.4297)$$
$$(4,4,3) = (1.3802)$$

Da beim gegenwärtigen Verfahren in verschiedenen Fällen verschiedene Hülfsgrössen Null werden können, so will ich die Formeln, nach welchen die Rechnungen auszuführen sind, ohne jede Abkürzung für sieben Richtungen aufstellen, gleichwie dieses im Art. 11 für die dort in Betracht kommenden Grössen geschehen ist.

$$\eta(1,I) = q(1,I)$$
$$\eta(2,I) = \alpha'.q(1,I) + q(2,I)$$
$$\eta(3,I) = \alpha''.q(1,I) + \beta''.q(2,I) + q(3,I)$$
$$\eta(4,I) = \alpha'''.q(1,I) + \beta'''.q(2,I) + \gamma'''.q(3,I) + q(4,I)$$
$$\eta(5,I) = \alpha^{IV}.q(1,I) + \beta^{IV}.q(2,I) + \gamma^{IV}.q(3,I) + \delta^{IV}.q(4,I) + q(5,I)$$
$$\eta(6,I) = \alpha^{V}.q(1,I) + \beta^{V}.q(2,I) + \gamma^{V}.q(3,I) + \delta^{V}.q(4,I) + \varepsilon^{V}.q(5,I) + q(6,I)$$
$$\eta(7,I) = \alpha^{VI}.q(1,I) + \beta^{VI}.q(2,I) + \gamma^{VI}.q(3,I) + \delta^{VI}.q(4,I) + \varepsilon^{VI}.q(5,I) + \zeta^{VI}.q(6,I) + q(7,I)$$

$$Q(1,I) = \frac{\eta(1,I)}{(1,1)},\quad Q(2,I) = \frac{\eta(2,I)}{(2,2,1)},\quad Q(3,I) = \frac{\eta(3,I)}{(3,3,2)},\ \text{etc.}$$

$$f(1,I) = Q(1,I) + \alpha'.Q(2,I) + \alpha''.Q(3,I) + \alpha'''.Q(4,I) + \alpha^{IV}.Q(5,I) + \alpha^{V}.Q(6,I) + \alpha^{VI}.Q(7,I)$$
$$f(2,I) = Q(2,I) + \beta''.Q(3,I) + \beta'''.Q(4,I) + \beta^{IV}.Q(5,I) + \beta^{V}.Q(6,I) + \beta^{VI}.Q(7,I)$$
$$f(3,I) = Q(3,I) + \gamma'''.Q(4,I) + \gamma^{IV}.Q(5,I) + \gamma^{V}.Q(6,I) + \gamma^{VI}.Q(7,I)$$
$$f(4,I) = Q(4,I) + \delta^{IV}.Q(5,I) + \delta^{V}.Q(6,I) + \delta^{VI}.Q(7,I)$$
$$f(5,I) = Q(5,I) + \varepsilon^{V}.Q(6,I) + \varepsilon^{VI}.Q(7,I)$$
$$f(6,I) = Q(6,I) + \zeta^{VI}.Q(7,I)$$
$$f(7,I) = Q(7,I)$$

Man bekommt hiemit für das Beispiel sehr leicht

r	$\log\eta(r,IX)$	$\log\eta(r,X)$	$\log\eta(r,XII)$	$\log\eta(r,XIV)$	$\log\eta(r,XV)$	$\log\eta(r,XVI)$	
5	—	—	—	0.	9.2205n	0. n	1
6	—	—	—	9.3271	8.5476n	9.8963	2
7	—	—	—	9.5520	8.7725n	9.5078	3
1	0. n	0.2071n	—	—	—	—	4
2	0.	0.4239	9.6930n	0. n	—	—	5
3	—	0.0496n	0.0338	8.8697	0.2547n	—	6
4	—	6.602n	9.7900n	9.0817	0.3387	—	7

r	$\log\eta(r,XVII)$	$\log\eta(r,XVIII)$	$\log\eta(r,XIX)$	$\log\eta(r,XX)$	$\log\eta(r,XXII)$	
5	0.5630	0.	0.2284n	—	—	1
6	9.9619n	9.8963n	0.1249	0. n	9.7086	2
7	9.1920	9.5078n	9.7360	9.5073	9.2156n	3
1	—	—	—	—	—	4
2	—	—	—	—	—	5
3	—	—	—	—	—	6
4	0.2931n	—	—	—	—	7

r	log $Q(r,IX)$	log $Q(r,X)$	log $Q(r,XII)$	log $Q(r,XIV)$	log $Q(r,XV)$	log $Q(r,XVI)$	
5	—	—	—	8.4240	7.6445n	8.4240n	1
6	—	—	—	8.1717	7.3922n	8.7409	2
7	—	—	—	8.6642	7.8847n	8.6200	3
1	8.6198n	8.8269n	—	—	—	—	4
2	8.6198	9.0437	8.3128n	8.6198n	—	—	5
3	—	8.5646n	8.5488	7.3847	8.7697n	—	6
4	—	5.172 n	8.3603n	7.6520	8.9090	—	7

r	log $Q(r,XVII)$	log $Q(r,XVIII)$	log $Q(r,XIX)$	log $Q(r,XX)$	log $Q(r,XXII)$	
5	8.9870	8.4240	8.6524n	—	—	1
6	8.8065n	8.7409n	8.9695	8.8446n	8.5526	2
7	8.3042	8.6200n	8.8482	8.6195	8.3278n	3
1	—	—	—	—	—	4
2	—	—	—	—	—	5
3	—	—	—	—	—	6
4	8.8634n	—	—	—	—	7

r	log $f(r,IX)$	log $f(r,X)$	log $f(r,XII)$	log $f(r,XIV)$	log $f(r,XV)$	log $f(r,XVI)$	
5	—	—	—	8.6641	7.8847n	—	1
6	—	—	—	8.6641	7.8847n	8.9208	2
7	—	—	—	8.6642	7.8847n	8.6200	3
1	8.6198n	8.8090n	6.161	6.8580n	7.7347n	—	4
2	8.6198	9.0542	8.3096n	8.6273n	7.7347n	—	5
3	—	8.5646n	8.5815	7.2751	8.8366n	—	6
4	—	5.172 n	8.3603n	7.6520	8.9090	—	7

r	log $f(r,XVII)$	log $f(r,XVIII)$	log $f(r,XIX)$	log $f(r,XX)$	log $f(r,XXII)$	
5	8.9573	—	—	—	—	1
6	8.7023n	8.9208n	9.1493	8.6198n	8.3276	2
7	8.3042	8.6200n	8.8482	8.6195	8.4278n	3
1	7.9451	—	—	—	—	4
2	7.9451	—	—	—	—	5
3	7.9451	—	—	—	—	6
4	8.8634n	—	—	—	—	7

Auch diese f Functionen kann man auf dieselbe Weise controliren wie oben, und es erstreckt sich die Wirkung davon auch auf die zu $r(6)$ und $r(7)$ gehörigen Functionen, obgleich N' und N'' Null sind. Die ersten Controlrechnungen stehen wie folgt

$$N.f(5,XIV) = +0.07994$$

$$N_{,}.f(1,X) = -0.1487,\quad N_{,}.f(1,XII) = +0.0003,\quad N_{,}.f(1,XIV) = -0.00167$$

$$N_{,,}.f(2,X) = +0.2617,\quad N_{,,}.f(2,XII) = -0.0471,\quad N_{,,}.f(2,XIV) = -0.09790$$

$$N_{,,,}.f(3,X) = -0.1130,\quad N_{,,,}.f(3,XII) = +0.1174,\quad N_{,,,}.f(3,XIV) = +0.00580$$

$$N_{,,,,}.f(4,X) = 0.0000,\quad N_{,,,,}.f(4,XII) = -0.0706,\quad N_{,,,,}.f(4,XIV) = +0.01382$$

$$\text{Sa.} = 0.0000 \qquad \text{Sa.} = 0.0000 \qquad \text{Sa.} = -0.00001$$

20.

Der Beitrag, den die in Rede stehende Station jetzt zu den Coefficienten der Endgleichungen liefert, ist der folgende.

r	(IX,IX)	(IX,X)	(IX,XII)	(IX,XIV)	(IX,XV)	(IX,XVI)
1	0.04167	+0.0644	−0.00015	+0.00072	+0.00543	0.
2	0.04167	+0.1133	−0.02040	−0.04239	−0.00543	0.
	0.08334	+0.1777	−0.02055	−0.04167	0.	

r	(IX,XVII)	(IX,XVIII)	(IX,XIX)	(IX,XX)	(IX,XXII)	
1	−0.00881	0.	0.	0.	0.	
2	+0.00881	0.	0.	0.	0.	
	0.					

r	(X,X)	(X,XII)	(X,XIV)	(X,XV)	(X,XVI)	(X,XVII)
1	0.1038	−0.00023	+0.0012	+0.00874	0.	−0.01420
2	0.3007	−0.05414	−0.1125	−0.01441	0.	+0.02339
3	0.0383	−0.03981	−0.0020	+0.07162	0.	−0.00920
	0.4428	−0.09418	−0.1133	+0.06595		−0.00001

r	(X,XVIII)	(X,XIX)	(X,XX)	(X,XXII)		
1	0.	0.	0.	0.		
2	0.	0.	0.	0.		
3	0.	0.	0.	0.		

r	(XII,XII)	(XII,XIV)	(XII,XV)	(XII,XVI)	(XII,XVII)	(XII,XVIII)
2	0.01006	+0.02091	+0.00268	0.	−0.00435	0.
3	0.03980	+0.00197	−0.07163	0.	+0.00920	0.
4	0.01261	−0.00247	−0.04462	0.	+0.04017	0.
	0.06247	+0.02041	−0.11357		+0.04502	

r	(XII,XIX)	(XII,XX)	(XII,XXII)			
2	0.	0.	0.			
3	0.	0.	0.			
4	0.	0.	0.			

r	(XIV,XIV)	(XIV,XV)	(XIV,XVI)	(XIV,XVII)	(XIV,XVIII)	(XIV,XIX)
5	0.04614	−0.00767	0.	+0.09064	0.	0.
2	0.04239	+0.00543	0.	−0.00881	0.	0.
	0.08853	−0.00224		+0.08183		

r	(XIV,XX)	(XIV,XXII)				
5	0.	0.				
2	0.	0.				

r	(XV,XV)	(XV,XVI)	(XV,XVII)	(XV,XVIII)	(XV,XIX)	(XV,XX)
5	0.0013	0.	−0.0151	0.	0.	0.
3	0.1234	0.	−0.0158	0.	0.	0.
4	0.1593	0.	−0.1434	0.	0.	0.
	0.2840		−0.1743			

r	(XV,XXII)
5	0.
3	0.
4	0.

r	(XVI,XVI)	(XVI,XVII)	(XVI,XVIII)	(XVI,XIX)	(XVI,XX)	(XVI,XXII)
5	0.	−0.09064	0.	0.	0.	0.
6	0.08333	−0.05038	−0.08333	+0.1410	−0.04167	+0.02126
	0.08333	−0.14102	−0 08333	+0.1410	−0.04167	+0.02126

r	(XVII XVII)	(XVII,XVIII)	(XVII,XIX)	(XVII,XX)	(XVII,XXII)
5	0.3314	0.	0.	0.	0.
6	0.0853	+0.1410	−0.2386	+0.07050	−0.03598
4	0.1134	0.	0.	0.	0.
	0.5601	+0.1410	−0.2386	+0.07050	−0.03598

r	(XVIII,XVIII)	(XVIII,XIX)	(XVIII,XX)	(XVIII,XXII)
6	0.08333	−0.1410	+0.04167	−0.02126

r	(XIX,XIX)	(XIX,XX)	(XIX,XXII)
6	0.2386	−0.07050	+0.03598

r	(XX,XX)	(XX,XXII)
6	0.04167	−0.02126
7	0.04165	−0.02125
	0.08332	−0.04251

r	(XXII,XXII)
6	0.01086
7	0.01086
	0.02172

Vergleicht man die vorstehenden Werthe der Coefficienten mit denen des Art. 18, die ohne die Zerlegung der Stationsgleichungen erhalten worden sind, so wird man eine so vollständige Uebereinstimmung finden, wie die angewandten Logarithmen erlauben, obgleich die einzelnen Glieder, aus welchen jeder Coefficient besteht, oftmals sehr von einander verschieden sind. Die Anwendung der Zerlegung der Stations-

gleichungen führt also auf dieselben Endgleichungen, die man bekommt, wenn man diese Zerlegung nicht anwendet. Die Werthe der Unbekannten dieser Gleichungen, die in der Abhandlung mit (*I*), (*II*), (*III*), etc. bezeichnet wurden, sind also in beiden Fällen dieselben.

21.

Um die Vergleichung der beiden Verfahrungsarten vollständig auszuführen, ist noch nachzuweisen, dass auch die Verbesserungen $z(r)$ der Richtungen mit einander übereinstimmen, oder wenigstens nur um eine constante Grösse von einander verschieden sind. Zufolge des allgemeinen Ausdrucks

$$z(r) = f(r,I)(I) + f(r,II)(II) + f(r,III)(III) + \text{etc.}$$

bekommt man aus dem Art. 17

$$z(1) = -0.0417(IX) - 0.0644(X) + 0.0001(XII) - 0.0203(XIV) - 0.0022(XV) - 0.0265(XVI) + 0.0152(XVII) + 0.0265(XVIII) - 0.0449(XIX)$$

u. s. w. Um diese Gleichungen übersichtlich aufzustellen, will ich sie in dieselbe tabularische Form bringen die oben angewandt wurde. Es wird daher

	(*IX*)	(*X*)	(*XII*)	(*XIV*)	(*XV*)	(*XVI*)
$z(1) =$	−0.0417	−0.0644	+0.0001	−0.0203	−0.0022	−0.0265
$z(2) =$	+0.0417	+0.1133	−0.0204	−0.0620	−0.0022	−0.0265
$z(3) =$		−0.0367	+0.0381	−0.0177	−0.0654	−0.0265
$z(4) =$			−0.0229	−0.0151	+0.0844	−0.0265
$z(5) =$				+0.0265	−0.0044	−0.0265
$z(6) =$				+0.0265	−0.0044	+0.0568
$z(7) =$				+0.0265	−0.0044	+0.0151

ferner	(*XVII*)	(*XVIII*)	(*XIX*)	(*XX*)	(*XXII*)	
$z(1)$	+0.0152	+0.0265	−0.0449			
$z(2)$	+0.0152	+0.0265	−0.0449			
$z(3)$	+0.0152	+0.0265	−0.0449			
$z(4)$	−0.0666	+0.0265	−0.0449			
$z(5)$	+0.0970	+0.0265	−0.0449			
$z(6)$	−0.0439	−0.0568	+0.0961	−0.0417	+0.0213	
$z(7)$	+0.0265	−0.0151	+0.0256	+0.0417	−0.0213	

wogegen der Art. 19 die folgende Zusammenstellung giebt.

	(IX)	(X)	(XII)	(XIV)	(XV)	(XVI)
$z(1) =$	−0.0417	−0.0644	+0.0001	−0.0007	−0.0054	
$z(2) =$	+0.0417	+0.1133	−0.0204	−0.0424	−0.0054	
$z(3) =$		−0.0367	+0.0381	+0.0019	−0.0686	
$z(4) =$			−0.0229	+0.0045	+0.0811	
$z(5) =$				+0.0461	−0.0077	
$z(6) =$				+0.0461	−0.0077	+0.0833
$z(7) =$				+0.0461	−0.0077	+0.0417

ferner	(XVII)	(XVIII)	(XIX)	(XX)	(XXII)	
$z(1)$	+0.0088					
$z(2)$	+0.0088					
$z(3)$	+0.0088					
$z(4)$	−0.0730					
$z(5)$	+0.0906					
$z(6)$	−0.0504	−0.0833	+0.1410	−0.0417	+0.0213	
$z(7)$	+0.0201	−0.0417	+0.0705	+0.0417	−0.0213	

Man erkennt leicht, dass dieses zweite System von Ausdrücken der $z(r)$ mit dem ersten identisch wird, wenn man jeder Gleichung desselben die constante Grösse

$$-\ 0.0196\ (XIV) + 0.0032\ (XV) - 0.0265\ (XVI)$$
$$+\ 0.0064\ (XVII) + 0.0265\ (XVIII) - 0.0449\ (XIX)$$

hinzufügt. Beide bis jetzt vollständig erörterte Verfahrungsarten führen daher auf identische Endresultate für die Ausgleichung eines Dreiecksnetzes.

22.

Gehen wir noch, um möglichst vollständig zu sein, die übrigen im Vorhergehenden erklärten Zerlegungsarten durch. Um das Verfahren des Art. 12 weiter auszuführen, haben wir zu berücksichtigen, dass die beiden letzten Unbekannten nicht die Richtungen (6) und (7) selbst, sondern die Unterschiede dieser mit der Richtung (5) sind, und dieselben Unbekannten in die Differentialquotienten der Bedingungsgleichungen einzuführen. Es ist zu dem Ende nichts weiter zu thun, als die Identitäten

$$\{(6) - (5)\} + (5) = (6)\ ,\ \{(7) - (5)\} + (5) = (7)$$

aufzustellen, und diese statt (6) und (7) zu substituiren. Die Tafel des Art. 16 steht daher jetzt so,

r	$q(r,IX)$	$\log q(r,X)$	$\log q(r,XII)$	$q(r,XIV)$	$\log q(r,XV)$	$q(r,XVI)$
1	-1	0.2071n	—	—	—	—
2	$+1$	0.4239	9.6930n	-1	—	—
3	—	0.0185n	0.0185	—	0.2547n	—
4	—	—	9.7405n	—	0.2931	—
5	—	—	—	$+1$	9.2205n	—
(6)—(5)	—	—	—		—	$+1$
(7)—(5)	—	—	—		—	—

r	$\log q(r,XVII)$	$q(r,XVIII)$	$\log q(r,XIX)$	$q(r,XX)$	$\log q(r,XXII)$	
1	—	—	—	—	—	
2	—	—	—	—	—	
3	—	—	—	—	—	
4	0.2931n	—	—	—	—	
5	0.2931	—	—	—	—	
(6)—(5)	0.2284n	-1	0.2284	-1	9.7080	
(7)—(5)	—	—	—	$+1$	9.7080n	

Die jetzt anzuwendenden, aus dem Art. 12 zu entnehmenden Hülfsgrössen sind

$$\beta''' = 0\,, \qquad \beta^{IV} = 0\,, \qquad \beta^{V} = 0\,, \quad \delta^{VI} = 0$$
$$\gamma''' = +(8.6990)\,, \quad \gamma^{IV} = +(8.7448)\,, \quad \gamma^{V} = 0\,, \quad \gamma^{VI} = 0$$
$$\delta^{IV} = +(9.0458)\,, \quad \delta^{V} = 0\,, \quad \delta^{VI} = 0$$
$$\varepsilon^{V} = 0\,, \quad \varepsilon^{VI} = 0$$
$$\zeta^{VI} = +(9.6990)$$

$$(1,1) = (1.3802)\,, \quad (5,5,4) = (1.3290)$$
$$(2,2,1) = (1.3802)\,, \quad (6,6,5) = (1.2041)$$
$$(3,3,2) = (1.4260)\,, \quad (7,7,6) = (1.0792)$$
$$(4,4,3) = (1.3345)\,,$$

und hiemit erhält man die folgenden Werthe.

r	$\log\eta(r,IX)$	$\log\eta(r,X)$	$\log\eta(r,XII)$	$\log\eta(r,XIV)$	$\log\eta(r,XV)$	$\log\eta(r,XVI)$
1	0. n	0.2071n	—	—	—	—
2	0.	0.4293	9.6930n	0. n	—	—
3	—	0.0185n	0.0185	—	0.2547n	—
4	—	8.7175n	9.6971n	—	0.2728	—
5	—	8.7633n	7.4983n	0.	8.6794n	—
(6)—(5)	—	—	—	—	—	0.
(7)—(5)	—	—	—	—	—	9.6990

r	$\log\eta(r,XVII)$	$\log\eta(r,XVIII)$	$\log\eta(r,XIX)$	$\log\eta(r,XX)$	$\log\eta(r,XXII)$	
1	—	—	—	—	—	
2	—	—	—	—	—	
3	—	—	—	—	—	
4	0.2931n	—	—	—	—	
5	0.2420	—	—	—	—	
(6)—(5)	0.2284n	0. n	0.2284	0. n	9.7080	
(7)—(5)	9.9274n	9.6990n	9.9274	9.6990	9.4070n	

r	$\log Q(r,IX)$	$\log Q(r,X)$	$\log Q(r,XII)$	$\log Q(r,XIV)$	$\log Q(r,XV)$	$\log Q(r,XVI)$
1	8.6198n	8.8269n	—	—	—	—
2	8.6198	9.0437	8.3128n	8.6198n	—	—
3	—	9.5925n	8.5925	—	8.8287n	—
4	—	7.3830n	8.3626n	—	8.9383	—
5	—	7.4343n	6.169n	8.6710	7.3504n	—
(6) — (5)	—	—	—	—	—	8.7959
(7) — (5)	—	—	—	—	—	8.6198

r	$\log Q(r,XVII)$	$\log Q(r,XVIII)$	$\log Q(r,XIX)$	$\log Q(r,XX)$	$\log Q(r,XXII)$	
1	—	—	—	—	—	
2	—	—	—	—	—	
3	—	—	—	—	—	
4	8.9586n	—	—	—	—	
5	8.9130	—	—	—	—	
(6) — (5)	9.0243n	8.7959n	9.0243	8.7959n	8.5039	
(7) — (5)	8.8482n	8.6198n	8.8482	8.6198	8.3278n	

r	$\log f(r,IX)$	$\log f(r,X)$	$\log f(r,XII)$	$\log f(r,XIV)$	$\log f(r,XV)$	$\log f(r,XVI)$
1	8.6198n	8.8269n	—	—	—	—
2	8.6198	9.0437	8.3128n	8.6198n	—	—
3	—	8.5955n	8.5795	7.4158	8.8006n	—
4	—	7.4343n	8.3630n	7.7168	8.9371	—
5	—	7.4343n	6.169 n	8.6710	7.3504n	—
(6) — (5)	—	—	—	—	—	8.9208
(7) — (5)	—	—	—	—	—	8.6198

r	$\log f(r,XVII)$	$\log f(r,XVIII)$	$\log f(r,XIX)$	$\log f(r,XX)$	$\log f(r,XXII)$	
1	—	—	—	—	—	
2	—	—	—	—	—	
3	—	—	—	—	—	
4	8.9129n	—	—	—	—	
5	8.9130	—	—	—	—	
(6) — (5)	9.1492n	8.9208n	9.1492	8.6198n	8.3278	
(7) — (5)	8.8482n	8.6198n	8.8482	8.6198	8.3278n	

Die f Functionen lassen sich wieder eben so controliren wie die vorhergehenden; hier entziehen sich jedoch dieser Controle diejenigen, die zu (6)—(5) und (7)—(5) gehören, weil N^{V} und N^{VI} Null sind, und eine völlige Unabhängigkeit von den vorhergehenden Grössen statt findet.

23.

Der Beitrag, den beim gegenwärtigen Verfahren die in Rede stehende Station zu den Coefficienten der Endgleichungen liefert, ist der folgende.

r	(IX,IX)	(IX,X)	(IX,XII)	(IX,XIV)	(IX,XV)	(IX,XVI)
1	0.04167	+0.0671	0.	0.	0.	0.
2	0.04167	+0.1106	−0.02055	−0.04167	0.	0.
	0.08334	+0.1777	−0.02055	−0.04167		

r	(IX,XVII)	(IX,XVIII)	(IX,XIX)	(IX,XX)	(IX,XXII)	
1	0.	0.	0.	0.	0.	
2	0.	0.	0.	0.	0.	

r	(X,X)	(X,XII)	(X,XIV)	(X,XV)	(X,XVI)	(X,XVII)
1	0.1082	0.	0.	0.	0.	0.
2	0.2935	−0.05454	−0.1106	0.	0.	0.
3	0.0411	−0.03964	−0.0027	+0.06593	0.	0.
	0.4428	−0.09418	−0.1133	+0.06593		

r	(X,XVIII)	(X,XIX)	(X,XX)	(X,XXII)		
1	0.	0.	0.	0.		
2	0.	0.	0.	0.		
4	0.	0.	0.	0.		

r	(XII,XII)	(XII,XIV)	(XII,XV)	(XII,XVI)	(XII,XVII)	(XII,XVIII)
2	0.01014	+0.02055	0.	0.	0.	0.
3	0.03964	+0.00272	−0.06593	0.	0.	0.
4	0.01269	−0.00287	−0.04760	0.	+0.04503	0.
	0.06247	+0.02040	−0.11353		+0.04503	

r	(XII,XIX)	(XII,XX)	(XII,XXII)			
2	0.	0.	0.			
3	0.	0.	0.			
4	0.	0.	0.			

r	(XIV,XIV)	(XIV,XV)	(XIV,XVI)	(XIV,XVII)	(XIV,XVIII)	(XIV,XIX)
2	0.04167	0.	0.	0.	0.	0.
5	0.04687	−0.00224	0.	+0.08184	0.	0.
	0.08854	−0.00224		+0.08184		

r	(XIV,XX)	(XIV,XXII)				
2	0.	0.				
5	0.	0.				

r	(XV,XV)	(XV,XVI)	(XV,XVII)	(XV,XVIII)	(XV,XIX)	(XV,XX)
3	0.1136	0.	0.	0.	0.	0.
4	0.1699	0.	−0.1607	0.	0.	0.
5	0.0004	0.	−0.0136	0.	0.	0.
	0.2839		−0.1743			

r	$(XV,XXII)$					
3	0.					
4	0.					
5	0.					

r	(XVI,XVI)	$(XVI,XVII)$	$(XVI,XVIII)$	(XVI,XIX)	(XVI,XX)	$(XVI,XXII)$
(6) — (5)	−0.08333	−0.1410	−0.08333	+0.1410	−0.04167	+0.02127

r	$(XVII,XVII)$	$(XVII,XVIII)$	$(XVII,XIX)$	$(XVII,XX)$	$(XVII,XXII)$	
4	0.1607	0.	0.	0.	0.	
5	0.1607	0.	0.	0.	0.	
(6) — (5)	0.2386	+0.1410	−0.2385	+0.07050	−0.03599	
	0.5600	+0.1410	−0.2385	+0.07050	−0.03599	

r	$(XVIII,XVIII)$	$(XVIII,XIX)$	$(XVIII,XX)$	$(XVIII,XXII)$		
(6) — (5)	0.08333	−0.1410	+0.04167	−0.02127		

r	(XIX,XIX)	(XIX,XX)	$(XIX,XXII)$			
(6) — (5)	0.2386	−0.07050	+0.03599			

r	(XX,XX)	$(XX,XXII)$				
(6) — (5)	0.04167	−0.02127				
(7) — (5)	0.04167	−0.02127				
	0.08334	−0.04254				

r	$(XXII,XXII)$					
(6) — (5)	0.01086					
(7) — (5)	0.01086					
	0.02172					

Die Vergleichung dieser Werthe mit den vorhergehenden durch andere Verfahrungsarten erhaltenen zeigt wieder die erwartete Uebereinstimmung.

24.

Zur Vergleichung der sich jetzt herausstellenden Ausdrücke der $z(r)$ mache ich zuerst die folgende Zusammenstellung aus dem Art. 22, in welcher ich durch Addition des Ausdrucks für $z(5)$ zu den beiden folgenden die Ausdrücke für $z(6)$ und $z(7)$ erhalten habe.

	(IX)	(X)	(XII)	(XIV)	(XV)	(XVI)
z(1) =	−0.0417	−0.0671				
z(2) =	+0.0417	+0.1106	−0.0205	−0.0417		
z(3) =		−0.0394	+0.0380	+0.0026	−0.0632	
z(4) =		−0.0027	−0.0231	+0.0052	+0.0865	
z(5) =		−0.0027	−0.0001	+0.0469	−0.0022	
z(6) =		−0.0027	−0.0001	+0.0469	−0.0022	+0.0833
z(7) =		−0.0027	−0.0001	+0.0469	−0.0022	+0.0417

ferner	(XVII)	(XVIII)	(XIX)	(XX)	(XXII)	
z(1)						
z(2)						
z(3)						
z(4)	−0.0818					
z(5)	+0.0818					
z(6)	−0.0592	−0.0833	+0.1410	−0.0417	+0.0213	
z(7)	+0.0413	−0.0417	+0.0705	+0.0417	−0.0213	

Die Vergleichung dieser mit der ersten Gruppe von ähnlichen Gleichungen des Art. 21 giebt zu erkennen, dass beide Gruppen identisch werden, wenn man in der vorstehenden jeder Gleichung die Constante

+ 0.0027 (*X*) + 0.0001 (*XII*) − 0.0203 (*XIV*) − 0.0022 (*XV*) − 0.0265(*XVI*) + 0.0152 (*XVII*) + 0.0265(*XVIII*) − 0.0449(*XIX*)

hinzufügt. Die hier behandelte Zerlegung führt daher auf dieselben Werthe der Ausgleichung der Winkel des Dreiecksnetzes, wie die vorhergehenden.

25.

Gehen wir jetzt zum Verfahren des Art. 13 über, und führen auch für dieses den zweiten Theil der Auflösung aus, so müssen wir vor Allem in dem Täfelchen der Differentialquotienten der Bedingungsgleichungen statt der fünf ersten Richtungen selbst ihre Unterschiede mit der ersten derselben einführen, während die Unterschiede (6)—(5) und (7)—(5) unverändert beibehalten werden müssen. Man erkennt aber leicht, dass die Einführung von (2)—(1), (3)—(1), etc. statt (2), (3), etc. die in der Tafel des Art. 22 angegebenen Werthe der $q(r,IX)$, $q(r,X)$, etc. gar nicht ändert, und es kann also unter der Bedingung, dass man die neben der 1 angegebenen Werthe weglässt, diese Tafel im gegenwärtigen Falle wieder angewandt werden.

Die jetzt anzuwendenden Hülfsgrössen sind zufolge des Art. 13 die folgenden,

$$\beta''=+(9.4559),\beta'''=+(9.4881),\beta^{IV}=+(9.6727),\beta^{V}=0,\beta^{VI}=0$$
$$\gamma'''=+(9.5145),\gamma^{IV}=+(9.6990),\gamma^{V}=0,\gamma^{VI}=0$$
$$\delta^{IV}=+(9.7238),\delta^{V}=0,\delta^{VI}=0$$
$$\varepsilon^{V}=0,\varepsilon^{VI}=0$$
$$\zeta^{VI}=+(9.6990)$$

$$(2,2,1) = (1.2711)\ ,\ (5,5,4) = (1.0528)$$
$$(3,3,2) = (1.2969)\ ,\ (6,6,5) = (1.2044)$$
$$(4,4,3) = (1.1957)\ ,\ (7,7,6) = (1.0792)$$

und hiemit ergeben sich die folgenden Werthe,

r	$\log\eta(r,IX)$	$\log\eta(r,X)$	$\log\eta(r,XII)$	$\log\eta(r,XIV)$	$\log\eta(r,XV)$	$\log\eta(r,XVI)$
(2)—(1)	0.	0.4239	9.6930n	0. n	—	—
(3)—(1)	9.4559	9.4558n	9.9557	9.4559n	0.2547n	—
(4)—(1)	9.4881	9.6771	9.5571n	9.4881n	0.1386	—
(5)—(1)	9.6727	9.8617	7.230 n	9.7237	8.4031n	—
(6)—(5)	—	—	—	—	—	0.
(7)—(5)	—	—	—	—	—	9.6990

r	$\log\eta(r,XVII)$	$\log\eta(r,XVIII)$	$\log\eta(r,XIX)$	$\log\eta(r,XX)$	$\log\eta(r,XXII)$	
(2)—(1)	—	—	—	—	—	
(3)—(1)	—	—	—	—	—	
(4)—(1)	0.2931n	—	—	—	—	
(5)—(1)	9.9658	—	—	—	—	
(6)—(5)	0.2284n	0. n	0.2284	0. n	9.7080	
(7)—(5)	9.9274n	9.6990n	9.9274	9.6990	9.4070n	

r	$\log Q(r,IX)$	$\log Q(r,X)$	$\log Q(r,XII)$	$\log Q(r,XIV)$	$\log Q(r,XV)$	$\log Q(r,XVI)$
(2)—(1)	8.7289	9.4528	8.4219n	8.7289n	—	—
(3)—(1)	8.1590	8.1589n	8.6588	8.1590n	8.9578n	—
(4)—(1)	8.2924	8.4814	8.3614n	8.2924n	8.9429	—
(5)—(1)	8.1699	8.3089	6.177 n	9.6709	7.3503n	—
(6)—(5)	—	—	—	—	—	8.7959
(7)—(5)	—	—	—	—	—	8.6198

r	$\log Q(r,XVII)$	$\log Q(r,XVIII)$	$\log Q(r,XIX)$	$\log Q(r,XX)$	$\log Q(r,XXII)$	
(2)—(1)	—	—	—	—	—	
(3)—(1)	—	—	—	—	—	
(4)—(1)	9.0974n	—	—	—	—	
(5)—(1)	8.9130	—	—	—	—	
(6)—(5)	9.0234n	8.7959n	9.0243	8.7959n	8.5039	
(7)—(5)	8.8482n	8.6198n	8.8482	8.6198	8.3278n	

r	log f(r,IX)	log f(r,X)	log f(r,XII)	log f(r,XIV)	log f(r,XV)	log f(r,XVI)
(2)—(1)	8.9208	9.2497	8.3126*n*	8.6196*n*	—	—
(3)—(1)	8.6198	8.4425	8.5798	7.4158	8.8606*n*	—
(4)—(1)	8.6198	8.8088	8.3627*n*	7.7468	8.9370	—
(5)—(1)	8.6199	8.8089	6.477 *n*	8.6709	7.3503*n*	—
(6)—(5)	—	—	—	—	—	8.9208
(7)—(5)	—	—	—	—	—	8.6198

r	log f(r,XVII)	log f(r,XVIII)	log f(r,XIX)	log f(r,XX)	log f(r,XXII)	
(2)—(1)	—	—	—	—	—	
(3)—(1)	—	—	—	—	—	
(4)—(1)	8.9130*n*	—	—	—	—	
(5)—(1)	8.9130	—	—	—	—	
(6)—(5)	9.1492*n*	8.9208*n*	9.1492	8.6198*n*	8.3278	
(7)—(5)	8.8482*n*	8.6198*n*	8.8482	8.6198	8.3278*n*	

Die Bedingungsgleichung, durch welche im Vorhergehenden die Werthe der *f* Functionen geprüft werden konnten, ist hier nicht anwendbar, da jetzt alle *N* Null sind.

26.

Der Beitrag, den die Station jetzt zu den Endgleichungen liefert, steht wie folgt, zur Abkürzung jedoch habe ich die Coefficienten, die unmittelbar Null werden, weggelassen.

r	(IX,IX)	(IX,X)	(IX,XII)	(IX,XIV)		
(2)—(1)	0.08333	+0.1777	—0.02054	—0.04165		
r	(X,X)	(X,XII)	(X,XIV)	(X,XV)		
(2)—(1)	0.4717	—0.05451	—0.1106	0.		
(3)—(1)	—0.0289	—0.03965	—0.0027	+0.06593		
	0.4428	—0.09416	—0.1133	+0.06593		
r	(XII,XII)	(XII,XIV)	(XII,XV)	(XII,XVII)		
(2)—(1)	0.01013	+0.02054	0.	0.		
(3)—(1)	0.03965	+0.00272	—0.06593	0.		
(4)—(1)	0.01268	—0.00287	—0.04759	+0.04503		
	0.06246	+0.02039	—0.11352	+0.04503		
r	(XIV,XIV)	(XIV,XV)	(XIV,XVII)			
(2)—(1)	0.04165	0.	0.			
(3)—(1)	0.04687	—0.00224	+0.08184			
	0.08852	—0.00224	+0.08184			

r	(XV,XV)	$(XV,XVII)$				
(3) — (1)	0.1136	0.				
(4) — (1)	0.1699	—0.1607				
(5) — (1)	0.0004	—0.0136				
	0.2839	—0.1743				
r	(XVI,XVI)	$(XVI,XVII)$	$(XVI,XVIII)$	(XVI,XIX)	(XVI,XX)	$(XVI,XXII)$
(6) — (5)	0.08333	—0.1410	—0.08333	+0.1410	—0.04167	+0.02127
r	$(XVII,XVII)$	$(XVII,XVIII)$	$(XVII,XIX)$	$(XVII,XX)$	$(XVII,XXII)$	
(4) — (1)	0.1607	0.	0.	0.	0.	
(5) — (1)	0.1607	0.	0.	0.	0.	
(6) — (5)	0.2386	+0.1410	—0.2385	+0.07050	—0.03599	
	0.5600	+0.1410	—0.2385	+0.07050	—0.03599	
r	$(XVIII,XVIII)$	$(XVIII,XIX)$	$(XVIII,XX)$	$(XVIII,XXII)$		
(6) — (5)	0.08333	—0.1410	+0.04167	—0.02127		
r	(XIX,XIX)	(XIX,XX)	$(XIX,XXII)$			
(6) — (5)	0.2385	—0.07050	+0.03599			
r	(XX,XX)	$(XX,XXII)$				
(6) — (5)	0.04167	—0.02127				
(7) — (5)	0.04167	—0.02127				
	0.08334	—0.04254				
r	$(XXII,XXII)$					
(6) — (5)	0.01086					
(7) — (5)	0.01086					
	0.02172					

Auch diese Coefficienten stimmen mit den im Vorhergehenden auf verschiedene Arten überein, und die Unbekannten der Endgleichungen bekommen also wieder dieselben Werthe wie vorher.

27.

Stellt man wieder die Gleichungen für die $z(r)$ auf dieselbe Art zusammen wie vorher, so ergiebt sich,

	(IX)	(X)	(XII)	(XIV)	(XV)	(XVI)
$z(2)-z(1)=$	+0.0833	+0.1777	−0.0205	−0.0417		
$z(3)-z(1)=$	+0.0417	+0.0277	+0.0380	+0.0026	−0.0632	
$z(4)-z(1)=$	+0.0417	+0.0644	−0.0231	+0.0052	+0.0865	
$z(5)-z(1)=$	+0.0417	+0.0644	−0.0002	+0.0469	−0.0022	
$z(6)-z(1)=$	+0.0417	+0.0644	−0.0002	+0.0469	−0.0022	+0.0833
$z(7)-z(1)=$	+0.0417	+0.0644	−0.0002	+0.0469	−0.0022	+0.0417

ferner	(XVII)	(XVIII)	(XIX)	(XX)	(XXII)	
$z(2)-z(1)$						
$z(3)-z(1)$						
$z(4)-z(1)$	−0.0818					
$z(5)-z(1)$	+0.0818					
$z(6)-z(1)$	−0.0592	−0.0833	+0.1410	−0.0417	+0.0213	
$z(7)-z(1)$	+0.0113	−0.0417	+0.0705	+0.0417	−0.0213	

Die Vergleichung dieser Werthe mit denen der Artt. 21 und 24 bewirkt man dadurch, dass man in diesen die Gleichung für $z(1)$ von allen übrigen abzieht; man findet vollständige Uebereinstimmung.

28.

Wenden wir uns endlich auch zu dem Verfahren, welches im Art. 15 vorbereitet wurde, so müssen wir alle Differentialquotienten der Bedingungsgleichungen auf die Unterschiede (1)—(5), (2)—(5), etc. der Richtungen beziehen, und man findet leicht, dass dieses dadurch bewirkt wird, dass man im Täfelchen des Art. 16 die neben der 5 stehenden Zahlen sich weg denkt. Mit dieser Auslassung ist daher dieses Täfelchen jetzt anzuwenden.

Die Hülfsgrössen, die aus dem Art. 15 zu entnehmen sind, sind die folgenden.

$$\alpha'=+(9.4559),\ \alpha''=+(9.6021),\ \alpha'''=+(9.6990),\ \alpha^{IV}=0,\ \alpha^{V}=0,\ \alpha^{VI}=0$$
$$\beta''=+(9.6021),\ \beta'''=+(9.6990),\ \beta^{IV}=0,\ \beta^{V}=0,\ \beta^{VI}=0$$
$$\gamma'''=+(9.6990),\ \gamma^{IV}=0,\ \gamma^{V}=0,\ \gamma^{VI}=0$$
$$\delta^{IV}=0,\ \delta^{V}=0,\ \delta^{VI}=0$$
$$\varepsilon^{V}=0,\ \varepsilon^{VI}=0$$
$$\zeta^{VI}=+(9.6990)$$

$$(1,1) = (1.2711),\ (4,4,3) = (1.0792)$$
$$(2,2,1) = (1.2341),\ (6,6,5) = (1.2041)$$
$$(3,3,2) = (1.2322),\ (7,7,6) = (1.0792)$$

vermittelst welcher die folgenden Werthe erlangt werden,

r	$\log\eta(r,IX)$	$\log\eta(r,X)$	$\log\eta(r,XII)$	$\log\eta(r,XIV)$	$\log\eta(r,XV)$	$\log\eta(r,XVI)$
(1) — (5)	0. n	0.2071n	—	—	—	—
(2) — (5)	9.8539	0.3412	9.6930n	0. n	—	—
(3) — (5)	—	9.7967n	9.9275	9.6021n	0.2547n	—
(4) — (5)	—	—	9.4391n	9.6990n	0.0274	—
(6) — (5)	—	—	—	—	—	0.
(7) — (5)	—	—	—	—	—	9.6990

r	$\log\eta(r,XVII)$	$\log\eta(r,XVIII)$	$\log\eta(r,XIX)$	$\log\eta(r,XX)$	$\log\eta(r,XXII)$	
(1) — (5)	—	—	—	—	—	
(2) — (5)	—	—	—	—	—	
(3) — (5)	—	—	—	—	—	
(4) — (5)	0.2931n	—	—	—	—	
(6) — (5)	0.2284n	0. n	0.2284	0. n	9.7080	
(7) — (5)	9.9274n	9.6990n	9.9274	9.6990	9.4070n	

r	$\log Q(r,IX)$	$\log Q(r,X)$	$\log Q(r,XII)$	$\log Q(r,XIV)$	$\log Q(r,XV)$	$\log Q(r,XVI)$
(1) — (5)	8.7289n	8.9360n	—	—	—	—
(2) — (5)	8.6198	9.1071	8.4589n	8.7659n	—	—
(3) — (5)	—	8.5645n	8.6953	8.3699n	9.0225n	—
(4) — (5)	—	—	8.3599n	8.6198n	8.9482	—
(6) — (5)	—	—	—	—	—	8.7959
(7) — (5)	—	—	—	—	—	8.6198

r	$\log Q(r,XVII)$	$\log Q(r,XVIII)$	$\log Q(r,XIX)$	$\log Q(r,XX)$	$\log Q(r,XXII)$	
(1) — (5)	—	—	—	—	—	
(2) — (5)	—	—	—	—	—	
(3) — (5)	—	—	—	—	—	
(4) — (5)	9.2139n	—	—	—	—	
(6) — (5)	9.0243n	8.7959n	9.0243	8.7959n	8.5039	
(7) — (5)	8.8482n	8.6198n	8.8482	8.6198	8.3278n	

r	$\log f(r,IX)$	$\log f(r,X)$	$\log f(r,XII)$	$\log f(r,XIV)$	$\log f(r,XV)$	$\log f(r,XVI)$
(1) — (5)	8.6197n	8.8090n	6.176	8.6709n	7.3522	—
(2) — (5)	8.6197	9.0542	8.3094n	8.9471n	7.3522	—
(3) — (5)	—	8.5645n	8.5814	8.6461n	8.7848n	—
(4) — (5)	—	—	8.3599n	8.6198n	8.9482	—
(6) — (5)	—	—	—	—	—	8.9208
(7) — (5)	—	—	—	—	—	8.6198

r	log f(r,XVII)	log f(r,XVIII)	log f(r,XIX)	log f(r,XX)	log f(r,XXII)	
(1)—(5)	8.9129n	—	—	—	—	
(2)—(5)	8.9129n	—	—	—	—	
(3)—(5)	8.9129n	—	—	—	—	
(4)—(5)	9.2139n	—	—	—	—	
(6)—(5)	9.1492n	8.9208n	9.1492	8.6198n	8.3276	
(7)—(5)	8.8482n	8.6197n	8.8481	8.6197	8.3276n	

Auch hier ist die oben angewandte Bedingungsgleichung zur Controle unwirksam.

29.

Der Beitrag zu den Coefficienten der Endgleichungen steht jetzt so.

r	(IX,IX)	(IX,X)	(IX,XII)	(IX,XIV)	(IX,XV)	(IX,XVII)
(1)—(5)	0.04166	+0.0644	−0.00015	+0.04687	−0.00225	+0.08182
(2)—(5)	0.04166	+0.1133	−0.02039	−0.08854	+0.00225	−0.08182
	0.08332	+0.1777	−0.02054	−0.04167	0.	0.

r	(X,X)	(X,XII)	(X,XIV)	(X,XV)	(X,XVII)	
(1)—(5)	0.1038	−0.00024	+0.0755	−0.00363	+0.1318	
(2)—(5)	0.3007	−0.05441	−0.2350	+0.00597	−0.2172	
(3)—(5)	0.0383	−0.03980	+0.0462	+0.06357	+0.0854	
	0.4428	−0.09415	−0.1133	+0.06591	0.	

r	(XII,XII)	(XII,XIV)	(XII,XV)	(XII,XVII)		
(2)—(5)	0.01006	+0.04366	−0.00111	+0.04035		
(3)—(5)	0.03980	−0.04620	−0.06357	−0.08538		
(4)—(5)	0.01260	+0.02293	−0.04883	+0.09004		
	0.06246	+0.02039	−0.11351	+0.04501		

r	(XIV,XIV)	(XIV,XV)	(XIV,XVII)			
(2)—(5)	0.08854	−0.00225	+0.08182			

r	(XV,XV)	(XV,XVII)				
(3)—(5)	0.1095	+0.1471				
(4)—(5)	0.1743	−0.3214				
	0.2838	−0.1743				

r	(XVI,XVI)	(XVI,XVII)	(XVI,XVIII)	(XVI,XIX)	(XVI,XX)	(XVI,XXII)
(6)—(5)	0.08333	−0.1410	−0.08333	+0.1410	−0.04167	+0.02126

r	(XVII,XVII)	(XVII,XVIII)	(XVII,XIX)	(XVII,XX)	(XVII,XXII)	
(4)—(5)	0.3214	0.	0.	0.	0.	
(6)—(5)	0.2386	+0.1410	—0.2386	+0.07050	—0.03597	
	0.5600	+0.1410	—0.2386	+0.07050	—0.03597	
r	(XVIII,XVIII)	(XVIII,XIX)	(XVIII,XX)	(XVIII,XXII)		
(6)—(5)	0.08333	—0.1410	+0.04167	—0.02126		
r	(XIX,XIX)	(XIX,XX)	(XIX,XXII)			
(6)—(5)	0.2386	—0.07050	+0.03597			
r	(XX,XX)	(XX,XXII)				
(6)—(5)	0.04167	—0.02126				
(7)—(5)	0.04167	—0.02126				
	0.08333	—0.04252				
r	(XXII,XXII)					
(6)—(5)	0.01086					
(7)—(5)	0.01086					
	0.02172					

Hier haben wir wieder dieselben Werthe erhalten wie vorher, und es werden daher auch jetzt die Unbekannten der Endgleichungen dieselben Werthe erhalten wie vorher.

30.

Die Zusammenstellung der Gleichungen für die $z(r)$ ist jetzt

	(IX)	(X)	(XII)	(XIV)	(XV)	(XVI)
$z(1)-z(5)=$	—0.0417	—0.0644	+0.0001	—0.0469	+0.0022	
$z(2)-z(5)=$	+0.0417	+0.1133	—0.0204	—0.0885	+0.0022	
$z(3)-z(5)=$		—0.0367	+0.0381	—0.0443	—0.0609	
$z(4)-z(5)=$			—0.0229	—0.0417	+0.0888	
$z(6)-z(5)=$						+0.0833
$z(7)-z(5)=$						+0.0417
ferner	(XVII)	(XVIII)	(XIX)	(XX)	(XXII)	
$z(1)-z(5)$	—0.0818					
$z(2)-z(5)$	—0.0818					
$z(3)-z(5)$	—0.0818					
$z(4)-z(5)$	—0.1636					
$z(6)-z(5)$	—0.1410	—0.0833	+0.1410	—0.0417	+0.0213	
$z(7)-z(5)$	—0.0705	—0.0417	+0.0705	+0.0417	—0.0213	

deren Vergleichung mit den vorhergehenden ähnlichen Zusammenstellungen auch vollständige Uebereinstimmung zeigt.

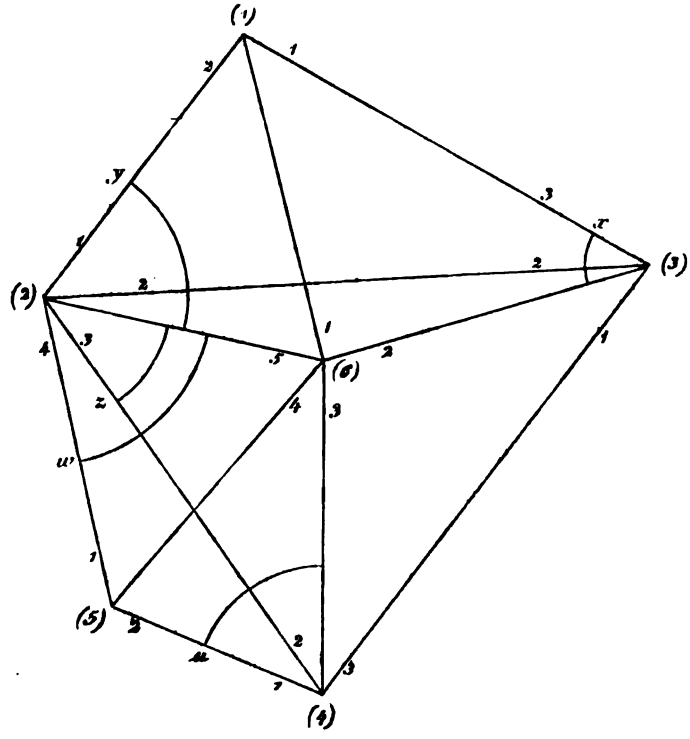
31.

Im Vorstehenden ist zur Gnüge gezeigt worden, dass die Zerlegung der Stationsgleichungen in zwei von einander unabhängige Systeme, wo dieses möglich ist, ganz ohne Einfluss auf die Endresultate ist, und die ausgeglichenen Werthe der Beobachtungen dieselben werden, wie in dem Falle, wo diese Zerlegung nicht angewandt worden ist. Es fragt sich hierauf, ob die Anwendung dieser Zerlegung in praktischer Beziehung räthlich ist, und diese Frage muss entschieden bejaht werden. Denn durch die Durchsicht des im Vorhergehenden ausgeführten Beispiels findet man, dass die Rechnung mit Anwendung der Zerlegung viel kürzer ist, wie ohne dieselbe, und dieses muss in jedem Falle eintreffen, da durch die Zerlegung immer eine Anzahl der sonst erforderlichen Hülfsgrössen Null werden. Die beiden ersten Arten der Zerlegung sind vortheilhafter wie die beiden letzten, schon wegen der Bedingungsgleichungen die bei jenen statt finden.

Suppl. 6. Ableitung der Bedingungsgleichungen in besonderen Fällen, mit Beibehaltung der im Vorhergehenden stets angewandten Form derselben.

1.

Das jetzt zu betrachtende Dreiecksnetz soll das durch die folgende Figur dargestellte sein.



Wir haben hier sechs Dreieckspunkte oder Stationen, die durch die Zeichen (1), (2), (3), (4), (5), (6) angegeben sind, und es soll angenommen werden, dass auf der

Station	(1)	die Richtungen	1, 2,	bez. nach	(3), (2)
-	(2)	- -	1, 2, 3, 4	- -	(1), (3), (4), (5)
-	(3)	- -	1, 2, 3,	- -	(4), (2), (1)
-	(4)	- -	1, 2, 3,	- -	(5), (2), (3)
-	(5)	- -	1, 2,	- -	(2), (4)
-	(6)	- -	1, 2, 3, 4, 5,	- -	(1), (3), (4), (5), (2)

eingeschnitten worden sind, wie in der Figur angedeutet ist. Es können immerhin von den Stationen (1), (2), (3), (4), (5) noch mehr Richtungen eingeschnitten worden sein, die aber für den jetzigen Zweck nicht beachtet zu werden brauchen. Feste Annahme ist aber hier, dass keine Richtung nach der Station (6) eingeschnitten worden sei, hingegen von der Station (6) die Richtungen nach allen anderen Stationen eingeschnitten worden seien. Es fragt sich jetzt nach den Bedingungsgleichungen, die unter diesen Umständen das Vorhandensein der Station (6) liefert.

2.

Es ist sehr leicht zu finden, dass die Station (6) in diesem besonderen Falle nur zwei Bedingungsgleichungen liefern kann, und dass diese Seitengleichungen sein müssen. Um diese zu erhalten führe ich zuerst die Hülfswinkel (6) (3) (1) $= x$ und (6) (2) (1) $= y$ ein, die auch in der Figur angedeutet sind, worauf die Dreiecke (1)(3)(6), (1)(2)(3), (1)(2)(6) die folgenden Gleichungen geben

$$\frac{(1)(6)}{(1)(3)} = \frac{\sin x}{\sin[(3)_6-(1)_6]}$$
$$\frac{(1)(3)}{(1)(2)} = \frac{\sin[(2)_3-(1)_3]}{\sin[(3)_2-(2)_3]}$$
$$\frac{(1)(2)}{(1)(6)} = \frac{\sin[(1)_6-(5)_6]}{\sin y}$$

aus welchen die Bedingungsgleichung

$$1 = \frac{\sin x \sin[(2)_3-(1)_3]\sin[(1)_6-(3)_6]}{\sin y \sin[(3)_2-(2)_3]\sin[(2)_6-(1)_6]}$$

entspringt, die aber die beiden nicht beobachteten Winkel x und y enthält.

3.

Eine zweite Bedingungsgleichung ergiebt sich aus den Dreiecken (3)(4)(6), (2)(3)(4), (2)(4)(6), und zwar erhält man zuerst die Gleichungen

$$\frac{(4)(6)}{(3)(4)} = \frac{\sin[(3)_3-(1)_3-x]}{\sin[(3)_6-(2)_6]}$$
$$\frac{(3)(4)}{(2)(4)} = \frac{\sin[(3)_2-(2)_3]}{\sin[(2)_3-(1)_3]}$$
$$\frac{(2)(4)}{(4)(6)} = \frac{\sin[(5)_6-(3)_6]}{\sin z}$$

wo der Hülfswinkel $z = (4)(2)(6)$ ist, und hieraus

$$1 = \frac{\sin[(3)_2-(2)_3]\sin[(3)_3-(1)_3-x]\sin[(5)_6-(3)_2]}{\sin z \sin[(2)_3-(1)_3]\sin[(3)_6-(2)_6]}$$

in welcher die nicht beobachteten Winkel x und z vorkommen.

4.

Eine dritte Bedingungsgleichung gewähren die Dreiecke (4)(5)(6), (2)(4)(5), (2)(5)(6), nemlich zuerst, nachdem die Winkel (5)(4)(6) $= u$, und (6)(2)(5) $= w$ gesetzt worden sind, die Gleichungen

$$\frac{(5)(6)}{(4)(5)} = \frac{\sin u}{\sin[(4)_6-(3)_6]}$$
$$\frac{(4)(5)}{(2)(5)} = \frac{\sin[(4)_2-(3)_2]}{\sin[(2)_4-(1)_4]}$$
$$\frac{(2)(5)}{(5)(6)} = \frac{\sin[(5)_6-(4)_6]}{\sin w}$$

und hieraus

$$1 = \frac{\sin u \sin [(4)_2-(3)_2] \sin [(5)_6-(4)_6]}{\sin w \sin [(2)_4-(1)_4] \sin [(4)_6-(3)_6]}$$

aus welcher wieder die nicht beobachteten Winkel u und w zu eliminiren sind.

5.

Für die Elimination der eingeführten nicht beobachteten Winkel bekommen wir aus der Figur die folgenden Gleichungen. Das Viereck (1)(2)(6)(3) giebt

$$360^0 = y + x + (2)_1 - (1)_1 + (2)_6 - (5)_6$$

Das Viereck (2)(5)(4)(6) giebt

$$360^0 = u + w + (2)_5 - (1)_5 + (5)_6 - (3)_6$$

und der Dreieckspunkt (2) giebt

$$z + y = (3)_2 - (1)_2$$
$$w + y = (4)_2 - (1)_2$$

und hieraus bekommt man

$$y = (1)_1 - (2)_1 + (5)_6 - (2)_6 - x$$
$$z = (2)_1 - (1)_1 + (3)_2 - (1)_2 + (2)_6 - (5)_6 + x$$
$$w = (2)_1 - (1)_1 + (4)_2 - (1)_2 + (2)_6 - (5)_6 + x$$
$$u = (1)_1 - (2)_1 + (1)_2 - (4)_2 + (1)_5 - (2)_5 + (3)_6 - (2)_6 - x$$

oder wenn man noch das Dreieck (3)(4)(6) zuzieht,

$$u = 180^0 + (3)_3 - (1)_3 + (3)_4 - (1)_4 + (3)_6 - (2)_6 - x$$

welcher Ausdruck etwas einfacher ist, wie der vorstehende. Die Substitution dieser Ausdrücke in die vorher gefundenen Bedingungsgleichungen bringt diese auf die folgende Form,

$$1 = \frac{\sin x \sin [(2)_2-(1)_2] \sin [(1)_6-(5)_6]}{\sin [(1)_1-(2)_1+(5)_6-(2)_6-x] \sin [(3)_3-(2)_3] \sin [(2)_6-(1)_6]}$$

$$1 = \frac{\sin [(3)_2-(2)_2] \sin [(3)_3-(1)_3-x] \sin [(5)_6-(3)_6]}{\sin [(2)_1-(1)_1+(3)_2-(1)_2+(2)_6-(5)_6+x] \sin [(2)_3-(1)_3] \sin [(3)_6-(2)_6]}$$

$$1 = \frac{\sin [(1)_3-(3)_3+(1)_4-(3)_4+(2)_6-(3)_6+x] \sin [(4)_2-(3)_2] \sin [(5)_6-(4)_6]}{\sin [(2)_1-(1)_1+(4)_2-(1)_2+(2)_6-(5)_6+x] \sin [(2)_4-(1)_4] \sin [(4)_6-(3)_6]}$$

in welchen nur noch der nicht beobachtete Winkel x vorkommt, nach dessen Elimination sie zwei von einander unabhängige Bedingungsgleichungen bilden. Die Elimination von x ist zwar möglich aber umständlich, auch würde sie die Form der Gleichungen gänzlich verändern. Diese Elimination ist aber auch überflüssig, denn man kann die Gleichungen in ihrer vorstehenden Form bequem anwenden.

6.

Die Auflösung der ersten Gleichung nach x giebt

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin[(3)_3-(2)_3]\sin[(2)_6-(1)_6]\sin[(1)_1-(2)_1+(5)_6-(2)_6]}{\left\{\begin{array}{l}\sin[(3)_2-(1)_2]\sin[(1)_6-(5)_6]\\ +\sin[(3)_3-(2)_3]\sin[(2)_6-(1)_6]\cos[(1)_1-(2)_1+(5)_6-(2)_6]\end{array}\right\}}$$

woraus man durch Hülfe der beobachteten Werthe der betr. Richtungen den Werth von x erhält. Die Substitution dieses nebst den Werthen der betr. Richtungen in die zweite und dritte Gleichung giebt die Werthe der beiden dazu gehörigen $F(\ )$. Differentiirt man ferner alle drei Gleichungen auf dieselbe Art wie in der Abhandlung gezeigt worden ist, und dividirt die erste Differentialgleichung durch den Coefficienten von δx, so bekommt man diese Variation ausgedrückt durch die Variationen der beobachteten Richtungen, die in der ersten Gleichung vorkommen. Durch Hülfe dieser Gleichung kann man aus den beiden anderen Differentialgleichungen δx eliminiren, wodurch sich die beiden von einander unabhängigen Bedingungsgleichungen der Aufgabe, ausgedrückt durch die Variationen der beobachteten Richtungen ergeben.

7.

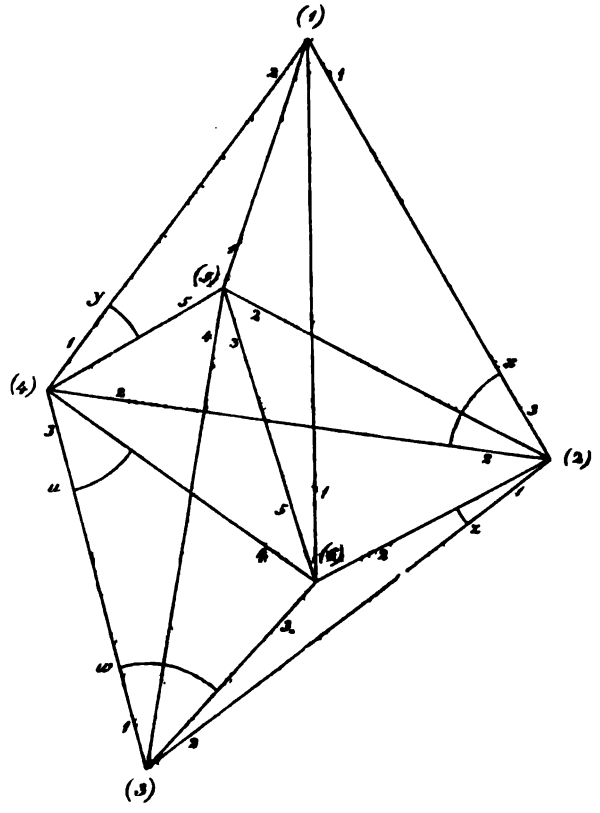
In dem im Vorhergehenden betrachteten Falle entstanden zwei von einander unabhängige Bedingungsgleichungen durch die beschriebene Einführung des Punkts (6), und überhaupt werden, wie leicht einzusehen ist, $m-3$ solcher Gleichungen vorhanden sein, wenn von diesem Punkte aus die Richtungen nach m Dreieckspunkten eingeschnitten worden sind. Alle diese Gleichungen werden eben so, wie im Vorhergehenden gezeigt worden ist, erhalten.

Nehmen wir jetzt an, dass der Punkt (6) in einem bereits fertigen, ausgeglichenen Dreiecksnetze eingeschaltet worden ist, so kommen wir auf die Ausdehnung der Pothenot'schen Aufgabe auf den Fall, in welchem man von Punkt (6) aus eine grössere Anzahl von Richtungen eingeschnitten hat, als zur Auflösung dieser Aufgabe hinreichend und nothwendig sind. Die Bedingungsgleichungen sind in diesem Falle dieselben wie oben, nur kann man jetzt nicht die Variationen der von den anderen Punkten aus beobachteten Richtungen berücksichtigen, sondern muss sich begnügen nur die vom zu bestimmenden Punkt aus beobachteten so auszugleichen, dass die Summe ihrer Fehlerquadrate ein Minimum

wird. Wie dieses bewirkt wird ergiebt sich aus dem Inhalt der Abhandlung von selbst, und braucht daher wohl hier nicht näher erörtert zu werden.

8.

Wenden wir uns jetzt zu der Aufgabe, zu welcher die folgende Figur gehört.



Hier wird angenommen, dass zwar von den Punkten (5) und (6) aus alle übrigen Punkte der Figur eingeschnitten worden sind, aber von diesen die (5) und (6) nicht. Es sollen daher auf der

Station	(1)	die Richtungen	1, 2,	bez. nach	(2), (4),
-	(2)	- -	1, 2, 3,	- -	(3), (4), (1)
-	(3)	- -	1, 2,	- -	(4), (2),
-	(4)	- -	1, 2, 3,	- -	(1), (2), (3),
-	(5)	- -	1, 2, 3, 4, 5,	- -	(1), (2), (6), (3), (4),
-	(6)	- -	1, 2, 3, 4, 5,	- -	(1), (2), (3), (4), (5),

als eingeschnitten gedacht werden, gleichwie in der Figur angedeutet ist.

9.

Da die Punkte (5) und (6) unter andern durch die Messung der Winkel

$$(2)(5)(6) = (3)_5 - (2)_5\,,\quad (6)(5)(4) = (5)_5 - (3)_5$$
$$(5)(6)(2) = (2)_6 - (5)_6\,,\quad (5)(6)(4) = (5)_6 - (4)_6$$

vollständig bestimmt sind, so folgt dass, abgesehen von sonstigen Bedingungsgleichungen, die die Figur darbieten kann, die vorhandenen Beobachtungen von den beiden genannten Punkten aus vier von einander unabhängige Bedingungsgleichungen liefern müssen. Diese lassen sich auf ähnliche Art wie in der vorhergehenden Aufgabe aufstellen.

10.

Die Dreiecke (1)(2)(5), (1)(2)(4), (1)(4)(5) der Figur geben zuerst

$$\frac{(1)(5)}{(1)(2)} = \frac{\sin x}{\sin[(2)_5-(1)_5]}$$
$$\frac{(1)(2)}{(1)(4)} = \frac{\sin[(2)_4-(1)_4]}{\sin[(3)_2-(2)_2]}$$
$$\frac{(1)(4)}{(4)(5)} = \frac{\sin[(4)_5-(5)_5]}{\sin y}$$

und hieraus ergiebt sich

$$1 = \frac{\sin x \sin[(2)_4-(1)_4]\sin[(4)_5-(5)_5]}{\sin y \sin[(3)_2-(2)_2]\sin[(2)_5-(4)_5]}$$

wo $x = (1)(2)(5)$, $y = (1)(4)(5)$ zwei nicht beobachtete Winkel sind.

11.

Die Dreiecke (2)(3)(5), (2)(3)(4), (3)(4)(5) geben die folgenden Gleichungen

$$\frac{(3)(5)}{(2)(3)} = \frac{\sin[(3)_2-(1)_2-x]}{\sin[(4)_5-(2)_5]}$$
$$\frac{(2)(3)}{(3)(4)} = \frac{\sin[(3)_4-(2)_4]}{\sin[(2)_2-(1)_2]}$$
$$\frac{(3)(4)}{(3)(5)} = \frac{\sin[(5)_5-(4)_5]}{\sin[(3)_4-(1)_4-y]}$$

und hieraus erhält man

$$1 = \frac{\sin[(3)_2-(1)_2-x]\sin[(3)_4-(2)_4]\sin[(5)_5-(4)_5]}{\sin[(3)_4-(1)_4-y]\sin[(2)_2-(1)_2]\sin[(4)_5-(2)_5]}$$

wo x und y dieselbe Bedeutung haben wie im vor. Art.

12.

Die Dreiecke (1)(2)(6), (1)(2)(4), (1)(4)(6) geben die folgenden Gleichungen

$$\frac{(1)(6)}{(1)(2)} = \frac{\sin[(3)_2-(1)_2-z]}{\sin[(2)_6-(5)_6]}$$
$$\frac{(1)(2)}{(1)(4)} = \frac{\sin[(2)_4-(1)_4]}{\sin[(3)_2-(2)_2]}$$
$$\frac{(1)(4)}{(1)(6)} = \frac{\sin[(1)_6-(4)_6]}{\sin[(3)_4-(1)_4-u]}$$

und hieraus

$$1 = \frac{\sin[(3)_2-(1)_2-z]\sin[(2)_4-(1)_4]\sin(1)_6-(4)_6]}{\sin[(3)_4-(1)_4-u]\sin[(3)_2-(2)_2]\sin(2)_6-(5)_6]}$$

wo wieder $z = (3)(2)(6)$, $u = (3)(4)(6)$ zwei nicht beobachtete Winkel sind.

13.

Die Dreiecke (3)(4)(6), (2)(3)(4), (2)(4)(6) geben

$$\frac{(4)(6)}{(3)(4)} = \frac{\sin w}{\sin[(4)_6-(3)_6]}$$
$$\frac{(3)(4)}{(2)(4)} = \frac{\sin[(2)_2-(1)_2]}{\sin[(2)_3-(1)_3]}$$
$$\frac{(2)(4)}{(4)(6)} = \frac{\sin[(2)_6-(4)_6]}{\sin[(2)_2-(1)_2-z]}$$

und hieraus

$$1 = \frac{\sin w\sin[(2)_2-(1)_2]\sin[(2)_6-(4)_6]}{\sin[(2)_2-(1)_2-z]\sin[(2)_3-(1)_3]\sin[(4)_6-(3)_6]}$$

wo z derselbe Winkel ist wie im vor. Art. und $w = (4)(3)(6)$ ein hinzugekommener nicht beobachteter Winkel ist.

14.

Die Dreiecke endlich (2)(5)(6), (2)(4)(5), (4)(5)(6) geben

$$\frac{(5)(6)}{(2)(5)} = \frac{\sin[(3)_2-(1)_2-x-z]}{\sin[(2)_6-(5)_6)}$$
$$\frac{(2)(5)}{(4)(5)} = \frac{\sin[(2)_4-(1)_4-y]}{\sin[(3)_2-(2)_2-x]}$$
$$\frac{(4)(5)}{(5)(6)} = \frac{\sin[(5)_6-(4)_6]}{\sin[(3)_4-(1)_4-y-u]}$$

woraus

$$1 = \frac{\sin[(3)_2-(1)_2-x-z]\sin[(2)_4-(1)_4-y]\sin[(5)_6-(4)_6]}{\sin[(3)_4-(1)_4-y-u]\sin[(3)_2-(2)_2-x]\sin[(2)_6-(5)_6]}$$

hervorgeht, und die Winkel x, y, z, u dieselben sind wie im Vorhergehenden. Hiemit sind die Bedingungsgleichungen erschöpft.

15.

Um die eingeführten, nicht beobachteten Winkel als Functionen von x darzustellen, dienen die folgenden Betrachtungen. Das Viereck (1)(2)(5)(4) giebt

$$360^0 = x + y + (2)_1 - (1)_1 + (2)_5 - (5)_5$$

Das Viereck (2)(3)(4)(6) giebt

$$360^0 = u + z + (2)_3 - (1)_3 + (4)_6 - (2)_6$$

Das Dreieck (2)(5)(6) giebt

$$180^0 = (3)_2 - (1)_2 - x - z + (3)_5 - (2)_5 + (2)_6 - (5)_6$$

und das Dreieck (3)(4)(6) giebt

$$180^0 = u + w + (4)_6 - (3)_6$$

Durch die Elimination erhält man hieraus

$$y = (1)_1 - (2)_1 + (5)_5 - (2)_5 - x$$
$$z = 180^0 + (3)_2 - (1)_2 + (3)_5 - (2)_5 + (2)_6 - (5)_6 - x$$
$$u = 180^0 - (3)_2 + (1)_2 - (2)_3 + (1)_3 - (3)_5 + (2)_5 - (4)_6 + (5)_6 + x$$
$$w = (3)_2 - (1)_2 + (2)_3 - (1)_3 + (3)_5 - (2)_5 + (3)_6 - (5)_6 - x$$

16.

Löst man nun die Bedingungsgleichung des Art. 10, nachdem darin der Ausdruck für y substituirt worden ist, in Bezug auf x auf, und substituirt auch die oben erhaltenen Ausdrücke der y, z, u, w in die Bedingungsgleichungen der Artt. 11, 12, 13, 14, so erhält man

$$\mathrm{tg}\,x = \frac{\sin[(3)_2-(2)_2]\sin[(3)_5-(1)_5]\sin[(1)_1-(2)_1+(5)_5-(2)_5]}{\left.\begin{array}{l}\sin[(2)_4-(1)_4]\sin[(1)_5-(5)_5]+\\ \sin[(3)_2-(2)_2]\sin[(2)_5-(1)_5]\cos[(1)_1-(2)_1+(5)_5-(2)_5]\end{array}\right\}}$$

$$1 = \frac{\sin[(3)_2-(1)_2-x]\sin[(3)_4-(2)_4]\sin[(5)_5-(4)_5]}{\sin[(2)_1-(1)_1+(3)_4-(1)_4+(2)_5-(5)_5+x]\sin[(2)_2-(1)_2)\sin[(4)_5-(2)_5]}$$

$$1 = \frac{\sin[(3)_5-(2)_5+(2)_6-(5)_6-x]\sin[(2)_4-(1)_4]\sin[(1)_6-(4)_6]}{\sin[(2)_1-(1)_1+(2)_5-(3)_5+(5)_6-(4)_6+x]\sin[(3)_2-(2)_2]\sin[(2)_6-(5)_6]}$$

$$1 = \frac{\sin[(3)_2-(1)_2+(2)_3-(1)_3+(3)_5-(2)_5+(3)_6-(5)_6-x]\sin[(2)_2-(1)_2]\sin[(2)_6-(4)_6]}{\sin[(3)_2-(2)_2+(3)_5-(2)_5+(2)_6-(5)_6-x]\sin[(2)_3-(1)_3]\sin[(4)_6-(3)_6]}$$

$$1 = \frac{\sin[(3)_5-(2)_5+(2)_6-(5)_6]\sin[(1)_1-(2)_1+(2)_4-(1)_4+(3)_5-(2)_5+x]\sin[(5)_6-(4)_6]}{\sin[(5)_5-(3)_5+(5)_6-(4)_6]\sin[(3)_2-(2)_2-x]\sin[(2)_6-(5)_6]}$$

die vier von einander unabhängigen Bedingungsgleichungen gleich kommen, und in der Anwendung eben so behandelt werden müssen, wie die ähnlichen der vorhergehenden Aufgabe.

17.

Wenn auf diese Art in einem bereits ausgeglichenen Dreiecksnetze zwei Punkte eingeschnitten werden, so fallen in den Differentialen der Bedingungsgleichungen wieder die Variationen der von den Punkten 1, 2, 3, 4 aus beobachteten Richtungen weg, und man kommt auf den Fall, in welchem bei der Anwendung der Aufgabe, die ich in den Astr. Nachr. B. XVIII gegeben habe, man sich mehr Data verschafft hat, wie hinreichend und nothwendig sind. Da die weitere Behandlung theils aus dem Inhalt der Abhandlung folgt, theils auf andere Art von mir a. a. O. ausgeführt worden ist, so braucht sie wohl auch hier nicht erörtert zu werden.

Suppl. 7. Berichtigung eines in der Abhandlung vorkommenden kleinen Misgriffs.

Im Art. 149 wird gesagt, dass für $m = \infty$ der mittlere, und der wahrscheinliche Fehler einer Beobachtung Null werden. Dieser Satz ist dahin abzuändern, dass bei stets wachsendem m die Werthe der Quotienten $\frac{W}{m-n}$ und $\frac{W}{m}$ nach einer und derselben Grenze hinstreben. Diese Berichtigung hat übrigens keinen Einfluss auf die in der Abhandlung folgenden Schlüsse.

Suppl. 8. Berechnung der $f(r,I)_s$, etc. und der (I,M), etc. ohne Zuziehung der $\eta(r,I)_s$, etc.

1.

In der Abhandlung habe ich gezeigt, dass man die Coefficienten der Endgleichungen auf vier von einander verschiedene Arten berechnen kann. Zwei dieser Arten beruhen auf der Zuziehung der $\eta(r,I)_s$, etc., und die zwei anderen sind von diesen Grössen unabhängig. Zur Berechnung der $f(r,I)_s$, etc. und der (I,M), etc., welche letzteren bei der Berechnung der Gewichte vorkommen, habe ich schliesslich nur Ein Verfahren, bei welchem die $\eta(r,I)_s$, etc. gebraucht werden angegeben, während die Abhandlung hiefür schon ein zweites Verfahren enthält, welches von diesen Grössen unabhängig ist. Dieses soll hier ausgehoben werden.

2.

Zur Berechnung der Coefficienten der Endgleichungen ohne Zuziehung der $\eta(r,I)_s$ braucht man die unbestimmte Elimination der Stationsgleichungen, wie man gesehen hat, nicht ausgeführt zu haben, will man aber auch die $f(r,I)_s$, etc. und die (I,M), etc. ohne Anwendung jener Grössen berechnen, so muss vorher jene unbestimmte Elimination ausgeführt worden sein. Ich mache daher den Anfang damit die Ausdrücke der Coefficienten dieser anzusetzen, die ich aus dem Art. 37 der Abhandlung entnehme. Bezeichnet man diese Coefficienten, um Verwechselungen vorzubeugen, mit $\{1,1\}$, $\{1,2\}$, etc. $\{2,2\}$, etc. etc. und lässt die Glieder weg, die zufolge des »ersten Verfahrens« immer Null werden, so gehen die angezogenen Ausdrücke in die folgenden über.

$$\{1,1\} = \frac{1}{(1,1)}$$
$$\{1,2\} = 0$$
$$\{1,3\} = 0$$
etc.

$$\{2,2\} = \frac{1}{(2,2,1)} + \quad + \frac{\beta'''}{(4,4,3)}\beta''' + \frac{\beta''''}{(5,5,4)}\beta'''' + \frac{\beta^{v}}{(6,6,5)}\beta^{v} + \ldots$$

$$\{2,3\} = \quad \frac{\beta'''}{(4,4,3)}\gamma''' + \frac{\beta''''}{(5,5,4)}\gamma'''' + \frac{\beta^{v}}{(6,6,5)}\gamma^{v} + \ldots$$

$$\{2,4\} = \quad \frac{\beta'''}{(4,4,3)} + \frac{\beta''''}{(5,5,4)}\delta'''' + \frac{\beta^{v}}{(6,6,5)}\delta^{v} + \ldots$$

$$\{2,5\} = \quad \frac{\beta''''}{(5,5,4)} + \frac{\beta^{v}}{(6,6,5)}\varepsilon^{v} + \ldots$$

$$\{2,6\} = \quad \frac{\beta^{v}}{(6,6,5)} + \ldots$$

etc. etc.

$$\{3,3\} = \frac{1}{(3,3,2)} + \frac{\gamma'''}{(4,4,3)}\gamma''' + \frac{\gamma''''}{(5,5,4)}\gamma'''' + \frac{\gamma^{v}}{(6,6,5)}\gamma^{v} + \ldots$$

$$\{3,4\} = \quad \frac{\gamma'''}{(4,4,3)} + \frac{\gamma''''}{(5,5,4)}\delta'''' + \frac{\gamma^{v}}{(6,6,5)}\delta^{v} + \ldots$$

$$\{3,5\} = \quad \frac{\gamma''''}{(5,5,4)} + \frac{\gamma^{v}}{(6,6,5)}\varepsilon^{v} + \ldots$$

$$\{3,6\} = \quad \frac{\gamma^{v}}{(6,6,5)} + \ldots$$

etc. etc.

$$\{4,4\} = \frac{1}{(4,4,3)} + \frac{\delta''''}{(5,5,4)}\delta'''' + \frac{\delta^{v}}{(6,6,5)}\delta^{v} + \ldots$$

$$\{4,5\} = \quad \frac{\delta''''}{(5,5,4)} + \frac{\delta^{v}}{(6,6,5)}\varepsilon^{v} + \ldots$$

$$\{4,6\} = \quad \frac{\delta^{v}}{(6,6,5)} + \ldots$$

etc. etc.

$$\{5,5\} = \frac{1}{(5,5,4)} + \frac{\varepsilon^{v}}{(6,6,5)}\varepsilon^{v} + \ldots$$

$$\{5,6\} = \quad \frac{\varepsilon^{v}}{(6,6,5)} + \ldots$$

etc. etc.

$$\{6,6\} = \frac{1}{(6,6,5)} + \ldots$$

etc.

etc.

die man beliebig fortsetzen kann.

3.

Wenden wir uns jetzt zum Art. 35 der Abhandlung, und führen in die dort für $(\alpha\eta)$, $(\beta\eta)$, etc. gegebenen Ausdrücke die später angewandte Bezeichnung ein, so werden sogleich

$$f(1,I)_s = \{1,1\}.q(1,I)_s$$
$$f(2,I)_s = \{2,2\}.q(2,I)_s + \{2,3\}.q(3,I)_s + \{2,4\}.q(4,I)_s + \{2,5\}.q(5,I)_s + \ldots$$
$$f(3,I)_s = \{2,3\}.q(2,I)_s + \{3,3\}.q(3,I)_s + \{3,4\}.q(4,I)_s + \{3,5\}.q(5,I)_s + \ldots$$
$$f(4,I)_s = \{2,4\}.q(2,I)_s + \{3,4\}.q(3,I)_s + \{4,4\}.q(4,I)_s + \{4,5\}.q(5,I)_s + \ldots$$
$$f(5,I)_s = \{2,5\}.q(2,I)_s + \{3,5\}.q(3,I)_s + \{4,5\}.q(4,I)_s + \{5,5\}.q(5,I)_s + \ldots$$
etc. etc.

die durch allmählige Vertauschung der *I* mit *II*, *III*, etc. auf alle Bedingungsgleichungen ausgedehnt werden müssen.

4.

Die zur Berechnung der Gewichte erforderlichen (I,M), (II,M), etc. findet man in demselben angezogenen Art. der Abhandlung wie folgt.

$$(I,M) = \Sigma\{ f(1,I)_s . k(1)_s + f(2,I)_s . k(2)_s + f(3,I)_s . k(3)_s + \ldots\}$$
$$(II,M) = \Sigma\{ f(1,II)_s . k(1)_s + f(2,II)_s . k(2)_s + f(3,II)_s . k(3)_s + \ldots\}$$
$$(III,M) = \Sigma\{f(1,III)_s . k(1)_s + f(2,III)_s . k(2)_s + f(3,III)_s . k(3)_s + \ldots,\}$$
etc. etc.

wo das Summenzeichen sich auf s bezieht. Bei der Anwendung dieses Verfahrens wird zwar die Berechnung der $\eta(r,I)_s$, etc. überflüssig, aber dafür tritt die unbestimmte Auflösung der Stationsgleichungen ein.

Suppl. 9. Die mit α, β, γ, etc. nebst angehängten Strichen bezeichneten Grössen betreffend.

1.

Von den in der Ueberschrift genannten Grössen kommen in der Abhandlung zwei Systeme vor. Das erste dieser, welches sich bei der Auflösung der Stationsgleichungen unmittelbar ergiebt, ist das folgende:

$$\begin{array}{rrrrr} \alpha', & \beta', & \gamma', & \delta', & \text{etc.} \\ & \beta'', & \gamma'', & \delta'', & \text{etc.} \\ & & \gamma''', & \delta''', & \text{etc.} \\ & & & \delta^{\text{IV}}, & \text{etc.} \\ & & & & \text{etc.} \end{array}$$

und das zweite, welches aus jenem berechnet wird ist

$$\begin{aligned} &\alpha' , \alpha'' , \alpha''' , \alpha^{IV} , \text{ etc.} \\ &\beta'' , \beta''' , \beta^{IV} , \text{ etc.} \\ &\gamma''' , \gamma^{IV} , \text{ etc.} \\ &\delta^{IV} , \text{ etc.} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Dieses letztere wird vorzüglich zur Berechnung der $w(1)$, $w(2)$, etc. aus den reducirten Stationsgleichungen, so wie bei der Berechnung der $\eta(r,I)_s$, etc. und der $f(r,I)_s$, etc. gebraucht. Auch ist gezeigt worden, wie die Coefficienten der unbestimmten Elimination von diesem System abhängen. Hier werde ich zeigen, dass alle betreffenden Ausdrücke so umgeformt werden können, dass sie von dem ersten System der obigen Grössen abhängen.

2.

In den Ausgleichungen auf den Stationen habe man die Rechnung bis zu den reducirten Gleichungen fortgesetzt, nemlich bis zu dem System von Gleichungen, in welchem jede Gleichung Eine Unbekannte weniger wie die nächstvorhergehende enthält. Es werden hiebei, wenn das erste Verfahren der Abhandlung angewandt wird, alle α nebst $\beta'' = 0$ sein, und man bekommt hierauf statt der in der Abhandlung angegebenen, von β''', β^{IV}, etc. γ''', γ^{IV}, etc. δ^{IV} etc. abhängigen Ausdrücke die folgenden,

$$\begin{aligned}
w(1) &= -\chi' \\
w(2) &= -\chi'' + \gamma'' w(4) + \delta'' w(5) + \varepsilon'' w(6) + \ldots \\
w(3) &= -\chi''' + \gamma''' w(4) + \delta''' w(5) + \varepsilon''' w(6) + \ldots \\
w(4) &= -\chi^{IV} + \delta^{IV} w(5) + \varepsilon^{IV} w(6) + \ldots \\
w(5) &= -\chi^{V} + \varepsilon^{V} w(6) + \ldots \\
w(6) &= -\chi^{VI} + \ldots \\
\text{etc.} & \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

die eben so leicht wie alle übrigen Ausdrücke auf eine beliebige Anzahl von Unbekannten ausgedehnt werden können. Bei der Anwendung dieser Ausdrücke muss man bei der letzten derselben anfangen, und darauf die vorletzte u. s. w. berechnen. Diese Ausdrücke sind nichts weiter wie die auf die Stationsgleichungen angewandten, und anders aufgestellten Ausdrücke des Art. 49 oder bez. 142 (S. 214) der Abhandlung.

3.

Durch Hülfe der zwischen den hier in Betracht stehenden beiden Systemen stattfindenden Relationen findet man durch die Elimination leicht, statt der in der Abhandlung angegebenen Ausdrücke, die folgenden,

$$\eta(1,I)_s = q(1,I)_s$$
$$\eta(2,I)_s = q(2,I)_s$$
$$\eta(3,I)_s = q(3,I)_s$$
$$\eta(4,I)_s = \gamma''_s.\eta(2,I)_s + \gamma'''_s.\eta(3,I)_s + q(4,I)_s$$
$$\eta(5,I)_s = \delta''_s.\eta(2,I)_s + \delta'''_s.\eta(3,I)_s + \delta^{IV}_s.\eta(4,I)_s + q(5,I)_s$$
$$\eta(6,I)_s = \varepsilon''_s.\eta(2,I)_s + \varepsilon'''_s.\eta(3,I)_s + \varepsilon^{IV}_s.\eta(4,I)_s + \varepsilon^{V}_s.\eta(5,I)_s + q(6,I)_s$$
etc. etc.

bei deren Anwendung von der ersten angefangen wird. Ferner giebt eine leichte Elimination

$$f(1,I)_s = Q(1,I)_s$$
$$f(2,I)_s = Q(2,I)_s + \gamma''_s.f(4,I)_s + \delta''_s.f(5,I)_s + \varepsilon''_s.f(6,I)_s + \ldots$$
$$f(3,I)_s = Q(3,I)_s + \gamma'''_s.f(4:I)_s + \delta'''_s.f(5,I)_s + \varepsilon'''_s.f(6,I)_s + \ldots$$
$$f(4,I)_s = Q(4,I)_s + \delta^{IV}_s.f(5,I)_s + \varepsilon^{IV}_s.f(6,I)_s + \ldots$$
$$f(5,I)_s = Q(5,I)_s + \varepsilon^{V}_s.f(6,I)_s + \ldots$$
$$f(6,I)_s = Q(6,I)_s + \ldots$$
etc. etc.

die denen für die $w(1)$, $w(2)$, etc. völlig ähnlich sind, und wie diese in umgekehrter Ordnung zur Anwendung kommen.

4.

Die bei der Berechnung der Gewichte erforderlichen mit $(M,1)_s$, etc. bezeichneten Grössen werden eben so wie $\eta(1,I)_s$, etc. berechnet. Nemlich

$$(M,1)_s = k(1)_s$$
$$(M,2)_s = k(2)_s$$
$$(M,3)_s = k(3)_s$$
$$(M,4)_s = \gamma''_s.(M,2)_s + \gamma'''_s.(M,3)_s + k(4)_s$$
$$(M,5)_s = \delta''_s.(M,2)_s + \delta'''_s.(M,3)_s + \delta^{IV}_s.(M,4)_s + k(5)_s$$
$$(M,6)_s = \varepsilon''_s.(M,2)_s + \varepsilon'''_s.(M,3)_s + \varepsilon^{IV}_s.(M,4)_s + \varepsilon^{V}_s.(M,5)_s + k(6)_s$$
etc. etc.

5.

Endlich bekommt man für die Coefficienten der unbestimmten Elimination die folgenden Ausdrücke, die ich mehrerer Deutlichkeit wegen, und um sonst erforderliche, complicirte Bezeichnungen zu vermeiden, ausdrücklich für sechs Unbekannte hinschreiben werde. Die Ausdehnung derselben auf jede beliebige Anzahl von Unbekannten bietet nicht die geringste Schwierigkeit dar.

$$
\begin{array}{lllll}
\{2,6\} = & \gamma''\{4,6\} & + \delta''\{5,6\} & + \varepsilon''\{6,6\} \\
\{3,6\} = & \gamma'''\{4,6\} & + \delta'''\{5,6\} & + \varepsilon'''\{6,6\} \\
\{4,6\} = & & \delta^{IV}\{5,6\} & + \varepsilon^{IV}\{6,6\} \\
\{5,6\} = & & & \varepsilon^{V}\{6,6\} \\
\{6,6\} = & & & \frac{1}{(6,6,5)} \\
\hline
\{2,5\} = & \gamma''\{4,5\} & + \delta''\{5,5\} & + \varepsilon''\{5,6\} \\
\{3,5\} = & \gamma'''\{4,5\} & + \delta'''\{5,5\} & + \varepsilon'''\{5,6\} \\
\{4,5\} = & & \delta^{IV}\{5,5\} & + \varepsilon^{IV}\{5,6\} \\
\{5,5\} = & & \frac{1}{(5,5,4)} & + \varepsilon^{V}\{5,6\} \\
\hline
\{2,4\} = & \gamma''\{4,4\} & + \delta''\{4,5\} & + \varepsilon''\{4,6\} \\
\{3,4\} = & \gamma'''\{4,4\} & + \delta'''\{4,5\} & + \varepsilon'''\{4,6\} \\
\{4,4\} = & \frac{1}{(4,4,3)} & + \delta^{IV}\{4,5\} & + \varepsilon^{IV}\{4,6\} \\
\hline
\{2,3\} = & \gamma''\{3,4\} & + \delta''\{3,5\} & + \varepsilon''\{3,6\} \\
\{3,3\} = & \frac{1}{(3,3,2)} + \gamma'''\{3,4\} & + \delta'''\{3,5\} & + \varepsilon'''\{3,6\} \\
\hline
\{2,2\} = & \frac{1}{(2,2,1)} + \gamma''\{2,4\} & + \delta''\{2,5\} & + \varepsilon''\{2,6\} \\
\hline
\{1,1\} = & \frac{1}{(1,1)} & &
\end{array}
$$

Diese haben wieder mit einigen der vorhergehenden Ausdrücken grosse Analogie, und bei der Anwendung derselben muss man wieder in jeder Abtheilung bei der letzten Gleichung anfangen.

Von den vorstehenden Ausdrücken brauche ich keinen Beweis hinzuzufügen, da sie nicht weiter als das in ausdrückliche Formeln gebrachte Verfahren der unbestimmten Elimination sind, welches ich in Schum. Astr. Nachr. B VIII. No. 192 gegeben und bewiesen habe.

Suppl. 10. Das Beobachtungsverfahren betreffend, welches Gauss in der Hannöverschen Gradmessung angewandt hat.

1.

Es ist genugsam bekannt, dass Gauss bei der Gradmessung, die er in den 20ger Jahren in Hannover ausführte, in Bezug auf die Beobachtungen selbst ein eigenthümliches Verfahren angewandt hat. Die Beschaffenheit dieses Verfahrens hat er jedoch nie vollständig der Oeffentlichkeit übergeben, denn Alles, was er darüber veröffentlicht hat, besteht in einem dem Art. 22 seiner Abhandlung »Supplementum theoriae combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae,« einverleibten Passus, aus welchem sein Beobachtungsverfahren durchaus nicht mit Bestimmtheit erkannt werden kann.

Da Alles, welches von diesem Gelehrten ausgegangen ist, die grösste Beachtung verdient, so ist man sehr darauf gespannt, zu erfahren, ob nicht in seinen hinterlassenen Papieren sich Auskunft darüber vorfinden sollte.

2.

Ein wissenschaftlicher Freund, welcher sich in der Lage befindet, hierüber am Ehesten Auskunft ertheilen zu können, machte mir kürzlich eine mündliche Mittheilung darüber, die ich hier, seinen Worten möglichst getreu folgend, aufnehme: Gauss hat Winkel beobachtet, und zwar nach dem Wiederholungsverfahren. Er hat jedes Mal den zu messenden Winkel nicht nur selbst, sondern auch dessen Supplement zum Umkreise gemessen. Er hat nicht nur die Winkel zwischen je zwei einander zunächst liegenden Dreiecksseiten, sondern vielmehr alle Winkel zwischen je zweien der auf der Station zusammen treffenden Dreiecksseiten gemessen.

3.

Ich stelle dieser Benachrichtigung zuerst den oben erwähnten Passus des »Supplementum etc.« gegenüber, welcher seinem ganzen Wortlaute

nach der folgende ist. Nachdem Gauss von den Bedingungsgleichungen, die ein Dreiecksnetz darbietet, geredet hat, fährt er fort: »*Silentio tamen »praeterire non possumus monitum, quod theoria nostra, si applicatio pura »atque rigorosa in votis est, supponit, quantitates per* v, v', v'', *etc. designa»tas revera vel immediate observatas esse, vel ex observationibus ita derivatas, »ut inter se independentes maneant, vel saltem tales censeri possint. In praxi »vulgari observantur anguli triangulorum ipsi, qui proin pro* v, v', v'', *etc. »accipi possunt; sed memores esse debemus, si forte systema insuper con»tineat triangula talia, quorum anguli non sint immediate observati, sed »prodeant tamquam summae vel differentiae angulorum revera observatorum, »illos non inter observatorum numerum referendos, sed in forma composi»tionis suae in calculis retinendos esse. Aliter vero res se habebit in modo »observandi ei simili, quem sequutus est clar. Struve* (Astr. Nachr. II p. 431) »*ubi directiones singulorum laterum ab eodem vertice proficiscentium obtinen»tur per comparationem cum una eademque directione arbitraria. Tunc »scilicet hi ipsi anguli pro* v, v', v'', *etc. accipiendi sunt, quo pacto omnes »anguli triangulorum in forma differentiarum se offerent, aequationesque »conditionales primi generis, quibus per rei naturam sponte satisfit, tamquam »superfluae cessabunt. Modus observationis, quem ipse sequutus sum in dimen»sione triangulorum annis praecedentibus perfecta, differt quidem tum a prio»ri tum a posteriori modo, attamen respectu effectus posteriori aequiparari »potest, ita ut in singulis stationibus directiones laterum inde proficiscentium »ab initio quasi arbitrario numeratas pro quantitatibus* v, v', v'', *etc. accipere »oporteat. Duo jam exempla elaborabimus, alterum ad modum priorem, »alterum ad posteriorem pertinens.*«

4.

Betrachten wir hierauf die obige im Art 2 enthaltene Mittheilung, so begegnet uns zuerst der Ausdruck, dass Gauss nicht nur die Winkel selbst, sondern auch ihre Supplemente zum Umkreis gemessen hat. Diesen letzteren Ausdruck meine ich dahin erklären zu dürfen, dass Gauss bei seinen Messungen eine gewisse Anzahl der einzelnen Messungen der Winkel so angestellt habe, dass er die Alhidade des Theodoliten von der Linken zur Rechten, und eine eben so grosse Anzahl von Einzelnmessungen so, dass er die Alhidade von der Rechten zur Linken bewegt habe. Denn dieses kommt in der That der Messung des Sup-

plements der Winkel gleich, und ist nur eine veränderte Ausdrucksweise dafür. Dieses Verfahren wurde schon, ehe Gauss seine Gradmessung anfing, von verschiedenen Astronomen bei ihren geodätischen Messungen angewandt, es wird schon lange als ein unerlässliches Erforderniss angesehen, und wohl stets angewandt.

Gehen wir nun aber die Mittheilung ihrem ganzen Inhalte nach durch, so scheint es, als liesse sie sich mit dem oben angeführten Passus von Gauss nicht in Einklang bringen, da er darin sagt, dass sein Verfahren von dem von ihm zuerst angeführten, — dem Verfahren der Winkelmessungen — verschieden ist, und man dadurch leicht auf den Schluss geführt wird, dass er überhaupt nicht Winkel gemessen habe. Dieses war der erste Eindruck, den die genannte Mittheilung auf mich machte, aber nach einigem Nachdenken darüber kam ich darauf, dass diese Mittheilung mit dem angeführten Passus von Gauss sich in vollständigen Einklang bringen lässt. Dieser Passus, der sonst einige Dunkelheit darbietet, wird zugleich vollständig aufgeklärt.

Zwar kommt ein Nebenumstand mit in Betracht, der etwas störend auftritt; diesen werde ich weiter unten angeben, und zuerst die Zusammenstimmung der zwei scheinbar sich widerstreitenden Stellen entwickeln.

5.

Es liegt an der Hand, dass man jede Winkelmessung als einen Gyrus betrachten kann, in welchem zwei Richtungen beobachtet worden sind, und ich habe in der oft angezogenen Abhandlung gezeigt, dass man diese Eigenschaft dazu benutzen kann, um die Gattung von Bedingungsgleichungen, die Gauss die der ersten Gattung, ich aber locale genannt habe, aus der Reihe der übrigen, die sich auf das Dreiecksnetz selbst beziehen, auszuscheiden, und in den Ausgleichungen auf den Stationen vollständig zu berücksichtigen.

6.

Seien nun auf einer Station n Gegenstände zu beobachten, und habe man alle Winkel zwischen je zweien dieser unabhängig von einander beobachtet, dann sind überhaupt $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Winkel beobachtet worden, zwischen welchen $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ locale Bedingungsgleichungen statt finden.

Folgt man nun der in der Gaussischen Abhandlung ausdrücklich gegebenen, und in Bezug auf die darin vorkommenden Krayenhof'schen Dreiecke angewandten Regel, so muss man diese Bedingungsgleichungen denen, welche das Dreiecksnetz giebt, anreihen, und kann darauf das Gaussische, in derselben Abhandlung entwickelte Ausgleichungsverfahren anwenden.

Zerlegt man hingegen, wie in meiner oft angezogenen Abhandlung erklärt, und im Art. 107 durch ein Beispiel erläutert ist, diese Winkelbeobachtungen in Richtungsbeobachtungen, so erhält man $\frac{n(n-1)}{2}$ Gyri von je zwei Richtungen, die von einem beliebigen Anfangspunkt gezählt werden können. Man findet leicht dass in diesem System von Gyris jede Richtung $n-1$ mal vorkommt. Es muss nun, ehe man die verschiedenen Stationen mit einander verbinden kann, die Ausgleichung auf der Station vorgenommen werden, und diese werde ich nach dem ersten von mir gegebenen Verfahren ausführen.

7.

Die Gewichte der Beobachtungen an sich, oder die der nackten Beobachtungen sollen einander gleich gesetzt, und demzufolge in Bezug auf die Richtungen

$$p = p' = p_{,} = p_{,}' = \text{etc.} = 1$$

gesetzt werden. Zufolge des Art. 67 meiner Abhandlung werden hierauf

$$P = P_{,} = \text{etc.} = 2$$
$$Q = Q' = \text{etc.} = n-1$$
$$\frac{p^2}{P} = \frac{p^2}{P_{,}} = \text{etc.} = \frac{1}{2}$$

und nach dem Art. 69

$$(pp) = (p'p') = \text{etc.} = \frac{n-1}{2}$$
$$(pp') = (p'p'') = \text{etc.} = \frac{1}{2}$$

welche letzte Gleichung sich überhaupt auf alle (pp) bezieht, in welchen die beiden p verschiedenartige Striche haben. Zu mehrerer Deutlichkeit werde ich das Täfelchen der (pp) aufstellen, welches in dem in Rede stehenden Falle immer die folgende Form haben wird,

	p	p'	p''	p'''	etc.
p	$\frac{n-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	etc.
p'		$\frac{n-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	etc.
p''			$\frac{n-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	etc.
p'''				$\frac{n-1}{2}$	etc.
etc.					etc.

Wenden wir uns nun zum Inhalt des Art. 76 derselben Abhandlung, und bestimmen die dort mit N, N', etc. bezeichneten Grössen grade so wie dort angegeben ist, dann finden wir

$$N = N' = N'' = \text{etc.} = \text{etc.} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

und die Coefficienten der Endgleichungen auf der Station werden

$$(aa) = (bb,1) = (cc,2) = \text{etc.} = \tfrac{n}{2}$$

neben welchen alle Coefficienten, in deren Bezeichnung zwei verschiedene Buchstaben vorkommen $= 0$ sind. Die Verbesserungen der vorläufig angenommenen Werthe der Richtungen werden daher

$$w(1) = \tfrac{2(lx)}{n}$$
$$w(2) = \tfrac{2(lx')}{n}$$
$$w(3) = \tfrac{2(lx'')}{n}$$
$$\text{etc.}$$

Alle in der Abhandlung mit α, β, γ, etc. nebst angehängten Strichen bezeichneten Grössen werden Null, und das allgemeine dort entwickelte Ausgleichungsverfahren verwandelt sich in das specielle Gaussische. Der hier entwickelte Fall fügt daher den beiden in den Artt. 77 und 78 entwickelten ähnlichen Fällen einen dritten hinzu.

8.

Jetzt lässt sich der hier im Art. 3 angeführte Passus von Gauss vollständig erklären. Gauss sagt, er habe nicht das von ihm zuerst angeführte Verfahren der *praxis vulgaris* befolgt, welches, wie man weiss, damals darin bestand, dass man die Winkel zwischen je zwei einander zunächst liegenden Dreiecksseiten maass, und höchstens hie und da die Messung von Summen dieser Winkel, und die Ergänzungen im ganzen Umkreis (oder Horizont) hinzufügte. In der That hat er, zufolge des

Vorhergehenden, sich nicht damit begnügt, in einzelnen Fällen die eben genannten Summen und Ergänzungen zu messen, und er konnte daher sagen, dass sein Verfahren von der *praxis vulgaris* verschieden sei. Gauss sagt ferner, er habe auch nicht das zweite vorher von ihm angeführte Verfahren, nemlich das von Struve angegebene Verfahren der Richtungsmessungen, angewandt. Er hat, dem Vorhergehenden zufolge, in der That nicht Richtungen gemessen. Die dritte Angabe von Gauss, dass sein Verfahren *respectu effectus* dem Verfahren von Struve gleich gestellt werden könne, hat sich durch die Entwickelungen des vor. Art. auch bestätigt. Nur muss hier freilich hinzugefügt werden, dass in Bezug auf diesen Punkt stillschweigend vorausgesetzt ist, dass man bei Anwendung des Struve'schen Verfahrens in jedem Gyrus alle Richtungen eingeschnitten habe, denn sollte dieses nicht der Fall sein, so wäre die Wirkung eine andere.

9.

Ich sehe mich zufällig in den Stand gesetzt, den hier gegebenen Entwickelungen ein factisches Beispiel hinzu fügen zu können. In Schum. Astr. Nachr. Band IX, No. 205 u. 206 habe ich die folgende Aufgabe gelöst: »Wenn man zwischen einer beliebigen Anzahl von Punkten »ringsum im Horizonte (oder allgemeiner in einer und derselben Ebene) »die Winkel zwischen je zweien derselben gemessen hat, die Beobach»tungen so auszugleichen, dass die Summe der Quadrate der Verbesse»rungen ein Minimum wird.«

Diese Aufgabe ist in der That dieselbe, die ich hier im Art. 7 gelöst habe, nur ist jene Auflösung von dieser durchaus verschieden. Ich habe a. a. O. ein factisches Beispiel hinzugefügt, welches darin besteht, dass ich am 31. März 1827 die Fadenabstände im Meridiankreise der hiesigen Sternwarte den Forderungen der oben angeführten Aufgabe gemäss gemessen habe. Dass die Veranlassung zur Lösung dieser Aufgabe von Gauss herrührt, habe ich am Schlusse meines Aufsatzes ausgesprochen, und es geht aus den Aufklärungen, die der gegenwärtige Aufsatz giebt, hervor, dass Gauss mir schon damals im Grunde sein Verfahren bei seinen geodätischen Vermessungen mitgetheilt hat, nur hat er diese Anwendung verschwiegen, und blos die Anwendung auf die Bestimmung der Fadenabstände in den Meridianinstrumenten genannt. Den Tag, an welchem Gauss mir diese Mittheilung machte, kann ich

jetzt nicht mehr erinnern, aber aus dem Umstande, dass die Beobachtungen meines Beispiels im März des Jahres 1827 angestellt worden sind, verbunden mit anderen Erinnerungen aus jener Zeit, die ich noch vollständig im Gedächtniss habe, darf ich schliessen, dass die Mittheilung im Laufe des Jahres 1826 erfolgt ist. Ich werde nun dieses Beispiel nach der hier gegebenen Methode berechnen.

10.

Die Beobachtungen sind die folgenden:

Fäden	(2—1)	Gemessene Winkel	3590
-	(3—2)	- -	3066
-	(4—3)	- -	1808
-	(5—4)	- -	1823
-	(6—5)	- -	1723
-	(7—6)	- -	1798
-	(8—7)	- -	3293
-	(9—8)	- -	3395
-	(3—1)	- -	6630
-	(4—2)	- -	4883
-	(5—3)	- -	3645
-	(6—4)	- -	3570
-	(7—5)	- -	3528
-	(8—6)	- -	5085
-	(9—7)	- -	6683
-	(4—1)	- -	8438
-	(5—2)	- -	6713
-	(6—3)	- -	5390
-	(7—4)	- -	5353
-	(8—5)	- -	6828
-	(9—6)	- -	8476
-	(5—1)	- -	10280
-	(6—2)	- -	8438
-	(7—3)	- -	7188
-	(8—4)	- -	8656
-	(9—5)	- -	10223

Fäden	(6—1)	Gemessene Winkel	12026
-	(7—2)	- -	10253
-	(8—3)	- -	10463
-	(9—4)	- -	12056
-	(7—1)	- -	13828
-	(8—2)	- -	13523
-	(9—3)	- -	13861
-	(8—1)	- -	17118
-	(9—2)	- -	16948
-	(9—1)	- -	20478

Diese Beobachtungen habe ich a. a. O. in Einheiten des Umlaufs der Mikrometerschraube des angewandten Heliometers ausgedrückt, hier habe ich zur Vermeidung der Nullen, die sonst in den Rechnungen zum Vorschein kommen würden, den tausendsten Theil dieses Umlaufs zur Einheit gewählt.

11.

Es müssen jetzt zuerst durch Additionen der gemessenen Winkel die ihnen entsprechenden Richtungen berechnet werden, deren erste willkührlich ist, und für welche ich daher den Werth 1000 annehmen werde. Hierauf sind vorläufige Werthe der Richtungen nach Gutdünken anzunehmen, und die Unterschiede dieser mit den beobachteten Werthen zu berechnen. Die Form, in welcher diese Rechnungen aufzustellen sind, ist am Zweckmässigsten die der ersten Stationstäfelchen der Abhandlung, nur wird im gegenwärtigen Falle dieses Täfelchen auch die beobachteten Werthe der Richtungen zugleich enthalten müssen. Dieses Täfelchen ist jetzt das folgende, dessen Columnen, die nicht besonders überschrieben sind, sowohl die beobachteten Richtungen, wie die Unterschiede dieser von den vorläufig angenommenen Werthen derselben enthalten.

r	Vorl. Werthe							
1	1000	1000 0						
2	4590	4590 0	4590 0					
3	7656		7656 0	7656 0				
4	9464			9464 0	9464 0			
5	11287				11287 0	11287 0		
6	13010					13010 0	13010 0	
7	14808						14808 0	
8	18101							
9	21496							
1			1000 0					
2				4590 0				
3			7630 −26		7656 0			
4				9473 +9		9464 0		
5					11301 +14		11287 0	
6						13034 +24		
7	14808 0						14815 +7	
8	18101 0	18101 0						
9		21496 0						
1			1000 0					
2				4590 0				
3					7656 0			
4			9438 −26			9464 0		
5				11303 +16			11287 0	
6	13010 0				13046 +36			13010 0
7		14808 0				14817 +9		

r	Vorl. Werthe							
8	18095 −6						18115 +14	
9		21491 −5						21486 −10
1	10000					10000		
2		45900					45900	
3			76560					76560
4				94640				
5	11280 −7				11287 0			
6		13028 +18				13026 +16		
7			14844 +36				14843 +35	
8				18120 +19				18119 +18
9					21510 +14			
1		10000			10000		10000	
2			45900			45900		
3				76560				
4	94640							
5								
6								
7		14828 +20						
8			18113 +12		18118 +17			
9	21522 +26			21517 +21		21538 +42	21478 −18	

Ich habe hier der leichteren Uebersicht wegen alle Zahlen hingeschrieben, in der Praxis würde man aber alle Richtungen weglassen können, die mit den vorläufigen Werthen übereinstimmen müssen.

12.

Das folgende Täfelchen ist das zweite Stationstäfelchen, welches auf einfache Weise dadurch aus dem ersten folgt, dass man das arithmetische Mittel aus der Summe der Fehler, die jeder Gyrus zeigt, von diesen Fehlern abzieht; eine Rechnung welche sich im gegenwärtigen Falle im Kopfe machen lässt.

No. des Gyrus	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	0	0							
2		0	0						
3			0	0					
4				0	0				
5					0	0			
6						0	0		
7							0	0	
8								0	0
9	+13.0		−13.0						
10		−4.5		+4.5					
11			−7.0		+7.0				
12				−12.0		+12.0			
13					−3.5		+3.5		
14						+3.0		−3.0	
15							+2.5		−2.5
16	+13.0			−13.0					
17		−8.0			+8.0				
18			−18.0			+18.0			
19				−4.5			+4.5		
20					−7.0			+7.0	
21						+5.0			−5.0
22	+3.5				−3.5				
23		−9.0				+9.0			
24			−18.0				+18.0		
25				−9.5				+9.5	
26					−7.0				+7.0
27	−8.0					+8.0			
28		−17.5					+17.5		
29			−9.0					+9.0	
30				−13.0					+13.0
31	−10.0						+10.0		
32		−6.0						+6.0	
33			−10.5						+10.5
34	−8.5							+8.5	
35		−21.0							+21.0
36	+9.0								−9.0
$(lx), (lx'),$ etc.	+12.0	−66.0	−75.5	−47.5	−6.0	+55.0	+56.0	+37.0	+35.0

Da hier $n=9$ ist, so wird zufolge des Art. 7

$$w(1) = + \tfrac{2}{3} \times 12{,}0 \ , \ w(2) = - \tfrac{2}{3} \times 66{,}0 \ , \text{ etc.}$$

oder

$$\begin{aligned} w(1) &= + \ 2.67 \\ w(2) &= - \ 14.67 \\ w(3) &= - \ 16.78 \\ w(4) &= - \ 10.55 \\ w(5) &= - \ 1.33 \\ w(6) &= + \ 12.22 \\ w(7) &= + \ 12.44 \\ w(8) &= + \ 8.22 \\ w(9) &= + \ 7.78 \end{aligned}$$

und fügt man diese Werthe den oben vorläufig angenommenen Werthen der Richtungen hinzu, so erhält man die folgenden wahrscheinlichsten Werthe derselben,

$$\begin{aligned} y(1) &= \ 1002.67 \\ y(2) &= \ 4575.33 \\ y(3) &= \ 7639.22 \\ y(4) &= \ 9453.45 \\ y(5) &= 11285.67 \\ y(6) &= 13022.22 \\ y(7) &= 14820.44 \\ y(8) &= 18109.22 \\ y(9) &= 21503.78 \end{aligned}$$

In den A. N. No. 206 fand ich, in der hier angenommenen Einheit ausgedrückt, die Werthe der Winkel wie folgt, denen ich die aus den vorstehenden Richtungen folgenden hinzufüge.

$$\begin{aligned} 2-1 &= 3572.7 \ldots\ldots 3572.66 \\ 3-2 &= 3063.9 \ldots\ldots 3063.89 \\ 4-3 &= 1814.2 \ldots\ldots 1814.23 \\ 5-4 &= 1832.2 \ldots\ldots 1832.22 \\ 6-5 &= 1736.5 \ldots\ldots 1736.55 \\ 7-6 &= 1798.2 \ldots\ldots 1798.22 \\ 8-7 &= 3288.8 \ldots\ldots 3288.78 \\ 9-8 &= 3394.6 \ldots\ldots 3394.56 \end{aligned}$$

die, wie man sieht, mit jenen vollständig übereinstimmen.

13.

Ich komme jetzt auf den Nebenumstand, dessen ich im Art. 4 erwähnt habe, und der etwas störend auftritt.

Zufolge der oft angezogenen Abhandlung ist, mit Bezug darauf dass alle ursprünglichen Gewichte gleich 1 gesetzt worden sind, die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler

$$W = (ll) - (lx)\, w(1) - (lx')\, w(2) - (lx'')\, w(3) - \ldots$$

wo (ll) die Summe der Quadrate der Fehler bezeichnet, die das zweite Stationstäfelchen angiebt. Für unser Beispiel findet man

$$(ll) = 6153$$

und

$$(lx)\, w(1) + (lx')\, w(2) + \ldots = 4721$$

folglich

$$W = 1432$$

A. N. No. 206 wurde, in die hier angewandte Einheit übertragen,

$$W = 2868$$

gefunden, welcher Werth, bis auf einen kleinen, zu übergehenden Unterschied, das Doppelte von dem hier gefundenen ist. Nun ist aber hier das Gewicht einer Richtung = 1 gesetzt, während dort das Gewicht eines Winkels = 1 gesetzt wurde, und demzufolge muss aus einem nahe liegenden Grunde hier der Werth der Grösse W halb so gross sein wie dort. Die beiden vorstehenden Resultate für W befinden sich also nicht minder mit einander in Uebereinstimmung wie die Werthe der Richtungen und Winkel.

Nach dem Art. 150 der oft angezogenen Abhandlung steht die Berechnung des Divisors D, des Ausdrucks, welcher den schliesslichen mittleren Fehler einer Richtung giebt, wie folgt:

$$\begin{aligned}
(Al) &= 72\\
(As) &= 1\\
(Ab) &= 0\\
-(Ax) &= -9\\
-(Au) &= -36\\
\hline
D &= 28
\end{aligned}$$

denselben Werth habe ich in No. 206 der A. N. gefunden, obgleich ich dort diesen Divisor auf ganz andere Art berechnet habe. Berechnet man daher aus den hier erhaltenen Daten den mittleren Fehler einer Richtungsmessung, und vergleicht ihn mit dem a. a. O. erhaltenen mittleren Fehler einer Winkelmessung, so wird das Verhältniss des erstgenannten Fehlers zum zweitgenannten wie $\sqrt{\frac{1}{2}} : 1$ sein, welches mit einem bekannten Satze der Wahrscheinlichkeitsrechnung übereinstimmt.

14.

Die von mir auf zwei, ganz von einander verschiedenen Wegen erhaltenen Resultate sind in jeder Beziehung mit einander identisch, und so wird es nicht blos in dem hier ausgeführten Beispiele, sondern stets der Fall sein. Vergleichen wir aber den letzten Theil dieser Resultate mit der oft angezogenen Abhandlung von Gauss, so kommen wir auf einen Unterschied.

Die Durchführung des Beobachtungsverfahrens, welches hier als das von Gauss angewandte angenommen worden ist, giebt in Bezug auf die Ausgleichung auf den Stationen für die Summe der Fehlerquadrate einen von der Null verschiedenen Werth, während Gauss in seiner Abhandlung dieser Summe gar nicht erwähnt, und sie folglich stillschweigend $= 0$ gesetzt hat. Es knüpft sich hieran noch die folgende Folgerung. Wenn man annimmt, dass bei einer Triangulation auf jeder Station dasselbe, im Vorhergehenden für das Gaussische Beobachtungsverfahren gehaltene, Verfahren ausgeführt worden ist, so bekommt der Divisor D des Ausdrucks für den schliesslichen mittleren Fehler einer Richtung (oder eines Winkels), der sich nach der Ausgleichung des Netzes ergiebt, einen von der Anzahl der Bedingungsgleichungen oder, von (Ab), verschiedenen Werth.

Gauss hat in dem in seiner Abhandlung aus seiner Gradmessung entlehnten Beispiel den, von den Ausgleichungen auf den Stationen herrührenden, hier für das Beispiel berechneten Theil von W nicht in Betracht gezogen, und $D = (Ab)$ gesetzt. Die aus den obigen Betrachtungen sich ergebenden Gesammtwerthe von W und D sind beide nothwendig grösser als die von Gauss angewandten, aber eine Proportionalität in

den Vergrösserungen kann auf keinen Fall angenommen werden, da sie von zufälligen Umständen abhängen.

15.

Wenden wir hierauf noch einen Blick auf das Verfahren der Richtungsbeobachtungen. Auf allen Stationen, auf welchen Richtungen beobachtet werden, und zugleich in jedem Gyrus alle Richtungen beobachtet worden sind, wird $W = 0$, wenn man zur Bestimmung dieser Grösse die Resultate der Gruppen von Gyris anwendet. Die Anwendung der Gruppen von Gyris zu diesem Zweck ist, wenn Winkel beobachtet worden sind, der Anwendung der Endresultate der Winkelbeobachtungen völlig analog. Wenn auf allen Stationen Richtungen auf solche Art, wie eben verlangt wurde, beobachtet worden sind, dann wird am Ende der Ausgleichungsrechnungen $D = (Ab)$.

Wenn nur die eigentlichen Dreieckswinkel beobachtet worden sind, und man etwa vorhandene locale Bedingungsgleichungen mit den übrigen Bedingungsgleichungen zugleich behandelt, dann finden die beiden eben erklärten Gleichungen wieder statt. Es werden nemlich für die Stationen wieder $W = 0$, und für die schliessliche Berechnung des mittleren Fehlers wird wieder $D = (Ab)$. In Bezug auf das in der Gaussischen Abhandlung aus den Krayenhof'schen Dreiecken entlehnte Beispiel stimmt daher die Berechnung des mittleren Fehlers mit den vorstehenden Auseinandersetzungen überein, aber in Bezug auf das aus eigenen Beobachtungen entlehnte Beispiel ist dieses nicht der Fall.

16.

Es bildet sich von selbst in Folge der vorstehenden Betrachtungen die Schlussfrage: Warum hat Gauss die im vorvor. Art. erklärten Umstände, die unzweifelhaft vorhanden sind, nicht berücksichtigt? Eine unmittelbare Antwort auf diese Frage können wir nicht mehr erhalten, da Gauss nicht mehr unter den Lebenden weilt. Eine mittelbare Antwort von ihm selbst wäre durch seinen litterarischen Nachlass vielleicht zu erhalten, doch kann ich jetzt nicht wissen, ob dieses der Fall sein wird. Sollte eine Aufklärung von Gauss selbst nicht aufgefunden werden können, so bleibt uns nur übrig zu vermuthen, dass entweder das

oben erklärte Beobachtungsverfahren doch nicht ganz mit dem Gaussischen übereinstimmt, oder dass er die in Rede stehenden Umstände übersehen hat. Wenn die letztere Vermuthung richtig sein sollte, so wäre sie in Bezug auf Gauss ein äusserst vereinzelt dastehender Fall. Es ist jedenfalls sehr zu bedauern, dass Gauss sein Beobachtungsverfahren nicht veröffentlicht hat.

Druckfehler.

S. 69 Z. 5 v. u. statt: wahren dieser; lies: wahren Werth dieser.

S. 148 - 5 - - - Arten überein; - Arten erhaltenen überein.

ENTWICKELUNG

EINES

NEUEN VERÄNDERTEN VERFAHRENS

ZUR

AUSGLEICHUNG EINES DREIECKSNETZES

MIT

BESONDERER BETRACHTUNG DES FALLES

IN WELCHEM

GEWISSE WINKEL VORAUS BESTIMMTE WERTHE BEKOMMEN SOLLEN.

VON

P. A. HANSEN.

Im Art. 132 der den Schriften der Königl. S. Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig einverleibten, und den Titel »Von der Methode der kleinsten Quadrate im Allgemeinen, und in ihrer Anwendung auf die Geodäsie« führenden Abhandlung habe ich darauf aufmerksam gemacht, dass man die Ausgleichung sehr grosser Dreiecksnetze, die theoretisch zwar als ein untheilbares Ganzes betrachtet werden muss, nicht praktisch ausführen kann, ohne sie in mehrere Abtheilungen zu zerlegen. Die Ursache davon ist die, dass die Arbeit, die sie sonst verursachen würde, eine solche Ausdehnung annimmt, dass sie nicht zu bewältigen ist. Die Abschnitte, die man deshalb einzuführen sich genöthigt sieht, werden zweckmässig dorthin verlegt, wo neue Grundlinien eintreten, jedoch können sie auch an gewisse andere Stellen des Dreiecksnetzes verlegt werden, und namentlich dahin, wo einige einzelne, an einander gereihte Dreiecke vorkommen, welches in grossen Dreiecksketten immer vorkommen wird, da nie allenthalben die Einmessung von Diagonalen praktisch ausführbar sein wird. Alle grossen Dreiecksnetze geben Beispiele von solchen, darin vorkommenden Stellen. Diese scheiden aber gemeiniglich die Verbesserungen, die aus dem Ausgleichungsverfahren hervor gehen, so von einander ab, dass die der vorhergehenden Richtungen von denen der nachfolgenden, und umgekehrt, nur wenig beeinflusst werden. Die Einlegung eines Abschnittes an solche Stellen kann die Verbesserungen, die das Ausgleichungsverfahren im gegentheiligen Falle geben würde, nur sehr wenig ändern.

In den meisten, und wohl in allen Fällen, wo ein Abschnitt eingeführt wird, tritt der Umstand ein, dass an den Anschlusspunkten Ein oder mehrere Winkel, deren ausgeglichene Werthe durch die Ausgleichung des vorhergehenden Abschnittes schon ihre wahrscheinlichsten

Werthe geworden sind, im neuen Abschnitte unverändert beibehalten werden müssen, da eine Aenderung derselben bewirken würde, dass Bedingungsgleichungen, die schon durch die Ausgleichung des vorhergehenden Abschnittes erfüllt worden sind, nunmehr nicht erfüllt wären, und das ganze Dreiecksnetz unzusammenhängend würde.

Es entsteht daher die Aufgabe, den neuen Abschnitt so auszugleichen, dass diese Winkel unverändert aus der Ausgleichung desselben hervor gehen, und diese ist die erste Aufgabe, die in dieser Abhandlung gelöst wird. Die Auflösung, die ich gefunden habe, ist so einfach, dass sie mit wenigen Worten beschrieben werden kann.

Die Auflösung der allgemeinen Aufgabe der Ausgleichung eines Dreiecksnetzes, die ich in der oben angezogenen Abhandlung gegeben habe, erleidet die folgenden drei einfachen Abänderungen:

1) Die vorläufigen Werthe der beiden Richtungen, die den gegebenen Winkel einschliessen, oder die Schenkel desselben bilden, bestimme man so, dass ihr Unterschied diesem Winkel gleich wird.

2) Die Stationsgleichungen berechne man so, als wenn kein Winkel im Voraus gegeben wäre, aber vor ihrer Auflösung addire man diejenigen derselben, die den eben genannten Richtungen zukommen, und setze die Verbesserungen dieser Richtungen einander gleich. Auf die so sich ergebenden Gleichungen ist das bekannte Auflösungsverfahren anzuwenden.

3) Im zweiten Theile des Ausgleichungsverfahrens addire man vor der Anwendung der Bedingungsgleichungen diejenigen Coefficienten derselben, die den oben bezeichneten Richtungen angehören, und hierauf wende man das genannte, allgemeine Verfahren an.

Weiter hat man sich um den im Voraus gegebenen Winkel nicht zu bekümmern. Die Berechnung der Summe der mit ihren Gewichten multiplicirten Quadrate der übrig bleibenden Fehler, so wie die der Gewichte bleibt, mit Vorbehalt der angeführten Additionen, dieselbe wie immer. Die Ausdehnung der Auflösung auf den Fall, dass mehr wie Ein Winkel gegeben ist, ergiebt sich aus den vorstehenden Regeln von selbst.

Die erste der vorstehenden drei Regeln kommt schon im ersten Anfang der Rechnung in Betracht, und bedingt die Werthe der in den Stationstäfelchen enthaltenen Glieder. Nun kann sich aber ereignen, dass die Stationstäfelchen schon berechnet worden sind, ehe man den

unverändert beizubehaltenden Winkel kannte, und es scheint daher, dass in diesem Falle die Stationstäfelchen von Neuem berechnet werden müssten. Dass dieses nicht nothwendig ist, zeigt der fernere Inhalt dieser Abhandlung. Ich gebe zwei Verfahren für diesen Fall, deren ersteres darin besteht, die schon vorhandenen Stationstäfelchen so zu berichtigen, dass sie der ersten Regel entsprechen, welches durch eine geringe Arbeit geschehen kann. Das zweite Verfahren ist so eingerichtet, dass es die vorhandenen Stationstäfelchen so lässt wie sie sind, und statt dessen die Veränderungen giebt, die die obigen Regeln erleiden; Veränderungen, die in einigen kleinen Zusätzen bestehen, deren Beschaffenheit man in der Abhandlung nachsehen kann.

Zur weiteren Erläuterung der entwickelten Verfahrungsarten berechne ich ein Beispiel, welches theils einer vorhandenen Vermessung entnommen, theils, um die Umstände worauf es hier ankommt mehr hervor treten zu lassen, fingirt ist. Ich führe dieses Beispiel auf mehrere Arten durch, um die Uebereinstimmung der Resultate, die jedes der angewandten Verfahren giebt, zu zeigen. Um die hier entwickelte Auflösung auch auf einen Fall anzuwenden, der in der Praxis schon vorgekommen ist, berechne ich auch ein aus der Preuss. Küstenvermessung entnommenes Beispiel, da der hier behandelte Fall in dieser Vermessung mehrmals in Anwendung gebracht worden ist. In diesem Beispiel habe ich keine Uebereinstimmung, sondern vielmehr bedeutende Unterschiede gefunden; Unterschiede, die in den Winkeln auf fast 0″.7 gehen, und eine volle Secunde erreicht hätten, wenn nicht zufällig ein günstiger Umstand vorhanden wäre. Auch die Summe der Fehlerquadrate finde ich wesentlich grösser wie die, die aus dem hier entwickelten Verfahren hervorgeht. Ich habe keine Erklärung dieser grossen Unterschiede hinzugefügt, da jeder selbst die richtige wird finden können.

Das Verfahren, welches ich in dieser Abhandlung zur Lösung der vorbenannten Aufgabe angewandt habe, und darin besteht, dass die besonderen Bedingungsgleichungen, die durch im Voraus gegebene Werthe gewisser Winkel entstehen, dem ersten Theile der Auflösung, das heisst den Ausgleichungen auf den Stationen einverleibt werden, ist einer allgemeinen Anwendung fähig, und kann strenge genommen auf alle vorhandenen Bedingungsgleichungen angewandt werden. In dieser Ausdehnung angewandt würde es indess keinen Vortheil gewähren, aber wenn man es auf eine Anzahl der vorhandenen Bedingungsgleichungen,

namentlich auf eine Anzahl der vorhandenen Winkelgleichungen anwendet, so kann man allerdings die ganze Arbeit, die das Ausgleichungsverfahren erfordert, wesentlich abkürzen. Ich habe daher auch den Fall entwickelt, wo man eine der Winkelgleichungen den Ausgleichungen auf den Stationen einverleiben will, und aus dieser Entwickelung folgt ohne Weiteres, wie zu verfahren ist, wenn man diese Einverleibung auf mehrere Winkelgleichungen ausdehnet. Es entsteht hieraus ein neues, verändertes Verfahren für die Ausgleichung eines Dreiecksnetzes, dessen Anwendung aber Umsicht und genaue Untersuchung des Falles voraussetzt, auf welchen man es anwenden will. Stellt man im Voraus eine solche Untersuchung des speciellen Falles an, so kann man durch Anwendung dieses Verfahrens sich die ganze Arbeit, die das Ausgleichungsverfahren verlangt, wesentlich abkürzen, aber auch durch Unterlassung dieser Untersuchung in grössere Weitläuftigkeiten gerathen. Die Untersuchung ist dahin zu richten, ob die Vergrösserung der Arbeit der Auflösung der Stationsgleichungen durch die Verminderung der Arbeit der Auflösung der Endgleichungen aufgewogen wird, oder nicht. Wenn jene Vergrösserung für beträchtlicher zu halten ist, wie diese Verminderung, so ist die Anwendung des in Rede stehenden Verfahrens nicht angemessen, wenn aber das Gegentheil sich herausstellt, dann ist die Anwendung desselben mit Vortheil und Zeitersparniss verknüpft.

Als Maassstab für die Arbeit, die die Auflösung eines Systems von linearischen Gleichungen von der Beschaffenheit, die dasselbe hier immer hat, verursacht, ist zu bemerken, dass diese Arbeit nahe im Verhältniss des Cubus der Anzahl der Unbekannten wächst, wenn diese Anzahl überhaupt gross ist, und keine, oder nur wenige, Coefficienten Null sind.

1.

Betrachten wir zuerst die Fälle, dass bei der Ausgleichung eines Dreiecksnetzes gewisse, durch vorangegangene Vermessungen bestimmte Winkel unverändert beibehalten werden sollen, so liegt auf der Hand, dass diese Bedingung ihre strenge Berücksichtigung dadurch findet, dass man die Bedingungsgleichungen, die diese unverändert beizubehaltenden Winkel geben, aufstellt, sie den übrigen Bedingungsgleichungen, die das Dreiecksnetz darbietet, anreiht, und darauf das allgemeine Verfahren anwendet. Diese Bedingungsgleichungen haben die einfachste Form, die vorkommen kann, denn bezeichnet man die Richtungen, die diese Winkel einschliessen, oder deren Schenkel sie sind, mit $x^{(p)}$, $x^{(q)}$, $x^{(r)}$, $x^{(s)}$, etc. und die Werthe der Winkel, die unverändert beibehalten werden sollen, mit $A^{p,q}$, $A^{r,s}$, etc. so werden

$$x^{(p)} - x^{(q)} = A^{p,q}$$
$$x^{(r)} - x^{(s)} = A^{r,s}$$
etc.

die Gleichungen, die den Winkel- und Seitengleichungen des Dreiecksnetzes anzureihen, und in das allgemeine Ausgleichungsverfahren einzuschliessen sind.

2.

Wenn hiemit alles erschöpft wäre, was sich über den gegenwärtigen Fall sagen lässt, so hätte ich diesen gar nicht in Rede zu ziehen brauchen, denn das Vorhergehende versteht sich von selbst, und bedingt gar keine Abänderung des allgemeinen Verfahrens. Aber es lässt sich noch Wesentliches darüber sagen. Die eben beschriebenen, hinzukommenden Bedingungsgleichungen vergrössern die Anzahl der Endgleichungen, die in ihrer Gesammtheit das System der schliesslich aufzulösenden Gleichungen bilden, und wenn die übrigen Bedingungs-

gleichungen für sich schon in grosser Anzahl vorhanden sind, so können die obigen Gleichungen, selbst wenn nur Eine derselben vorhanden wäre, schon die Arbeit, die die Auflösung der Endgleichungen verursacht, beträchtlich vermehren. Es wird daher von Nutzen sein ein Verfahren zu besitzen, durch welches man diese Bedingungsgleichungen berücksichtigen kann, ohne die Zahl der Endgleichungen zu vergrössern. Es wird um so mehr die Kenntniss eines richtigen Verfahrens zu diesem Zweck ein Erforderniss der Gegenwart sein, da ein vor zwanzig Jahren veröffentlichtes Verfahren durchaus unrichtig ist.

Ich habe bereits im IX. Bande der Astr. Nachr. gezeigt, wie man die Bedingungsgleichungen mit den Stationsgleichungen verflechten kann, und dieses Verfahren in ausgedehnterer Weise auch in der Abhandlung »Von der Methode der kleinsten Quadrate u. s. w.« angegeben. In dieser Abhandlung habe ich unter andern auch gezeigt, wie man die »localen« Bedingungsgleichungen den Stationsgleichungen einverleiben kann, ohne die allgemeine Auflösung zu ändern, und werde hier in Bezug auf die oben bezeichneten Gleichungen ein ähnliches Verfahren entwickeln. Diese letztgenannten Gleichungen kann man zwar auch locale Bedingungsgleichungen nennen, aber das Verfahren, welches sie erfordern, fällt etwas anders aus als das für die in der Abhandlung eben so genannten Gleichungen anzuwendende. Ich werde mich in den Entwickelungen fürs Erste an die Gleichungen halten, die die im Art. 1 angegebene Form haben, und erst darauf zeigen, wie sie auch auf die Gleichungen angewandt werden können, die das Dreiecksnetz als solches liefert.

3.

Zur vollständigen Begründung der folgenden Auflösung unserer Aufgabe bringe ich in Erinnerung, dass in dem Falle, wo, wie hier, die Veränderlichen nicht von einander unabhängig sind, die Theorie der Maxima und Minima drei verschiedene Verfahrungsarten beweist, deren jedes man nach Belieben, oder nach Massgabe der Umstände, anwenden kann.

Man kann erstens im Voraus durch die zwischen den Veränderlichen statt findenden Bedingungsgleichungen so viele Veränderliche eliminiren, wie Bedingungsgleichungen vorhanden sind, und da hierauf die noch vorhandenen Veränderlichen von einander unabhängig sind, so kann man auf diese die Theorie der Maxima und Minima anwenden,

die überhaupt für unabhängige Veränderliche statt findet. Nachdem hiemit die Werthe der unabhängigen Veränderlichen ermittelt worden sind, erhält man die der abhängigen durch die Substitution jener in die Bedingungsgleichungen.

Zweitens kann man die Function, die ein Maximum oder Minimum werden soll, zuerst so behandeln, als wäre die Abhängigkeit verschiedener Veränderlichen von einander nicht vorhanden. Man darf das vollständige Differential derselben bilden und gleich Null setzen. Aber man darf jetzt nicht wie im ersten Falle dieses Differential in so viele Gleichungen zerlegen, wie Differentiale darin vorkommen, sondern muss durch die Differentiale der Bedingungsgleichungen so viele Differentiale eliminiren, wie Bedingungsgleichungen vorhanden sind. Erst nachdem dieses geschehen ist, darf der Coefficient eines jeden der noch vorhandenen Differentiale gleich Null gesetzt werden, und aus den so entstandenen Gleichungen kann man auch die abhängigen Veränderlichen selbst durch die Bedingungsgleichungen eliminiren.

Endlich drittens ist auch folgendes Verfahren zulässig. Zur ursprünglichen, unveränderten Function die ein Maximum oder Minimum werden soll, addire man die Bedingungsgleichungen, nachdem jede derselben mit einem unbestimmten Factor multiplicirt worden ist. Die so gebildete Function differentiire man vollständig, und setze ohne Weiteres den Coefficienten eines jeden, der darin vorkommenden Differentiale, gleich Null.

Ich füge diesem hinzu, dass in der Theorie der Maxima und Minima, ausser diesen drei Verfahrungsarten, keine anderen vorhanden sind, und daher von den obigen Regeln nie abgewichen werden darf.

Dagegen ist man in einer und derselben Aufgabe nicht an Eine dieser Verfahrungsarten gebunden, sondern kann sie alle drei, wenn man es für angemessen erachtet, untermischt anwenden, sich also in Bezug auf einige der vorhandenen Bedingungsgleichungen des einen, und in Bezug auf andere des andern oder dritten derselben bedienen.

4.

Ich werde im Folgenden in Bezug auf die Bedingungsgleichungen, die das Dreiecksnetz darbietet, das dritte Verfahren des vor. Art., wie früher geschehen ist, anwenden, aber in Bezug auf die Bedingungsgleichungen, die im Art. 1 aufgestellt wurden, und hier zuerst abgehandelt

werden sollen, mich des zweiten Verfahrens bedienen. Die Bezeichnungen, die ich anwenden werde, sollen dieselben sein wie in der oben angezogenen Abhandlung, und in dem Aufsatze, welcher kürzlich unter der Ueberschrift »Kurz gefasste, rationelle Ableitung u. s. w.« den Berichten d. Königl. S. Gesellschaft d. W. einverleibt worden ist; den Gang der Entwickelungen werde ich auf ähnliche Weise fortführen, wie dort.

Es soll daher auch hier angenommen werden, dass Richtungen beobachtet worden sind, da, zufolge der angezogenen Abhandlung, der Fall in welchem Winkel beobachtet worden sind, auf diesen zurück geführt werden kann. Die wahrscheinlichsten Werthe der Richtungen seien x, x', x'', etc., während die Beobachtungen dafür bezügl.

$$\begin{gathered} l,\ l_{,},\ l_{,,},\ \text{etc.} \\ l',\ l'_{,},\ l'_{,,},\ \text{etc.} \\ l'',\ l''_{,},\ l''_{,,},\ \text{etc.} \\ \text{etc.} \end{gathered}$$

gegeben haben, und diesen Bestimmungen an sich (den nackten Beobachtungen) sollen bez. die Gewichte

$$\begin{gathered} p,\ p_{,},\ p_{,,},\ \text{etc.} \\ p',\ p'_{,},\ p'_{,,},\ \text{etc.} \\ p'',\ p''_{,},\ p''_{,,},\ \text{etc.} \\ \text{etc.} \end{gathered}$$

zukommen. Die wahrscheinlichsten Verbesserungen der Anfangspunkte der verschiedenen Gyri, oder Gruppen von Gyris, sollen mit u, $u_{,}$, $u_{,,}$, etc. bezeichnet werden.

5.

In der Voraussetzung nun, dass keine Beobachtungsfehler vorgekommen sind, erhält man aus den Beobachtungen der verschiedenen Gyri, oder Gruppen von Gyris, die folgenden Gleichungen,

$$\begin{gathered} x+u=l,\ x'+u=l',\ x''+u=l'',\ \text{etc.} \\ x+u_{,}=l_{,},\ x'+u_{,}=l'_{,},\ x''+u_{,}=l''_{,},\ \text{etc.} \\ x+u_{,,}=l_{,,},\ x'+u_{,,}=l'_{,,},\ x''+u_{,,}=l''_{,,},\ \text{etc.} \\ \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{gathered}$$

Ich bemerke hiezu, erstens dass die x, x', x'', etc. nicht die vollständigen Werthe der Richtungen, und die l, l', etc. $l_{,}$, $l'_{,}$, etc. etc. nicht die vollständigen Werthe der Beobachtungen zu bedeuten brauchen, sondern dass man von jedem l, welches einer und derselben Richtung

angehört, einen beliebigen unveränderlichen, genäherten Werth dieser letzteren im Voraus abziehen darf. Es werden hierauf die x nicht die wahrscheinlichsten Werthe der Richtungen selbst, sondern die wahrscheinlichsten Verbesserungen der vorläufig angenommenen Werthe derselben sein.

Zweitens bemerke ich, dass man von allen l, die zu einem und demselben Gyrus. oder einer und derselben Gruppe von Gyris gehören, eine beliebige Grösse abziehen, oder eine solche zu denselben addiren darf.

Durch zweckmässige Benutzung dieser beiden Bemerkungen kann man immer bewirken, dass in den obigen Gleichungen alle l kleine Grössen werden, deren Werthe eine kleine Anzahl von Secunden nicht übersteigen, und die Folge davon wird sein, dass auch alle x und u solche kleine Grössen sein werden.

Die Bedingungsgleichungen, die das Dreiecksnetz darbietet, sollen wieder die folgenden sein,

$$qx + q'x' + q''x'' + \ldots + f = 0$$
$$rx + r'x' + r''x'' + \ldots + g = 0$$
$$sx + s'x' + s''x'' + \ldots + h = 0$$
$$\text{etc.}$$

auf welche die obige Bemerkung in Bezug auf die x auch anzuwenden ist. Es bedeuten demzufolge die Coefficienten der Unbekannten in diesen Gleichungen die Differentialquotienten der ursprünglichen Gleichungen in Bezug auf x, x', x'', etc., und die f, g, h, etc. sind die Werthe die die ursprünglichen Gleichungen annehmen, nachdem die angenommenen, vorläufigen Werthe der Richtungen darin substituirt worden sind.

6.

Da nun der stets vorhandenen Beobachtungsfehler wegen die erste Gruppe der im vor. Art. erhaltenen Gleichungen nie erfüllt sein werden, so muss den Grundsätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung zufolge ihre Bestimmung so getroffen werden, dass die Summe der mit ihren bez. Gewichten multiplicirten Quadrate der übrig bleibenden Fehler ein Minimum werde. Hiebei müssen aber zugleich die im vor. Art. aufgestellten Bedingungsgleichungen strenge erfüllt werden, da sie mathematische Relationen sind, ohne deren Erfüllung kein zusammen hängendes Dreiecksnetz möglich ist. Bei der Anwendung des dritten Verfahrens

des Art. 3 ist es also die folgende Function, die ein Minimum werden muss.

$$\begin{aligned}\text{Min.} = {} & p\,(x+u-l)^2+p'\,(x'+u-l')^2+p''\,(x''+u-l'')^2+\text{etc.}\\ & +p_{,}(x+u_{,}-l_{,})^2+p_{,}'(x'+u_{,}-l_{,}')^2+p_{,}''(x''+u_{,}-l_{,}'')^2+\text{etc.}\\ & +p_{,,}(x+u_{,,}-l_{,,})^2+p_{,,}'(x'+u_{,,}-l_{,,}')^2+p_{,,}''(x''+u_{,,}-l_{,,}'')^2+\text{etc.}\\ & +\text{etc.}\\ & +2(I)\ (qx+q'x'+q''x''+\ldots+f)\\ & +2(II)\ (rx+r'x'+r''x''+\ldots+g)\\ & +2(III)\,(sx+s'x'+s''x''+\ldots+h)\\ & +\text{etc.}\end{aligned}$$

wo (I), (II), (III), etc. unbestimmte Factoren sind. Das Minimum dieser Function erhält man dadurch, dass man das vollständige Differential derselben gleich Null setzt. Auch ist zu erwähnen, dass man sich unter dem ersten Theil dieser Function nicht blos die Beobachtungen denken darf, die eine einzige Station gegeben hat, sondern dass darunter der Inbegriff aller Beobachtungen verstanden werden muss, die das ganze Dreiecksnetz geliefert hat.

7.

Bevor ich die Differentiation der Function des vor. Art. vornehme, bemerke ich dass unter andern dadurch die folgenden Summen sich zeigen werden,

$$\begin{aligned}(lu) &= pl+p'l'+p''l''+\ldots\\ (lu_{,}) &= p_{,}l_{,}+p_{,}'l_{,}'+p_{,}''l_{,}''+\ldots\\ (lu_{,,}) &= p_{,,}l_{,,}+p_{,,}'l_{,,}'+p_{,,}''l_{,,}''+\ldots\end{aligned}$$

etc.

von welchen ich in der angezogenen Abhandlung gezeigt habe, dass man jede derselben immer gleich Null machen kann, wodurch sich die Auflösung unserer Aufgabe vereinfacht.

Der zweiten Bemerkung des Art. 5 zufolge darf man statt der vorstehenden Ausdrücke setzen,

$$\begin{aligned}(lu) &= p(l-m)+p'(l'-m)+p''(l''-m)+\ldots\\ (lu_{,}) &= p_{,}(l_{,}-m_{,})+p_{,}'(l_{,}'-m_{,})+p_{,}''(l_{,}''-m_{,})+\ldots\\ (lu_{,,}) &= p_{,,}(l_{,,}-m_{,,})+p_{,,}'(l_{,,}'-m_{,,})+p_{,,}''(l_{,,}''-m_{,,})+\ldots\end{aligned}$$

etc.

wo m, $m_{,}$, $m_{,,}$, etc. durchaus willkührliche Zahlen sind. Bestimmt man aber diese so, dass

$$m = \frac{p}{P} l + \frac{p'}{P} l' + \frac{p''}{P} l'' + \ldots$$
$$m_{,} = \frac{p_{,}}{P_{,}} l_{,} + \frac{p'_{,}}{P_{,}} l'_{,} + \frac{p''_{,}}{P_{,}} l''_{,} + \ldots$$
$$m_{,,} = \frac{p_{,,}}{P_{,,}} l_{,,} + \frac{p'_{,,}}{P_{,,}} l'_{,,} + \frac{p''_{,,}}{P_{,,}} l''_{,,} + \ldots$$

etc.

werden, nachdem

$$P = p + p' + p'' + \ldots$$
$$P_{,} = p_{,} + p'_{,} + p''_{,} + \ldots$$
$$P_{,,} = p_{,,} + p'_{,,} + p''_{,,} + \ldots$$

etc.

gesetzt worden sind, so werden

$$(lu) = 0 \ , \ (lu_{,}) = 0 \ , \ (lu_{,,}) = 0 \ , \text{ etc.}$$

Wenn, wie gewöhnlich der Fall ist, die Gewichte aller Beobachtungen eines jeden Gyrus, oder jeder Gruppe von Gyris, einander haben gleich gesetzt werden können, dann wird jedes m gleich dem arithmetischen Mittel aus allen l des betreffenden Gyrus, oder der betreffenden Gruppe von Gyris, und ist daher sehr leicht zu berechnen.

8.

Nehmen wir jetzt das vollständige Differential der Function des Art. 6, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 = &\{px + p'x' + p''x'' + \ldots + Pu\}du \\ &+ \{p_{,}x + p'_{,}x' + p''_{,}x'' + \ldots + Pu_{,}\}du_{,} \\ &+ \{p_{,,}x + p'_{,,}x' + p''_{,,}x'' + \ldots + Pu_{,,}\}du_{,,} \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

$$+ \{Qx + pu + p_{,}u_{,} + p_{,,}u_{,,} + \ldots - (lx) + (I)q + (II)r + (III)s + \ldots\}dx$$
$$+ \{Q'x' + p'u + p'_{,}u_{,} + p'_{,,}u_{,,} + \ldots - (lx') + (I)q' + (II)r' + (III)s' + \ldots\}dx'$$
$$+ \{Q''x'' + p''u + p''_{,}u_{,} + p''_{,,}u_{,,} + \ldots - (lx'') + (I)q'' + (II)r'' + (III)s'' + \ldots\}dx''$$
$$+ \text{etc.}$$

wo die P, $P_{,}$, $P_{,,}$, etc. dieselben sind wie im vor. Art. und ausserdem

$$Q = p + p_{,} + p_{,,} + \ldots$$
$$Q' = p' + p'_{,} + p'_{,,} + \ldots$$
$$Q'' = p'' + p''_{,} + p''_{,,} + \ldots$$

etc.

$$(lx) = p\,(l-m) + p_{,}\,(l_{,}-m_{,}) + p_{,,}\,(l_{,,}-m_{,,}) + \ldots$$
$$(lx') = p'\,(l'-m) + p'_{,}\,(l'_{,}-m_{,}) + p'_{,,}\,(l'_{,,}-m_{,,}) + \ldots$$
$$(lx'') = p''(l''-m) + p''_{,}(l''_{,}-m_{,}) + p''_{,,}(l''_{,,}-m_{,,}) + \ldots$$
$$\text{etc.}$$

gesetzt worden sind.

Da hier, wie oben bemerkt worden ist, unter x, x', x'', etc. kleine Grössen verstanden werden, die den vorläufig angenommenen Werthen der Richtungen hinzugefügt, diese in die wahrscheinlichsten Werthe verwandeln, und jene in der angezogenen Abhandlung mit

$$X,\ X',\ X'',\ \text{etc.}$$

bezeichnet worden sind, so werden die wahrscheinlichsten Werthe der Richtungen

$$X + x,\quad X' + x',\quad X'' + x'',\ \text{etc.}$$

nachdem die Werthe der x, x', x'', etc. aus der vorstehenden Gleichung in Verbindung mit allen vorhandenen, von einander unabhängigen, Bedingungsgleichungen ermittelt worden sind.

9.

Wenn wir nun unter den Bedingungsgleichungen des Art. 5, die in die Minimalgleichung des vor. Art. aufgenommen worden sind, nicht blos diejenigen, welche das Dreiecksnetz darbietet, sondern auch die im Art. 1 aufgestellten verstehen wollten, so müssten wir in der Minimalgleichung den Coefficienten eines jeden der darin vorkommenden Differentiale für sich gleich Null setzen, und würden damit auf das Verfahren hingeführt werden, welches im Art. 1 angedeutet, und als selbstverständlich bezeichnet worden ist. Aber es sollen von den im Art. 5 aufgestellten Bedingungsgleichungen die des Art. 1 ausgeschlossen werden, welche daher auf andere Weise zu berücksichtigen sind. Zur Berücksichtigung dieser werde ich, wie angeführt, das zweite Verfahren des Art. 3 anwenden.

Zu mehrerer Einfachheit, und weil hieraus die Behandlung einer beliebigen Anzahl solcher Bedingungsgleichungen von selbst hervor geht, werde ich annehmen, dass nur Ein Winkel vorhanden ist, der einen im Voraus bestimmten Werth annehmen soll, dass dieser der Winkel zwischen den Richtungen x und x' sei, und der Werth, den er annehmen solle, mit A bezeichnet werde. Die Annahme, dass der genannte Win-

kel der sei, den die beiden ersten Richtungen mit einander bilden, ist durchaus nicht nothwendig, aber er vereinfacht die Darstellung; dieser Winkel kann zwischen beliebigen Richtungen liegen, ohne dass das Wesen der hier folgenden Auflösung unserer Aufgabe dadurch geändert wird.

Die zu den Bedingungsgleichungen des Art. 5 hinzukommende Bedingungsgleichung ist also

$$X' + x' - X - x = A$$

Es unterliegen nun zwar die vorläufigen Werthe der Richtungen X, X', X'', etc. keiner anderen Bedingung, als dass sie den wahrscheinlichsten Werthen derselben nahe kommen müssen, aber unbeschadet dessen können wir in Bezug auf X und X' auch die Bedingung aufstellen, dass sie so angenommen werden sollen, dass die Gleichung

$$X' - X = A$$

statt findet, denn diese lässt sich immer mit jener Bedingung vereinigen. Es folgen aber hieraus die einfachen Gleichungen

$$x = x' \text{ und } dx = dx'$$

welche dem zweiten Verfahren des Art. 3 gemäss anzuwenden sind.

10.

Eliminirt man nun durch Hülfe der beiden eben erhaltenen Gleichungen x und dx aus der Minimalgleichung des Art. 8, und setzt darauf den Coefficienten eines jeden der übrigen Differentiale für sich gleich Null, so bekommt man die folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned}
0 &= (p + p')\,x + p''x'' + p'''x''' + \ldots + Pu \\
0 &= (p_{,} + p'_{,})\,x' + p_{,}''x'' + p_{,}'''x''' + \ldots + P_{,}u_{,} \\
0 &= (p_{,,} + p'_{,,})\,x' + p_{,,}''x'' + p_{,,}'''x''' + \ldots + P_{,,}u_{,,} \\
&\quad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(Q + Q')x' + (p + p')u + (p_{,} + p'_{,})u_{,} + p_{,}(p_{,,} + p'_{,,})u_{,,} + \ldots \\
&= [(lx) + (lx')] - (I)(q + q') - (II)(r + r') - (III)(s + s') - \ldots \\
&Q''x'' + p''u + p_{,}''u_{,} + p_{,,}''u_{,,} + \ldots = (lx'') - (I)q'' - (II)r'' - (III)s'' - \ldots \\
&Q'''x''' + p'''u + p_{,}'''u_{,} + p_{,,}'''u_{,,} + \ldots = (lx''') - (I)q''' - (II)r''' - (III)s''' - \ldots \\
&\quad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

auf deren Auflösung die Auflösung der gegenwärtigen Aufgabe beruht.

11.

Die Behandlung der eben erhaltenen Gleichungen ist genau die nemliche wie die derjenigen, auf welche man in den Fällen hingeführt wird, in welchen die hier eingeführte Bedingungsgleichung nicht vorhanden ist. Da sich aber zeigt, dass einige besondere Relationen zwischen diesen und jenen Gleichungen statt finden, so will ich die Auflösung weiter durchführen. Die erste Abtheilung der Gleichungen des vor. Art. giebt

$$u = -\frac{p+p'}{P}x' - \frac{p''}{P}x'' - \frac{p'''}{P}x''' - \ldots$$
$$u_{,} = -\frac{p_{,}+p'_{,}}{P_{,}}x' - \frac{p''_{,}}{P_{,}}x'' - \frac{p'''_{,}}{P_{,}}x''' - \ldots$$
$$u_{,,} = -\frac{p_{,,}+p'_{,,}}{P_{,,}}x' - \frac{p''_{,,}}{P_{,,}}x'' - \frac{p'''_{,,}}{P_{,,}}x''' - \ldots$$
etc. etc.

aus welchen im gegenwärtigen Falle die u, $u_{,}$, $u_{,,}$, etc. zu berechnen sind, nachdem man die Werthe der x', x'', x''', etc. erhalten hat.

In dem wohl immer vorkommenden Falle, dass man die Gewichte der Beobachtungen eines jeden Gyrus, oder jeder Gruppe von Gyris einander gleich setzen darf, vereinfachen sich diese Gleichungen und gehen in die folgenden über,

$$u = -\frac{1}{\mu}(2x' + x'' + x''' + \ldots)$$
$$u_{,} = -\frac{1}{\mu_{,}}(2x' + x'' + x''' + \ldots)$$
$$u_{,,} = -\frac{1}{\mu_{,,}}(2x' + x'' + x''' + \ldots)$$
etc.

in welchen μ, $\mu_{,}$, $\mu_{,,}$, etc. die Anzahl der Richtungen bedeuten, die in dem betreffenden Gyrus (oder der Gruppe von Gyris) beobachtet worden sind, und innerhalb der Klammern nur die in der That in jedem dieser Gyri (oder Gruppe von Gyris) beobachteten Richtungen aufgenommen werden dürfen.

Eliminirt man nun durch die obigen allgemeinen Gleichungen für die u, $u_{,}$, $u_{,,}$, etc. diese Grössen aus der zweiten Abtheilung der Gleichungen des vor. Art. so ergeben sich

$$[BB]x' + [Bc]x'' + [Bd]x''' + \ldots$$
$$= [(lx) + (lx')] - (I)(q+q') - (II)(r+r') - (III)(s+s') - \ldots$$
$$[Bc]x' + [cc]x'' + [cd]x''' + \ldots = (lx'') - (I)q'' - (II)r'' - (III)s'' - \ldots$$
$$[Bd]x' + [cd]x'' + [dd]x''' + \ldots = (lx''') - (I)q''' - (II)r''' - (III)s''' - \ldots$$
etc. etc.

wo

$$[BB] = Q + Q' - \frac{(p+p')^2}{P} - \frac{(p_{,}+p_{,}')^2}{P_{,}} - \frac{(p_{,,}+p_{,,}')^2}{P_{,,}} - \ldots$$

$$[Bc] = - \frac{(p+p')p''}{P} - \frac{(p_{,}+p_{,}')p''_{,}}{P_{,}} - \frac{(p_{,,}+p_{,,}')p''_{,,}}{P_{,,}} - \ldots$$

$$[Bd] = - \frac{(p+p')p'''}{P} - \frac{(p_{,}+p_{,}')p'''_{,}}{P_{,}} - \frac{(p_{,,}+p_{,,}')p'''_{,,}}{P_{,,}} - \ldots$$

etc.

$$[cc] = Q'' - \frac{p''^2}{P} - \frac{p''_{,}{}^2}{P} - \frac{p''_{,,}{}^2}{P_{,,}} - \ldots$$

$$[cd] = - \frac{p''p'''}{P} - \frac{p''_{,,}p'''_{,}}{P_{,}} - \frac{p''_{,,}p'''_{,,}}{P_{,,}} - \ldots$$

etc.

$$[dd] = Q''' - \frac{p'''^2}{P} - \frac{p'''_{,}{}^2}{P_{,}} - \frac{p'''_{,,}{}^2}{P_{,,}} - \ldots$$

etc.

sind. Setzt man aber, wie früher von mir geschehen ist,

$$(pp) = \frac{p^2}{P} + \frac{p_{,}{}^2}{P_{,}} + \frac{p_{,,}{}^2}{P_{,,}} + \ldots$$

$$(pp') = \frac{pp'}{P} + \frac{p_{,}p_{,}'}{P_{,}} + \frac{p_{,,}p_{,,}'}{P_{,,}} + \ldots$$

$$(pp'') = \frac{pp''}{P} + \frac{p_{,}p''_{,}}{P_{,}} + \frac{p_{,,}p''_{,,}}{P_{,,}} + \ldots$$

$$(pp''') = \frac{pp'''}{P} + \frac{p_{,}p'''_{,}}{P_{,}} + \frac{p_{,,}p'''_{,,}}{P_{,,}} + \ldots$$

etc.

$$(p'p') = \frac{p'^2}{P} + \frac{p_{,}'{}^2}{P_{,}} + \frac{p_{,,}'{}^2}{P_{,,}} + \ldots$$

$$(p'p'') = \frac{p'p''}{P} + \frac{p_{,}'p''_{,}}{P_{,}} + \frac{p_{,,}'p''_{,,}}{P_{,,}} + \ldots$$

$$(p'p''') = \frac{p'p'''}{P} + \frac{p_{,}'p'''_{,}}{P_{,}} + \frac{p_{,,}'p'''_{,,}}{P_{,,}} + \ldots$$

etc.

$$(p''p'') = \frac{p''^2}{P} + \frac{p''_{,}{}^2}{P_{,}} + \frac{p''_{,,}{}^2}{P_{,,}} + \ldots$$

$$(p''p''') = \frac{p''p'''}{P} + \frac{p''_{,}p'''_{,}}{P_{,}} + \frac{p''_{,,}p'''_{,,}}{P_{,,}} + \ldots$$

etc.

$$(p'''p''') = \frac{p'''^2}{P} + \frac{p'''_{,}{}^2}{P_{,}} + \frac{p'''_{,,}{}^2}{P_{,,}} + \ldots$$

etc.

so erkennt man sogleich, dass die obigen $[cc]$, $[cd]$, etc. $[dd]$ etc. dieselbe Bedeutung haben, wie in dem Falle, wo die hier besonders betrachtete Bedingungsgleichung nicht vorhanden ist, so wie dass

$$[BB] = [aa] + 2[ab] + [bb]$$
$$[Bc] = [ac] + [bc]$$
$$[Bd] = [ad] + [bd]$$
etc.

sind, wenn wie in jenem Falle

$$[aa] = Q - (pp)$$
$$[ab] = \quad - (pp')$$
$$[ac] = \quad - (pp'')$$
$$[ad] = \quad - (pp''')$$
etc.
$$[bb] = Q' - (p'p')$$
$$[bc] = \quad - (p'p'')$$
$$[bd] = \quad - (p'p''')$$
etc.
$$[cc] = Q'' - (p''p'')$$
$$[cd] = \quad - (p''p''')$$
etc.
$$[dd] = Q''' - (p'''p''')$$
etc.
etc.

gesetzt werden. Es folgt hieraus schon, dass die vorstehenden Gleichungen für die x', x'', x''', etc. erhalten werden, wenn man erst die analogen Gleichungen bildet, die statt finden, wenn die hier eingeführte Bedingungsgleichung nicht vorhanden ist, darauf die Gleichungen für x und x' addirt, und in allen Gleichungen x in x' verwandelt.

12.

Aus den Ausdrücken für die (lx), (lx'), (lx''), etc. des Art. 8 folgt leicht dass

$$0 = (lx) + (lx') + (lx'') + (lx''') + \ldots$$

ist, addirt man nun die Gleichungen des vor. Art. für die x', x'', x''', etc., so ergiebt sich dass ihre Summe identisch Null, und folglich jede derselben in den übrigen enthalten ist. Die Ursache davon ist die, dass die Richtungen keine absolut bestimmbaren Werthe haben, sondern dass man sie, und zwar auf jeder Station, von jedem beliebigen Anfangspunkt an zählen kann.

Dieser Umstand berechtigt uns zwischen den Richtungen eine belie-

bige Bedingungsgleichung einzuführen, wie ich in der oft angezogenen Abhandlung gezeigt habe, und diese können wir sogleich auf alle beobachteten Richtungen ausdehnen und wie folgt aufstellen,

$$0 = N'x' + N''x'' + N'''x''' + \ldots$$

sie wird in der Anwendung von selbst in so viele Gleichungen zerfallen, wie Stationen vorhanden sind, da sich keine auf irgend einer Station beobachtete Richtung auf den übrigen Stationen wiederholt. Denken wir uns diese schon dem Ausdruck des Minimums des Art. 6 einverleibt, so wird sie dieser das Glied

$$+ 2\psi(N'x' + N''x'' + N'''x''' + \ldots)$$

hinzufügen, wenn ψ einen unbestimmten Factor bezeichnet. Da diese Function von den u, $u_{,}$, $u_{,,}$, etc. unabhängig ist, so wird sie in den aus der Minimalgleichung hervor gehenden Gleichungen dieselbe Wirkung ausüben wie die übrigen Bedingungsgleichungen, und die Gleichungen für die x', x'', x''', etc. des vor. Art. in die folgenden verwandeln,

$$\begin{aligned}
&[BB]x' + [Bc]x'' + [Bd]x''' + \ldots \\
&= [(lx) + (lx')] - \psi N' - (I)(q + q') - (II)(r + r') - \ldots \\
&[Bc]x' + [cc]x'' + [cd]x''' + \ldots = (lx'') - \psi N'' - (I)q'' - (II)r'' - \ldots \\
&[Bd]x' + [cd]x'' + [dd]x''' + \ldots = (lx''') - \psi N''' - (I)q''' - (II)r''' - \ldots \\
&\qquad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Addirt man diese, so findet man dass $\psi = 0$ sein muss, indem wir alle N positiv annehmen dürfen, und folglich die Summe dieser Grössen nie Null werden kann. Wollte man nun grade zu $\psi = 0$ in die vorstehenden Gleichungen setzen, so würden die vorher erhaltenen wieder daraus hervorgehen, und wir würden den beabsichtigten Zweck nicht erreicht haben. Aber die Gleichung $\psi = 0$ zeigt an, dass die Bedingungen unserer Aufgabe erfüllt werden, wenn wir für ψ irgend eine linearische Function der x', x'', x''', etc. setzten, die die Eigenschaft besitzt, dass sie immer Null wird. Verbinden wir hiemit die Forderung, dass die vorstehenden Gleichungen ihre normale Form behalten sollen, nemlich dass die in horizontaler Linie stehenden Coefficienten der Unbekannten den in verticaler Linie stehenden fortwährend gleich sein sollen, so können wir nur

$$\psi = N'x' + N''x'' + N'''x''' + \ldots$$

setzen. Die Substitution dieses Ausdrucks für ψ verwandelt die obigen Gleichungen in

$$
\begin{aligned}
&(BB)x' + (Bc)x'' + (Bd)x''' + \ldots \\
&= [(lx) + (lx')] - (I)(q + q') - (II)(r + r') - (III)(s + s') - \ldots \\
&(Bc)x' + (cc)x'' + (cd)x''' = (lx'') - (I)q'' - (II)r'' - (III)s'' - \ldots \\
&(Bd)x' + (cd)x'' + (dd)x''' = (lx''') - (I)q''' - (II)r''' - (III)s''' - \ldots \\
&\qquad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

in welchen

$$
\begin{aligned}
(BB) &= [BB] + N'^2 \\
(Bc) &= [Bc] + N'N'' \\
(Bd) &= [Bd] + N'N''' \\
&\text{etc.} \\
(cc) &= [cc] + N''^2 \\
(cd) &= [cd] + N''N''' \\
&\text{etc.} \\
(dd) &= [dd] + N'''^2 \\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

sind. Die N', N'', N''', etc. werden am Zweckmässigsten so bestimmt, wie in der oft angezogenen Abhandlung gezeigt worden ist, und es ist a. a. O. bewiesen, dass, wie man auch diese bestimmen mag, die Unterschiede der Richtungen, das heisst die Winkel, und die Aggregate

$$
\begin{aligned}
&x + u\ ,\ x' + u\ ,\ x'' + u\ ,\ \text{etc.} \\
&x + u_{,}\ ,\ x' + u_{,}\ ,\ x'' + u_{,}\ ,\ \text{etc.} \\
&x + u_{''}\ ,\ x' + u_{''}\ ,\ x'' + u_{''}\ ,\ \text{etc.} \\
&\qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

unverändert bleiben. Wir können aber hier noch einen Schritt weiter gehen, und in den Gleichungen für die x, x', x'', x''', etc., die unabhängig von der hier eingeführten Bedingungsgleichung sind, die Bestimmung aller N vornehmen, zu welchem Zwecke der obigen Bedingungsgleichung das Glied

$$Nx$$

hinzugefügt werden muss, und erst hierauf die Gleichungen für x und x' addiren. Es werden hieraus die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
(BB) &= [BB] + (N + N')^2 \\
(Bc) &= [Bc] + (N + N')N'' \\
(Bd) &= [Bd] + (N + N')N''' \\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

entspringen, die bei dem vorher beschriebenen Verfahren nicht immer statt finden.

Die obigen für die Bestimmung der x', x'', x''', etc. erhaltenen Gleichungen sind immer von einander unabhängig, und geben folglich immer bestimmte Werthe der Unbekannten. Durch die Einführung der obigen Bedingungsgleichung

$$0 = Nx + N'x' + N''x'' + N'''x''' + \ldots$$

geben sie ferner eine Controlle für die Richtigkeit der aus ihnen berechneten numerischen Werthe der Unbekannten, die sich bis ans Ende der ganzen Rechnung erstreckt, und sowohl in der oft angezogenen Abhandlung wie im Supplement 3 der darauf erschienenen Supplementar-Abhandlung ausführlich erklärt worden ist.

13.

Von den im vor. Art. erhaltenen Gleichungen für die x', x'', x''', etc. sollen jetzt wieder, um die einfachste Auflösung derselben zu erhalten, die von den Coefficienten der Bedingungsgleichungen abhängigen Glieder abgetrennt, und die Unbekannten der so entstehenden Gleichungen mit y', y'', y''', etc. bezeichnet werden. Es ergeben sich somit die Gleichungen

$$\begin{aligned}
(BB)y' + (Bc)y'' + (Bd)y''' + \ldots &= [(lx) + (lx')] \\
(Bc)y' + (cc)y'' + (cd)y''' + \ldots &= (lx'') \\
(Bd)y' + (cd)y'' + (dd)y''' + \ldots &= (lx''') \\
\text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad & \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

die, da sie blos von den Grössen abhängen, die auf den Stationen vorkommen, die Stationsgleichungen genannt werden. Da auf jeder Station neue Richtungen vorkommen, und sich keine Richtungen der übrigen Stationen wiederholen, so zerfallen sie immer in wenigstens so viele von einander unabhängige Systeme von Gleichungen, wie Stationen vorhanden sind. Dass sie unter Umständen in noch mehre von einander unabhängige Systeme zerlegt werden können, habe ich im Supplement 5 der angezogenen Supplementar-Abhandlung bewiesen.

Das Verfahren, welches anzuwenden ist, um die vorstehenden Stationsgleichungen zu erhalten, kann, dem Vorhergehenden gemäss, durch die folgenden einfachen Regeln ausgedrückt werden. Bei der Wahl der vorläufigen Werthe der Richtungen hat man darauf zu sehen, dass die Gleichung

$$X' - X = A$$

erfüllt werde; sind darauf die Stationstäfelchen wie immer gebildet, so

berechne man auch die Coefficienten der Stationsgleichungen wie ich früher erklärt habe, das heisst, wie in dem Falle, wo die hier eingeführte Bedingungsgleichung nicht statt findet. Vor der Auflösung dieser Stationsgleichungen ist nun nichts Weiteres zu thun, wie die beiden Gleichungen für x und x' zu addiren, und in allen Gleichungen x in x' zu verwandeln. Die so entstehenden Gleichungen sind auf gewöhnliche Art aufzulösen, wodurch die Werthe der y', y'', y''', etc. erhalten werden.

14.

Zum zweiten Theile der Auflösung unserer Aufgabe übergehend bietet sich zuerst die Bemerkung dar, dass die Zerlegung der eliminirten Richtung x in die zwei Theile y und z wegfällt, aber dass für alle übrigen Richtungen wie früher

$$x' = y' - z' \ , \ x'' = y'' - z'' \ , \ x''' = y''' - z''', \text{ etc.}$$

gesetzt werden muss. Substituirt man nun die vorstehenden Gleichungen in die Gleichungen für die x', x'', x''', etc. des Art. 12, so werden in Folge der im vor. Art. erhaltenen Stationsgleichungen

$$\begin{aligned}
(BB)z' + (Bc)z'' + (Bd)z''' + \ldots &= (I)(q+q') + (II)(r+r') + (III)(s+s'+)\ldots \\
(Bc)z' + (cc)z'' + (cd)z''' + \ldots &= (I)q'' + (II)r'' + (III)s'' + \ldots . \\
(Bd)z' + (cd)z'' + (dd)z''' + \ldots &= (I)q''' + (II)r''' + (III)s''' + \ldots \\
\text{etc.} \qquad & \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

die den früher erhaltenen vollkommen analog sind. Stellen wir hierauf die unbestimmte Auflösung der Stationsgleichungen des vor. Art. in folgender Form dar,

$$\begin{aligned}
y' &= \{[2,2]\}[(lx) + (lx')] + \{[2,3]\}(lx'') + \{[2,4]\}(lx''') + \ldots \\
y'' &= \{[2,3]\}[(lx) + (lx')] + \{\ 3,3\ \}(lx'') + \{\ 3,4\ \}(lx''') + \ldots \\
y''' &= \{[2,4]\}[(lx) + (lx')] + \{\ 3,4\ \}(lx'') + \{\ 4,4\ \}(lx''') + \ldots \\
&\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

so werden sowie früher,

$$\begin{aligned}
z' &= (\beta\eta)(I) + (\beta\varkappa)(II) + (\beta\lambda)(III) + \ldots \\
z'' &= (\gamma\eta)(I) + (\gamma\varkappa)(II) + (\gamma\lambda)(III) + \ldots \\
z''' &= (\delta\eta)(I) + (\delta\varkappa)(II) + (\delta\lambda)(III) + \ldots \\
&\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

in welchen die Coefficienten die folgenden Ausdrücke haben,

$$
\begin{aligned}
(\beta\eta) &= \{[2,2]\}(q+q') + \{[2,3]\}q'' + \{[2,4]\}q''' + \ldots\\
(\beta\varkappa) &= \{[2,2]\}(r+r') + \{[2,3]\}r'' + \{[2,4]\}r''' + \ldots\\
(\beta\lambda) &= \{[2,2]\}(s+s') + \{[2,3]\}s'' + \{[2,4]\}s''' + \ldots\\
&\text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.}\\
(\gamma\eta) &= \{[2,3]\}(q+q') + \{\,3,3\,\}q'' + \{\,3,4\,\}q''' + \ldots\\
(\gamma\varkappa) &= \{[2,3]\}(r+r') + \{\,3,3\,\}r'' + \{\,3,4\,\}r''' + \ldots\\
(\gamma\lambda) &= \{[2,3]\}(s+s') + \{\,3,3\,\}s'' + \{\,3,4\,\}s''' + \ldots\\
&\text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.}\\
(\delta\eta) &= \{[2,4]\}(q+q') + \{\,3,4\,\}q'' + \{\,4,4\,\}q''' + \ldots\\
(\delta\varkappa) &= \{[2,4]\}(r+r') + \{\,3,4\,\}r'' + \{\,4,4\,\}r''' + \ldots\\
(\delta\lambda) &= \{[2,4]\}(s+s') + \{\,3,4\,\}s'' + \{\,4,4\,\}s''' + \ldots\\
&\text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

die auch den früheren vollkommen analog sind.

15.

Zur Erlangung der Endgleichungen sind wieder die Bedingungsgleichungen selbst erforderlich, und es versteht sich von selbst, dass in diesen auch die Richtung x durch die Gleichung $x = x'$ eliminirt werden muss. Bereitet man nun die Seitengleichungen so vor, wie in der oft angezogenen Abhandlung gezeigt worden ist, oder überhaupt die Bedingungsgleichungen so vor, wie zu Ende des Art. 5 erklärt worden ist, so nehmen sie die dort aufgestellte Form an, und eliminirt man darauf x, so werden sie

$$
\begin{aligned}
(q + q')x' + q''x'' + q'''x''' + \ldots + f &= 0\\
(r + r')x' + r''x'' + r'''x''' + \ldots + g &= 0\\
(s + s')x' + s''x'' + s'''x''' + \ldots + h &= 0\\
\text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad &\text{etc.}
\end{aligned}
$$

Die Elimination der x', x'', x''', etc. aus diesen durch die Gleichungen

$$x' = y' - z', \quad x'' = y'' - z'', \quad x''' = y''' - z''', \text{ etc.}$$

giebt nun

$$
\begin{aligned}
&(q + q')z' + q''z'' + q'''z''' + \ldots\\
&= (q + q')y' + q''y'' + q'''y''' + \ldots + f = F\\
&(r + r')z' + r''z'' + r'''z''' + \ldots\\
&= (r + r')y' + r''y'' + r'''y''' + \ldots + g = G\\
&(s + s')z' + s''z'' + s'''z''' + \ldots\\
&= (s + s')y' + s''y'' + s'''y''' + \ldots + h = H\\
&\text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

und wenn man hierauf die Gleichungen für die z', z'', z''', etc. des vor. Art. der Reihe nach mit $(q+q')$, q'', q''', etc. multiplicirt, und die Producte addirt, dann mit $(r+r')$, r'', r''', etc. und hierauf mit $(s+s')$, s'', s''', etc. multiplicirt, und jedes Mal addirt, so bekommt man mit Rücksicht auf die vorstehenden Gleichungen die folgenden Endgleichungen

$$\begin{aligned}
(\eta\eta)(I) + (\eta\varkappa)(II) + (\eta\lambda)(III) + \ldots &= F\\
(\eta\varkappa)(I) + (\varkappa\varkappa)(II) + (\varkappa\lambda)(III) + \ldots &= G\\
(\eta\lambda)(I) + (\varkappa\lambda)(II) + (\lambda\lambda)(III) + \ldots &= H\\
\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

in welchen die Ausdrücke der Coefficienten die folgenden sind,

$$\begin{aligned}
(\eta\eta) &= (\beta\eta)(q+q') + (\gamma\eta)q'' + (\delta\eta)q''' + \ldots\\
(\eta\varkappa) &= (\beta\varkappa)(q+q') + (\gamma\varkappa)q'' + (\delta\varkappa)q''' + \ldots\\
&= (\beta\eta)(r+r') + (\gamma\eta)r'' + (\delta\eta)r''' + \ldots\\
(\eta\lambda) &= (\beta\lambda)(q+q') + (\gamma\lambda)q'' + (\delta\lambda)q''' + \ldots\\
&= (\beta\eta)(s+s') + (\gamma\eta)s'' + (\delta\eta)s''' + \ldots\\
&\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}\\
(\varkappa\varkappa) &= (\beta\varkappa)(r+r') + (\gamma\varkappa)r'' + (\delta\varkappa)r''' + \ldots\\
(\varkappa\lambda) &= (\beta\lambda)(r+r') + (\gamma\lambda)r'' + (\delta\lambda)r''' + \ldots\\
&= (\beta\varkappa)(s+s') + (\gamma\varkappa)s'' + (\delta\varkappa)s''' + \ldots\\
&\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}\\
(\lambda\lambda) &= (\beta\lambda)(s+s') + (\gamma\lambda)s'' + (\delta\lambda)s''' + \ldots\\
&\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Man kann auf die Coefficienten dieser und der vorher gehenden Gleichungen dieselben Substitutionen und Transformationen anwenden, die ich in der mehrmals angezogenen Abhandlung gegeben habe.

Ueberhaupt geben die vorstehenden Entwickelungen zu erkennen, dass auch im zweiten Theile der Auflösung die Rechnung dieselbe ist, wie in dem Falle, wo die hier eingeführte Bedingungsgleichung nicht vorhanden ist. Nur muss man allenthalben die Aggregate

$$(q+q'),\ (r+r'),\ (s+s'),\ \text{etc.}$$

statt der einzelnen Coefficienten q und q', r und r', s und s' etc. anwenden.

16.

In Betreff der Berechnung der mit F, G, H, etc. bezeichneten Grössen halte ich es für nicht überflüssig, die folgenden Bemerkungen

einzuschalten. Sei in irgend einer der Bedingungsgleichungen, die das Dreiecksnetz darbietet, ein Glied vorhanden, welches von der Function

$$(X^{(p)} + x^{(p)} - X - x)$$

wo p ein beliebiger Index ist, abhängt. In den Winkelgleichungen kann dieses Glied nur mit $+1$ oder -1 multiplicirt erscheinen, und in den Seitengleichungen nur der Sinus oder Cosinus desselben vorkommen. Die Elimination von $X+x$ durch die Bedingungsgleichung

$$X' + x' - X - x = A$$

verwandelt diese Function in

$$(X^{(p)} + x^{(p)} - X' - x' + A)$$

und da die F, G, H, etc. die Werthe bezeichnen, die die auf Null gestellten Bedingungsgleichungen annnehmen, nachdem darin y', y'', y''', etc. statt x', x'', x''', etc. substituirt worden sind, so ist in die betreffende Bedingungsgleichung zur Berechnung des verlangten Werthes derselben, statt der vorstehenden Function, der Werth der folgenden

$$(X^{(p)} + y^{(p)} - X' - y' + A)$$

zu substituiren. Dieser Satz kann in folgende einfache Regel gebracht werden.

Nachdem man durch die Ausgleichungen auf den Stationen die Werthe der Bögen

$$X' + y' \ , \ X'' + y'' \ , \ X''' + y''', \text{ etc.}$$

erhalten hat, stelle man die Gleichung

$$X + y = X' + y' - A$$

auf, berechne durch diese den Bogen $X+y$, und substituire diesen statt $X+x$ in jede Bedingungsgleichung, in welcher der zuletzt genannte Bogen vorkommt. Hiemit ist allen Forderungen in Bezug auf diesen Punkt Gnüge geleistet.

Ein specieller Fall des im Vorstehenden behandelten allgemeinen Falles ist das Vorkommen der Function

$$(X' + x' - X - x)$$

für welche dem vorstehenden Satze zufolge ohne Weiteres der Bogen

$$A$$

substituirt werden muss. Ich führe noch zu mehrerer Deutlichkeit an, dass die Berechnung der Differentialquotienten

$$q, \ q', \ r, \ r', \ s, \ s', \text{ etc.}$$

der Bedingungsgleichungen so ausgeführt werden muss, als wäre die hier eingeführte Bedingungsgleichung nicht vorhanden. Ferner bemerke

ich, dass die Berechnung der Summe der mit ihren Gewichten multiplicirten Fehlerquadrate, ohne Aenderung durch die von mir früher zu diesem Zwecke entwickelten Ausdrücke erhalten wird, so wie dass dasselbe mit einer dem Vorhergehenden analogen Addition der betreffenden Differentialquotienten in Bezug auf die Berechnung der Gewichte statt findet. Es werden diese beiden Sätze weiter unten bewiesen werden.

17.

In die vorstehende Auflösung unserer Aufgabe habe ich die Bedingung eingeführt, dass die vorläufigen Werthe der betreffenden Richtungen so anzunehmen sind, dass sie der Gleichung

$$X' - X = A$$

gnügen. Diese Bedingung ist zwar für die Erlangung einer richtigen Auflösung nicht durchaus nothwendig, aber sie vereinfacht die Auflösung, und dieses ist die Ursache, weshalb ich sie eingeführt habe.

Nun können aber Fälle vorkommen, in welchen die Stationstäfelchen schon früher zu anderen Zwecken berechnet worden sind, und man dabei die Werthe von X' und X anders angenommen hat, es ist daher nothwendig zu zeigen, wie man diese Stationstäfelchen so abändern kann, dass sie der obigen Bedingung entsprechen. Da es an sich klar ist, dass man den einen der beiden Bögen X' und X unverändert lassen kann, und nur den andern zu ändern braucht, so will ich annehmen, dass man X' unverändert lassen, und X verbessern wolle. Sei der ursprünglich zu Grunde gelegte Werth dieser Richtung $X_,$, und in Folge dessen

$$X' - X_, = A_,$$

so ergiebt sich

$$X = X_, + a$$

wenn man

$$a = A_, - A$$

setzt, und aus dem Werthe von a entspringen die Verbesserungen, die den Angaben der Stationstäfelchen hinzuzufügen sind. Da nun die mit l, $l_,$, $l_{,,}$, etc. bezeichneten Grössen die Ueberschüsse der Beobachtungen über den für X angenommenen Werth bedeuten, oder

$$l = B - X_, \quad l_, = B_, - X_, \quad l_{,,} = B_{,,} - X_, \quad \text{etc.}$$

sind, wenn B, $B_,$, $B_{,,}$, etc. die Werthe bezeichnen, welche die verschie-

denen Beobachtungen für die Richtung x gegeben haben, so erhält man die Gleichungen

$$l - a = B - X$$
$$l_{,} - a = B_{,} - X$$
$$l_{''} - a = B_{''} - X$$
etc.

und folglich müssen den Grössen

$$pl,\ p_{,}l_{,},\ p_{''}l_{''},\ \text{etc.}$$

des ersten Stationstäfelchens bez. die Verbesserungen

$$-pa,\ -p_{,}a_{,},\ -p_{''}a_{''},\ \text{etc.}$$

hinzugefügt werden, während alle übrigen Grössen dieses Täfelchens unverändert bleiben. Es folgt hieraus, dass, um die Bedingungen

$$(lu) = 0,\ (l_{,}u_{,}) = 0,\ (l_{''}u_{''}) = 0,\ \text{etc.}$$

die durch die obigen Zusätze verletzt worden sind, wieder herzustellen, im zweiten Stationstäfelchen den Grössen

$$pl,\ p'l',\ p''l'',\ \text{etc.}$$
$$p_{,}l_{,},\ p_{,}'l_{,}',\ p_{,}''l_{,}'',\ \text{etc.}$$
$$p_{''}l_{''},\ p_{''}'l_{''}',\ p_{''}''l_{''}'',\ \text{etc.}$$
etc.

bez. die folgenden Verbesserungen hinzuzufügen sind,

$$-\frac{\mu-1}{\mu}pa,\quad \frac{1}{\mu}pa,\quad \frac{1}{\mu}pa,\quad \text{etc.}$$
$$-\frac{\mu_{,}-1}{\mu_{,}}p_{,}a,\quad +\frac{1}{\mu_{,}}p_{,}a,\quad \frac{1}{\mu_{,}}p_{,}a,\quad \text{etc.}$$
$$-\frac{\mu_{''}-1}{\mu_{''}}p_{''}a,\quad \frac{1}{\mu_{''}}p_{''}a,\quad \frac{1}{\mu_{''}}p_{''}a,\quad \text{etc.}$$
etc. etc.

wo μ, $\mu_{,}$, $\mu_{''}$, etc. die Anzahl der Richtungen bedeuten, die in den betr. Gyris (oder Gruppen von Gyris) eingeschnitten worden sind. Man sieht hieraus, dass eine Umrechnung der Stationstäfelchen nicht nöthig wird, sondern dass man die zunächst vorstehenden Verbesserungen sofort an die Grössen des zweiten Stationstäfelchens anbringen kann, und das erste gar nicht zu ändern braucht, da dieses nicht weiter gebraucht wird. Für die Gyri (oder Gruppen von Gyris), in welchen die Richtung x nicht beobachtet worden ist, sind selbstverständlich diese Verbesserungen gleich Null.

Zu bemerken ist noch, dass man jetzt bei der Berechnung der Grösse (ll), die für die der Summe der Fehlerquadrate erforderlich ist, sich der Quadrate der Grössen

$$(pl - \tfrac{\mu-1}{\mu}pa) \ , \quad (p'l' + \tfrac{1}{\mu}pa) \ , \quad (p''l'' + \tfrac{1}{\mu}pa) \ , \text{ etc.}$$
$$(p_,l_, - \tfrac{\mu_,-1}{\mu_,}p_,a) \ , \quad (p_,'l_,' + \tfrac{1}{\mu_,}p_,a) \ , \quad (p_,''l_,'' + \tfrac{1}{\mu_,}p_,a) \ , \text{ etc.}$$
$$(p_{,,}l_{,,} - \tfrac{\mu_{,,}-1}{\mu_{,,}}p_{,,}a) \ , \quad (p_{,,}'l_{,,}' + \tfrac{1}{\mu_{,,}}p_{,,}a) \ , \quad (p_{,,}''l_{,,}'' + \tfrac{1}{\mu_{,,}}p_{,,}a) \ , \text{ etc.}$$
etc. etc.

bedienen muss.

18.

In dem im vor. Art. behan lelten Falle, wo vor der Berechnung der Stationstäfelchen die Gleichung

$$X' - X = A$$

nicht erfüllt worden ist, kann noch ein anderes Verfahren angewandt werden, bei welchem die Stationstäfelchen unverändert gelassen werden. Ich werde im Folgenden dieses Verfahren auch durchführen, da es in manchen Fällen der Verbesserung der Stationstäfelchen vorzuziehen sein möchte.

Sei zufolge der Werthe, die man für X und X' angenommen hat, die Gleichung

$$X' - X = A,$$

vorhanden, während die einzuführende Bedingungsgleichung wie oben

$$X' + x' - X - x = A$$

ist. Es folgt hieraus sogleich

$$x = x' + a$$

wenn wieder wie im vor. Art.

$$a = A, - A$$

gesetzt wird, während immer noch wie früher

$$dx = dx'$$

ist. Wenden wir im Folgenden diese beiden Gleichungen auf die Entwickelungen an.

19.

Eliminirt man nun wieder dx aus der Minimalgleichung des Art. 8, so bekommt man dieselbe Zerlegung dieser Gleichung in mehrere, wie vorher, aber eliminirt man x durch die Gleichung

$$x = x' + a$$

so werden die durch die Zerlegung entstehenden Gleichungen die folgenden.

$$0 = pa + (p+p')x' + p''x'' + p'''x''' + \ldots + Pu$$
$$0 = p_,a + (p_,+p_,')x' + p_,''x'' + p_,'''x''' + \ldots + P_,u_,$$
$$0 = p_{,,}a + (p_{,,}+p_{,,}')x' + p_{,,}''x'' + p_{,,}'''x''' + \ldots + P_{,,}u_{,,}$$
etc. etc.

$$(Q+Q')x' + (p+p')u + (p_,+p_,')u_, + (p_{,,}+p_{,,}')u_{,,} + \ldots$$
$$= [(lx) + (lx') - Qa] - (I)(q+q') - (II)(r+r') - (III)(s+s') - \ldots$$
$$Q''x'' + p''u + p_,''u_, + p_{,,}''u_{,,} + \ldots = (lx'') - (I)q'' - (II)r'' - (III)s'' - \ldots$$
$$Q'''x''' + p'''u + p_,'''u_, + p_{,,}'''u_{,,} + \ldots = (lx''') - (I)q''' - (II)r''' - (III)s''' - \ldots$$
etc. etc.

die von den vorher erhaltenen verschieden sind, aber auf deren Auflösung jetzt die Auflösung unserer Aufgabe beruht.

20.

Die erste Abtheilung der im vor. Art. erhaltenen Gleichungen giebt jetzt

$$u = -\frac{p}{P}a - \frac{p+p'}{P}x' - \frac{p''}{P}x'' - \frac{p'''}{P}x''' - \ldots$$
$$u_, = -\frac{p_,}{P_,}a - \frac{p_,+p_,'}{P_,}x' - \frac{p_,''}{P_,}x'' - \frac{p_,'''}{P_,}x''' - \ldots$$
$$u_{,,} = -\frac{p_{,,}}{P_{,,}}a - \frac{p_{,,}+p_{,,}'}{P_{,,}}x' - \frac{p_{,,}''}{P_{,,}}x'' - \frac{p_{,,}'''}{P_{,,}}x''' - \ldots$$
etc. etc.

aus welchen jetzt die u, $u_,$, $u_{,,}$, etc. zu berechnen sind, nachdem man die Werthe der x', x'', x''', etc. erhalten hat. In dem im Art. 11 berührten, wohl immer statt findenden Falle gehen die vorstehenden Gleichungen in die folgenden über,

$$u = -\frac{1}{\mu}(a + 2x' + x'' + x''' + \ldots)$$
$$u_, = -\frac{1}{\mu_,}(a + 2x' + x'' + x''' + \ldots)$$
$$u_{,,} = -\frac{1}{\mu_{,,}}(a + 2x' + x'' + x''' + \ldots)$$
etc. etc.

bei welchen die a. a. O. aufgestellten Bemerkungen auch Geltung haben.

Eliminirt man nun durch die obigen allgemeinen Gleichungen für die u, $u_,$, $u_{,,}$, etc. diese Grössen aus der zweiten Abtheilung der Gleichungen des vor. Art., so gehen die folgenden hervor

$$(BB)x' + (Bc)x'' + (Bd)x''' + \ldots$$
$$= (Bl) - (I)(q + q') - (II)(r + r') - (III)(s + s') - \ldots$$
$$(Bc)x' + (cc)x'' + (cd)x''' + \ldots = (cl) - (I)q'' - (II)r'' - (III)s'' - \ldots$$
$$(Bd)x' + (cd)x'' + (dd)x''' + \ldots = (dl) - (I)q''' - (II)r''' - (III)s''' - \ldots$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

in welchen

$$(Bl) = (lx) + (lx') + \{(pp) + (pp') - Q\}a$$
$$(cl) = (lx'') + (pp'')a$$
$$(dl) = (lx''') + (pp''')a$$
$$\text{etc.}$$

sind, während alle übrigen Grössen dieselbe Bedeutung haben wie im Art. 12. Man kann bemerken, dass zufolge der Gleichung

$$Q = (pp) + (pp') + (pp'') + (pp''') + \ldots$$

die ich früher nebst anderen ähnlichen bewiesen habe, hier die Gleichung

$$0 = (Bl) + (cl) + (dl) + \ldots$$

statt findet. Die Stationsgleichungen werden nun, statt der für die vorher gehende Auflösung im Art. 13 erhaltenen, die folgenden,

$$(BB)y' + (Bc)y'' + (Bd)y''' + \ldots = (Bl)$$
$$(Bc)y' + (cc)y'' + (cd)y''' + \ldots = (cl)$$
$$(Bd)y' + (cd)y'' + (dd)y''' + \ldots = (dl)$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

in welchen auf dieselbe Art, die ich in der oft angezogenen Abhandlung entwickelt habe, immer bewirkt werden kann, dass

$$(Bc) = 0\ ,\ (Bd) = 0\ ,\ \text{etc.}$$

und

$$(cd) = 0$$

werden.

21.

Die eben erhaltenen Gleichungen geben schon zu erkennen, wie man in zusammen gesetzteren Fällen zu verfahren hat, um die Stationsgleichungen zu bilden, allein um dieses deutlicher zu machen, will ich ein Verfahren angeben, welches aus den eben erhaltenen Gleichungen entspringt, und geeignet ist, in zusammen gesetzteren Fällen die Stationsgleichungen, ohne Irrthum befürchten zu müssen, zu erhalten. Die Stationsgleichungen des vor. Art. kann man sich auf folgende Art entstanden denken. Man stelle zuerst die folgenden Gleichungen auf.

$$(aa)(y - a) + (ab)y' + (ac)y'' + (ad)y''' + \ldots = (al)$$
$$(ab)(y - a) + (bb)y' + (bc)y'' + (bd)y''' + \ldots = (bl)$$
$$(ac)(y - a) + (bc)y' + (cc)y'' + (cd)y''' + \ldots = (cl)$$
$$(ad)(y - a) + (bd)y' + (cd)y'' + (dd)y''' + \ldots = (dl)$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

in welchen die Coefficienten der Unbekannten diejenigen sind, die statt gefunden hätten, wenn die hier eingeführte Bedingungsgleichung nicht vorhanden gewesen wäre, dahingegen die völlig bekannten Glieder die folgenden Ausdrücke haben,

$$(al) = (lx) + \{(pp) - Q\}a$$
$$(bl) = (lx') + (pp')a$$
$$(cl) = (lx'') + (pp'')a$$
$$(dl) = (lx''') + (pp''')a$$
$$\text{etc.}$$

zu welchen bemerkt werden kann, dass die Gleichung

$$0 = (al) + (bl) + (cl) + (dl) + \ldots$$

statt findet.

Diese Gleichungen sind von denen, die jenem Falle angehören, nur durch die mit a multiplicirten Glieder verschieden. Addirt man nun die beiden ersten dieser Gleichungen, und schreibt in allen y' statt $y - a$, so ergeben sich die Stationsgleichungen des vor. Art. Dieses Verfahren ist einfach, und kann in jedem Falle, ohne Irrthum befürchten zu müssen, angewandt werden. Ich will dieses durch zwei Beispiele erläutern.

Ich nehme erst an, dass dieselbe Bedingungsgleichung

$$x = x' + a$$

wie früher einzig statt finde, aber dass man x' statt x eliminiren wolle; es ist leicht einzusehen, dass man von den zwei in Betracht kommenden Richtungen eine beliebige eliminiren darf. In den oben aufgestellten Gleichungen sind nun die Aenderungen zu machen, dass man y statt $y - a$, und $y' - a'$ statt y' schreiben muss.

Man bekommt ferner statt der oben gegebenen Ausdrücke der völlig bekannten Glieder die folgenden

$$(al) = (lx) + (pp')a'$$
$$(bl) = (lx') + \{(p'p') - Q'\}a'$$
$$(cl) = (lx'') + (p'p'')a'$$
$$(dl) = (lx''') + (p'p''')a'$$
$$\text{etc.}$$

in welchen $a' = -a$, und deren Summe auch gleich Null ist. Addirt man nun wieder die beiden ersten der obigen Gleichungen, und schreibt in allen y statt $y' - a'$, so ergeben sich die diesem Falle zukommenden Stationsgleichungen.

Als zweites Beispiel nehme ich an, dass auf einer Station fünf Richtungen beobachtet worden sind, und dass die Winkel zwischen den drei letzten dieser vorher bestimmte Werthe bekommen müssen Die zwei Bedingungsgleichungen, die aus dieser Bestimmung hervor gehen, sollen die folgenden sein,

$$x'' = x^{IV} + a''$$
$$x''' = x^{IV} + a'''$$

zugleich nehme ich an, dass man die Richtungen x'' und x''' eliminiren wolle. Dem Vorhergehenden zufolge sind nun zuerst die folgenden Gleichungen aufzustellen,

$$(aa)y + (ab)y' + (ac)(y'' - a'') + (ad)(y''' - a''') + (ae)y^{IV} = (al)$$
$$(ab)y + (bb)y' + (bc)(y'' - a'') + (bd)(y''' - a''') + (be)y^{IV} = (bl)$$
$$(ac)y + (bc)y' + (cc)(y'' - a'') + (cd)(y''' - a''') + (ce)y^{IV} = (cl)$$
$$(ad)y + (bd)y' + (cd)(y'' - a'') + (dd)(y''' - a''') + (de)y^{IV} = (dl)$$
$$(ae)y + (be)y' + (ce)(y'' - a'') + (de)(y''' - a''') + (ee)y^{IV} = (el)$$

in welchen

$$(al) = (lx) + (pp'')a'' + (pp''')a'''$$
$$(bl) = (lx') + (p'p'')a'' + (p'p''')a'''$$
$$(cl) = (lx'') + \{(p''p'') - Q''\}a'' + (p''p''')a'''$$
$$(dl) = (lx''') + (p''p''')a'' + \{(p'''p''') - Q'''\}a'''$$
$$(el) = (lx^{IV}) + (p''p^{IV})a'' + (p'''p^{IV})a'''$$

zu setzen sind. Um die wirklichen Stationsgleichungen zu erhalten, sind nun die drei letzten der obigen Gleichungen zu addiren, und allenthalben y^{IV} statt $y'' - a''$ und $y''' - a'''$ zu setzen. Es werden demnach

$$(aa)y + (ab)y' + (aE)y^{IV} = (al)$$
$$(ab)y + (bb)y' + (bE)y^{IV} = (bl)$$
$$(aE)y + (bE)y' + (EE)y^{IV} = (El)$$

in welchen

$$(aE) = (ac) + (ad) + (ae)$$
$$(bE) = (bc) + (bd) + (be)$$
$$(EE) = (cc) + 2(cd) + 2(ce) + (dd) + 2(de) + (ee)$$
$$(El) = (cl) + (dl) + (el)$$

sind, die in diesem Falle statt findenden Stationsgleichungen, und es ist wieder

$$0 = (al) + (bl) + (El)$$

Man kann diese Gleichungen auch so einrichten, dass

$$(ab) = 0, \quad (aE) = 0, \quad (bE) = 0$$

werden, und dieses geschieht wieder durch die in der oft angezogenen Abhandlung dafür entwickelten Ausdrücke. Die obigen Stationsgleichungen würden zu dem Ende zuerst die folgenden werden

$$\begin{aligned} [aa]y + [ab]y' + [aE] &= (al) \\ [ab]y + [bb]y' + [bE] &= (bl) \\ [aE]y + [bE]y' + [EE] &= (El) \end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned} [aE] &= [ac] + [ad] + [ae] \\ [bE] &= [bc] + [bd] + [be] \\ [EE] &= [cc] + 2[cd] + 2[ce] \\ &\quad + [dd] + 2[de] \\ &\quad + [ee] \end{aligned}$$

zu setzen wären. Durch die entsprechende Bestimmung der N, N', N'' werden diese in

$$\begin{aligned} (aa)y &= (al) \\ (bb)y' &= (bl) \\ (EE)y'' &= (El) \end{aligned}$$

übergehen.

22.

In Betreff des zweiten Theils der Auflösung ist es von selbst klar, dass alle Gleichungen des Art. 14, so wie die Berechnung der Coefficienten der Unbekannten der Endgleichungen, die im Art. 15 gezeigt worden ist, unverändert dieselben bleiben. Nur in Betreff der völlig bekannten Glieder der Endgleichungen ist eine kleine Auseinandersetzung erforderlich. Statt der im Art. 15 aufgestellten Bedingungsgleichungen bekommen wir jetzt

$$\begin{aligned} (q + q')x' + q''x'' + q'''x''' + \ldots + f + qa &= 0 \\ (r + r')x' + r''x'' + r'''x''' + \ldots + g + ra &= 0 \\ (s + s')x' + s''x'' + s'''x''' + \ldots + h + sa &= 0 \\ \text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.} & \end{aligned}$$

und folglich

$$(q + q')y' + q''y'' + q'''y''' + \ldots + f + qa = F$$
$$(r + r')y' + r''y'' + r'''y''' + \ldots + g + ra = G$$
$$(s + s')y' + s''y'' + s'''y''' + \ldots + h + sa = H$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

die man, wenn die folgende Gleichung eingeführt wird,

$$y = y' + a$$

auf die folgende Form bringen kann,

$$qy + q'y' + q''y'' + q'''y''' + \ldots + f = F$$
$$ry + r'y' + r''y'' + r'''y''' + \ldots + g = G$$
$$sy + s'y' + s''y'' + s'''y''' + \ldots + h = H$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

Hieraus folgt derselbe Satz wie im Art. 16, den man auch auf die folgende Weise aussprechen kann. Nachdem man durch die Ausgleichung auf der Station die Werthe der Bögen

$$X' + y' \,,\; X'' + y'' \,,\; X''' + y''' \,,\; \text{etc.}$$

erhalten hat, berechne man durch die Gleichung

$$X + y = X' + y' - A$$

den Werth des Bogens $X + y$; die Substitution dieser Werthe von

$$X + y \,,\; X' + y' \,,\; X'' + y'' \,,\; X''' + y''' \,,\; \text{etc.}$$

in die ursprünglichen auf Null gestellten Bedingungsgleichungen giebt die verlangten Werthe von F, G, H, etc.

23.

Wir kommen jetzt zur Berechnung der Summe W der mit ihren Gewichten multiplicirten Quadrate der übrig bleibenden Fehler. Da die Bedingungsgleichungen alle strenge erfüllt werden, so zeigt die Gleichung des Art. 6 ohne Weiteres, dass in allen Fällen W den folgenden Ausdruck hat,

$$W = p(x + u - l)^2 + p'(x' + u - l')^2 + p''(x'' + u - l'')^2 + \ldots$$
$$+ p_{,}(x + u_{,} - l_{,})^2 + p_{,}'(x' + u_{,} - l_{,}')^2 + p_{,}''(x'' + u_{,} - l_{,}'')^2 + \ldots$$
$$+ p_{,,}(x + u_{,,} - l_{,,})^2 + p_{,,}'(x' + u_{,,} - l_{,,}')^2 + p_{,,}''(x'' + u_{,,} - l_{,,}'')^2 + \ldots$$
$$+ \text{etc.}$$

und durch die blose Entwickelung der Quadrate, verbunden mit den allgemeinen Gleichungen

$$(lu) = 0 \,,\; (lu_{,}) = 0 \,,\; (lu_{,,}) = 0 \,,\; \text{etc.}$$

bringt man diesen Ausdruck zuerst auf die folgende, auch allgemeine, Form,

$$
\begin{aligned}
W = {} & \{(ll) - (lx)x - (lx')x' - (lx'')x'' - \ldots\} \\
& + \{Qx + pu + p_{,}u_{,} + p_{,,}u_{,,} + \ldots - (lx)\}x \\
& + \{Q'x' + p'u + p_{,}'u_{,} + p_{,,}'u_{,,} + \ldots - (lx')\}x' \\
& + \{Q''x'' + p''u + p_{,}''u_{,} + p_{,,}''u_{,,} + \ldots - (lx'')\}x'' \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

und nimmt man noch nicht auf die hier eingeführte Bedingungsgleichung Rücksicht, so geht dieser Ausdruck durch die Elimination der u, $u_{,}$, $u_{,,}$, etc. in den folgenden über,

$$
\begin{aligned}
W = {} & \{(ll) - (lx)x - (lx')x' - (lx'')x'' - \ldots\} \\
& + \{(aa)x + (ab)x' + (ac)x'' + \ldots - (lx)\}x \\
& + \{(ab)x + (bb)x' + (bc)x'' + \ldots - (lx')\}x' \\
& + \{(ac)x + (bc)x' + (cc)x'' + \ldots - (lx'')\}x'' \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

indem durch die Einführung der N, N', N'', etc. die Aggregate

$$
\begin{array}{llll}
x + u\,, & x' + u\,, & x'' + u\,, & \text{etc.} \\
x + u_{,}\,, & x' + u_{,}\,, & x'' + u_{,}\,, & \text{etc.} \\
x + u_{,,}\,, & x' + u_{,,}\,, & x'' + u_{,,}\,, & \text{etc.} \\
\text{etc.} & & \text{etc.} &
\end{array}
$$

die einzigen Functionen der x und der u, die in dem ursprünglichen Ausdruck von W vorkommen, unverändert bleiben.

Nehmen wir jetzt auf die hier eingeführte Bedingungsgleichung

$$x = x' + a$$

Rücksicht, und eliminiren damit x in dem obigen zweiten allgemeinen Ausdruck für W, so entsteht,

$$
\begin{aligned}
W = {} & \{(ll) - (lx)a - [(lx) + (lx')]x' - (lx'')x'' - (lx''')x''' - \ldots\} \\
& + \{Qx' + pu + p_{,}u_{,} + p_{,,}u_{,,} + \ldots - [(lx) - Qa]\}a \\
& + \{(Q + Q')x' + (p + p')u + (p_{,} + p_{,}')u_{,} + (p_{,,} + p_{,,}')u_{,,} + \ldots - [(lx) + (lx') - Qa]\}x' \\
& + \{Q''x'' + p''u + p_{,}''u_{,} + p_{,,}''u_{,,} + \ldots - (lx'')\}x'' \\
& + \{Q'''x''' + p'''u + p_{,}'''u_{,} + p_{,,}'''u_{,,} + \ldots - (lx''')\}x''' \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Die in diesen Ausdrücken mit (ll) bezeichnete Grösse ist wie früher die Summe der mit den bez. p dividirten Quadrate der einzelnen Glieder der zweiten Stationstafelchen.

Die Elimination der u, $u_{,}$, $u_{,,}$, etc. durch die allgemeinen Ausdrücke des Art. 20 für diese Grössen aus dem vorstehenden Ausdruck giebt für W einen Ausdruck, der leicht auf die folgende Form gebracht werden kann,

$$
\begin{aligned}
W = {} & \{(LL) - (Bl)x' - (cl)x'' - (dl)x''' - \ldots\} \\
& + \{(BB)x' + (Bc)x'' + (Bd)x''' + \ldots - (Bl)\}x' \\
& + \{(Bc)x' + (cc)x'' + (cd)x''' + \ldots - (cl)\}x'' \\
& + \{(Bd)x' + (cd)x'' + (dd)x''' + \ldots - (dl)\}x''' \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

in welchem

$$(LL) = (ll) + \{[Q - (pp)]a - 2(lx)\}a$$

ist. Dieser Ausdruck für W ist dem obigen, welcher der Annahme angehört, dass die hier eingeführte, und besonders betrachtete Bedingungsgleichung nicht vorhanden ist, völlig ähnlich, und er muss daher bei der weiteren Entwickelung genau dieselbe Form annehmen wie jener.

24.

In allen vorhergehenden Entwickelungen ist es unzweifelhaft, und an sich klar, wie zu verfahren ist, wenn mehr wie Eine Bedingungsgleichung der hier besonders betrachteten Gattung vorhanden ist, und auch aus den Entwickelungen des vor. Art. kann man schon entnehmen, welche Veränderungen der Ausdruck von (LL) in diesem Falle erleidet. Da wir aber hier mit einer quadratischen Form uns beschäftigen, so tritt die Abänderung minder klar hervor, wie in Bezug auf die vorhergehenden Ausdrücke, die alle linearisch sind. Ich werde daher die Substitutionen und Entwickelungen des vor. Art. hier auf zwei Bedingungsgleichungen ausdehnen. Seien diese

$$x = x'' + a$$
$$x' = x'' + a'$$

Die Elimination von x und x' aus demselben Ausdruck, der im vor. Art. dazu gedient hat, giebt zuerst

$$
\begin{aligned}
W = {} & \{(ll) - (lx)a - (lx')a' - [(lx) + (lx') + (lx'')]x'' - (lx''')x''' - \ldots\} \\
& + \{Qx'' + pu + p_1u_1 + p_2u_2 + \ldots - [(lx) - Qa]\}a \\
& + \{Q'x'' + p'u + p_1'u_1 + p_2'u_2 + \ldots - [(lx') - Q'a']\}a' \\
& + \{[Q + Q' + Q'']x'' + (p + p' + p'')u + (p_1 + p_1' + p_1'')u_1 \\
& \qquad + (p_2 + p_2' + p_2'')u_2 + \ldots - [(lx) + (lx') + (lx'') - Qa - Q'a']\}x'' \\
& + \{Q'''x''' + p'''u + p_1'''u_1 + p_2'''u_2 + \ldots - (lx''')\}x''' \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

und die Gleichungen, die zur Elimination der u, u_1, u_2, etc. dienen müssen, sind jetzt

$$u = -\frac{pa+p'a'}{P} - \frac{p+p'+p''}{P}x'' - \frac{p'''}{P}x''' - \ldots$$
$$u_{,} = -\frac{p_{,}a+p_{,}'a'}{P_{,}} - \frac{p_{,}+p_{,}'+p_{,}''}{P_{,}}x'' - \frac{p_{,}'''}{P_{,}}x''' - \ldots$$
$$u_{,,} = -\frac{p_{,,}a+p_{,,}'a'}{P_{,,}} - \frac{p_{,,}+p_{,,}'+p_{,,}''}{P_{,,}}x'' - \frac{p_{,,}'''}{P_{,,}}x''' - \ldots$$

etc. etc.

Aus dem Vorhergehenden geht unzweifelhaft hervor, dass im gegenwärtigen Falle die folgenden Gleichungen

$$(CC)y'' + (Cd)y''' + \ldots = (Cl)$$
$$(Cd)y'' + (dd)y''' + \ldots = (dl)$$

etc. etc.

in welchem

$$(CC) = (aa) + 2(ab) + 2(ac) + (bb) + 2(bc) + (cc)$$
$$(Cd) = (ad) + (bd) + (cd)$$

etc.

$$(Cl) = (lx) + (lx') + (lx'') + \{(pp) + (pp') + (pp'') - Q\}a + \{(pp') + (p'p') + (p'p'') - Q'\}a'$$
$$(dl) = (lx''') + (pp''')a + (p'p''')a'$$

etc.

die Stationsgleichungen sind. Eliminirt man nun die u, $u_{,}$, $u_{,,}$, etc. durch die obigen Gleichungen aus dem vorstehenden Ausdruck für W, so ergiebt sich

$$W = \{(LL) - (Cl)x'' - (dl)x''' - \ldots\} + \{(CC)x'' + (Cd)x''' + \ldots - (Cl)\}x'' + \{(Cd)x'' + (dd)x''' + \ldots - (dl)\}x''' + \text{etc.}$$

in welchem

$$(LL) = (ll) + \{[Q - (pp)]a - (pp')a' - 2(lx)\}a + \{[Q' - (p'p')]a' - (pp')a - 2(lx')\}a'$$

ist. Dieser Ausdruck von W ist wieder dem früheren vollständig ähnlich, und muss daher auch bei der weiteren Entwickelung dieselbe Form annehmen wie jene. Der vorstehende Ausdruck für (LL) zeigt unzweideutig, wie dessen Zusammensetzung in jedem anderen Falle sein muss.

25.

Ich könnte hiemit schon diesen Gegenstand als abgehandelt betrachten, werde aber, um möglichst vollständig zu sein, die noch auszuführenden Umformungen kurz durchgehen, und dabei wieder annehmen, dass nur die besondere Bedingungsgleichung

$$x = x' + a$$

vorhanden sei, da die Fälle von mehreren solchen Bedingungsgleichungen daraus von selbst folgen.

Setzt man in die erste Zeile des letzten im vorvor. Art. für W erhaltenen Ausdrucks

$$x' = y' - z' \,,\quad x'' = y'' - z'' \,,\quad x''' = y''' - z''' \,,\text{ etc.}$$

und vergleicht darauf den übrigen Theil desselben mit den Gleichungen für die x', x'', x''', etc. der Art. 20 u. 22, so bekommt man leicht

$$\begin{aligned} W = {} & \{(LL) - (Bl)y' - (cl)y'' - (dl)y''' - \ldots\} \\ & + \{(Bl)z' + (cl)z'' + (dl)z''' + \ldots\} \\ & + (f + qa)(I) + (g + ra)(II) + (h + sa)(III) + \ldots \end{aligned}$$

Die Stationsgleichungen des Art. 20 geben aber

$$\begin{aligned} (Bl)z' + (cl)z'' + (dl)z''' + \ldots = {} & \{(BB)z' + (Bc)z'' + (Bd)z''' + \ldots\}y' \\ & + \{(Bc)z' + (cc)z'' + (cd)z''' + \ldots\}y'' \\ & + \{(Bd)z' + (cd)z'' + (dd)z''' + \ldots\}y''' \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

und die ersten Gleichungen des Art. 14, die in beiden Verfahrungsarten gelten, machen die rechte Seite dieser Gleichung

$$\begin{aligned} = {} & \{(I)(q + q') + (II)(r + r') + (III)(s + s') + \ldots\}y' \\ & + \{(I)q'' + (II)r'' + (III)s'' + \ldots\}y'' \\ & + \{(I)q''' + (II)r''' + (III)s''' + \ldots\}y''' \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

Die Gleichungen des Art. 22 für die F, G, H, etc. geben hiemit die Gleichung

$$\begin{aligned} & (Bl)z' + (cl)z'' + (dl)z''' + \ldots \\ & \quad = (F - f - qa)(I) + (G - g - ra)(II) + (H' - h - sa)(III) + \ldots \end{aligned}$$

und hiemit bekommt man sogleich wie früher

$$\begin{aligned} W = {} & \{(LL) - (Bl)y' - (cl)y'' - (dl)y''' - \ldots\} \\ & + \{F(I) + G(II) + H(III) + \ldots\} \end{aligned}$$

Da ferner wieder für jede einzelne Station

$$(LL) - (Bl)y' - (cl)y'' - (dl)y''' - \ldots = (ll,n)$$

ist, wenn n die Anzahl der Richtungen y', y'', y''', etc. oder vielmehr die Anzahl der Stationsgleichungen bezeichnet, die auf dieser Station vorhanden sind, und im zweiten Theile der Auflösung wieder

$$F(I) + G(II) + H(III) + \ldots = R_q$$

ist, wenn q die Anzahl der Bedingungsgleichungen bezeichnet, die hier berücksichtigt worden sind, so wird schliesslich

$$W = \Sigma(ll,n) + R_q$$

wie in dem Falle, wo die hier besonders betrachtete Bedingungsgleichung nicht vorhanden ist. Der einzige Unterschied in dieser Berechnung besteht in dem Unterschiede zwischen (LL) und (ll), da aber dieser verschwindet, wenn $a = 0$ ist, so ist der am Ende des Art. 16 in Bezug auf die Summe der Fehlerquadrate aufgestellte Satz hiemit zugleich bewiesen.

Ich wiederhole, dass man aus dem im vor. Art. für den gegenwärtigen Fall erhaltenen Ausdruck für (LL) den bez. Ausdruck für jeden möglichen Fall leicht erhalten kann. Man erkennt z. B. aus demselben, dass für das im Art. 21 aufgestellte erste Beispiel

$$(LL) = (ll) + \{[Q'] - (p'p')]\,a' - 2(lx')\}\,a'$$

und für das dortige zweite Beispiel

$$(LL) = (ll) + \{[Q''] - (p''p'')]\,a'' - (p''p''')a''' - 2(lx'')\}a''$$
$$+ \{[Q'''] - (p'''p''')]a''' - (p''p''')a'' - 2(lx''')\}a'''$$

wird, und sieht zugleich daraus, welchen Ausdruck (LL) in jedem anderen Falle annimmt.

26.

Man erkennt zwar leicht, dass im gegenwärtigen Falle auch die Berechnung der Gewichte nach den allgemeinen Ausdrücken, die ich dafür gegeben habe, auszuführen ist, aber um keinen Zweifel darüber übrig zu lassen, werde ich die Ableitung derselben mit Berücksichtigung der hier eingeführten Bedingungsgleichung wieder aufnehmen, und auf ähnliche Weise durchführen, wie es in meinem oben angezogenen Aufsatze »Kurz gefasste, rationelle Ableitung u. s. w.« geschehen ist.

Vor Allem bemerke ich, dass hier ohne Ausnahme die Ausdrücke für die hier gegebenen beiden Verfahrungsarten dieselben werden müssen, da der Unterschied, den die beiden Gleichungen

$$x = x' \text{ und } x = x' + a$$

darbietet, und auf welchen die Verschiedenheit der beiden Verfahrungsarten beruht, hier nicht die mindeste Verschiedenheit bewirken kann. Die Function, deren Gewicht zu ermitteln ist, soll wie in dem angezogenen Aufsatze, und wie in der oft angezogenen Abhandlung

$$\Omega = \omega + kx + k'x' + k''x'' + k'''x''' + \ldots$$

sein, welche vermittelst der zweiten der beiden vorstehenden Gleichungen in die folgende übergeht,

$$\Omega = \omega + ka + (k + k')x' + k''x'' + k'''x''' + \ldots$$

und darauf in

$$\Omega = \omega + ka + (k + k')y' + k''y'' + k'''y''' + \ldots$$
$$- (k + k')z' - k''z'' - k'''z''' - \ldots$$

verwandelt werden kann. Multiplicirt man aber die Gleichungen für die z', z'', z''', etc. des Art. 14, die in beiden Verfahrungsarten Geltung haben, bez. mit $k + k'$, k'', k''', etc. und addirt die Producte, so entsteht

$$(k + k')z' + k''z'' + k'''z''' + \ldots$$
$$= (\eta M)(I) + (\varkappa M)(II) + (\lambda M)(III) + \ldots$$

nachdem

$$(\eta M) = (\beta\eta)(k + k') + (\gamma\eta)k'' + (\delta\eta)k''' + \ldots$$
$$(\varkappa M) = (\beta\varkappa)(k + k') + (\gamma\varkappa)k'' + (\delta\varkappa)k''' + \ldots$$
$$(\lambda M) = (\beta\lambda)(k + k') + (\gamma\lambda)k'' + (\delta\lambda)k''' + \ldots$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

gesetzt worden sind. Stellt man aber die Gleichungen

$$(\eta\eta)\alpha + (\eta\varkappa)\beta + (\eta\lambda)\gamma + \ldots = (\eta M)$$
$$(\eta\varkappa)\alpha + (\varkappa\varkappa)\beta + (\varkappa\lambda)\gamma + \ldots = (\varkappa M)$$
$$(\eta\lambda)\alpha + (\varkappa\lambda)\beta + (\lambda\lambda)\gamma + \ldots = (\lambda M)$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

auf, so erhält man durch die Verbindung derselben mit den Endgleichungen des Art. 15, die in beiden Verfahrungsarten Gültigkeit haben, die Relation

$$(\eta M)(I) + (\varkappa M)(II) + (\lambda M)(III) + \ldots$$
$$= F\alpha + G\beta + H\gamma + \ldots$$

wodurch

$$\Omega = \omega + ka + (k + k')\eta' + k''y'' + k'''y''' + \ldots$$
$$- F\alpha - G\beta - H\gamma - \ldots$$

wird. Die Substitution der ersten Ausdrücke für die F, G, H, etc. des Art. 22 giebt hierauf

$$\Omega = \omega + ka - (f + ga)\alpha - (g + ra)\beta - (h + sa)\gamma - \ldots$$
$$+ K'y' + K''y'' + K'''y''' + \ldots$$

wo

$$K' = (k + k') - (q + q')\alpha - (r + r')\beta - (s + s')\gamma - \ldots$$
$$K'' = k'' - q''\alpha - r''\beta - s''\gamma - \ldots$$
$$K''' = k''' - q'''\alpha - r'''\beta - s'''\gamma - \ldots$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

gesetzt worden ist. Da in diesem Ausdruck für Ω alle Grössen, die von den Beobachtungen abhängen, in den y', y'', y''', etc. enthalten sind, so kann der Satz des Art. 23 der oft angezogenen Abhandlung darauf unmittelbar angewandt werden, und giebt, wenn das Gewicht der Function Ω mit P bezeichnet wird,

$$\frac{1}{P} = K'^2\{[2,2]\} + 2K'K''\{[2,3]\} + 2K'K'''\{[2,4]\} + \ldots$$
$$+ K''^2\{3,3\} + 2K''K'''\{3,4\} + \ldots$$
$$+ K'''^2\{4,4\} + \ldots$$
$$+ \text{etc.}$$

wo die Coefficienten der verschiedenen K diejenigen sind, die im Art. 14 eingeführt und erklärt wurden.

27.

Stellen wir jetzt, um den Ausdruck von P zu reduciren, die folgenden zwei Systeme von Gleichungen auf

$$(BB)B + (Bc)C + (Bd)D = K'$$
$$(Bc)B + (cc)C + (cd)D = K''$$
$$(Bd)B + (cd)C + (dd)D = K'''$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$
$$(BB)B' + (Bc)C' + (Bd)D' = k + k$$
$$(Bc)B' + (cc)C' + (cd)D' = k''$$
$$(Bd)B' + (cd)C' + (dd)D' = k'''$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

Da in diesen Gleichungen die Coefficienten der Unbekannten dieselben sind, wie in den Stationsgleichungen der Artt. 13 u. 20, so erhalten wir durch die unbestimmte Auflösung derselben

$$B = \{[2,2]\}K' + \{[2,3]\}K'' + \{[2,4]\}K''' + \ldots$$
$$C = \{[2,3]\}K' + \{3,3\}K'' + \{3,4\}K''' + \ldots$$
$$D = \{[2,4]\}K' + \{3,4\}K'' + \{4,4\}K''' + \ldots$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

$$B' = \{[2,2]\}(k + k') + \{[2,3]\}k'' + \{[2,4]\}k''' + \ldots$$
$$C' = \{[2,3]\}(k + k') + \{\ 3,3\ \}k'' + \{\ 3,4\ \}k''' + \ldots$$
$$D' = \{[2,4]\}(k + k') + \{\ 3,4\ \}k'' + \{\ 4,4\ \}k''' + \ldots$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

wie im Art. 14. Nimmt man von diesen Gleichungen die Unterschiede, und substituirt die Ausdrücke der K', K'', K''', etc. des vor. Art., so ergeben sich sogleich

$$B' - B = (\beta\eta)\alpha + (\beta\varkappa)\beta + (\beta\lambda)\gamma + \ldots$$
$$C' - C = (\gamma\eta)\alpha + (\gamma\varkappa)\beta + (\gamma\lambda)\gamma + \ldots$$
$$D' - D = (\delta\eta)\alpha + (\delta\varkappa)\beta + (\delta\lambda)\gamma + \ldots$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

und hieraus

$$0 = (B' - B)K' + (C' - C)K'' + (D' - D)K''' + \ldots$$

Endlich geben die vorstehenden Gleichungen auch leicht

$$B'K' + C'K'' + D'K''' + \ldots = B(k + k') + Ck'' + Dk''' + \ldots$$

Durch Hülfe dieser Gleichungen erhält das Gewicht P nach und nach die folgenden Ausdrücke

$$P = \frac{1}{BK' + CK'' + DK''' + \ldots}$$
$$P = \frac{1}{B(k+k') + Ck'' + Dk''' + \ldots}$$
$$P = \frac{1}{R - S}$$

wo

$$R = B'(k + k') + C'k'' + D'k''' + \ldots$$
$$S = \alpha(\eta M) + \beta(\varkappa M) + \gamma(\lambda M) + \ldots$$

sind. Da diese zuletzt erhaltenen Ausdrücke auf dieselbe Weise, wie in der oft angezogenen Abhandlung gezeigt ist, in die folgenden umgewandelt werden können,

$$R = \frac{M^2}{(BB)} + \frac{M'^2}{(cc,1)} + \frac{M''^2}{(dd,2)} + \ldots$$
$$S = \frac{(\eta M)^2}{(\eta\eta)} + \frac{(\varkappa M,1)^2}{(\varkappa\varkappa;1)} + \frac{(\lambda M,2)^2}{(\lambda\lambda;2)} + \ldots$$

so erkennt man, dass die Berechnung der Gewichte im gegenwärtigen Falle dieselbe ist, wie in dem Falle, wo die hier eingeführte Bedingungsgleichung nicht vorhanden ist, nur muss man im gegenwärtigen Falle, gleichwie bei der Berechnung der Werthe der Unbekannten selbst, von den Coefficienten, die den Richtungen angehören, die Schenkel des vor-

her bestimmten Winkels bilden, allenthalben die Summe anwenden. Hiemit ist der zweite zu Ende des Art. 16 ausgesprochene Satz bewiesen, und man erkennt überdies, dass in beiden im Vorhergehenden abgeleiteten Verfahrungsarten die Berechnung der Gewichte genau dieselbe ist.

28.

Es ist an sich klar, dass die Anwendung des hier erklärten Verfahrens nicht auf die Gattung von Bedingungsgleichungen beschränkt ist, auf die es hier angewendet worden ist. Man sieht leicht ein, dass es auch auf eine beliebige Anzahl der Bedingungsgleichungen, ja strenge genommen auf alle, die das Dreiecksnetz als solches darbietet, angewendet werden kann. Wenn man aber dieses Verfahren auf die Seitengleichungen anwenden wollte, so würde man in ziemliche Weitläuftigkeiten gerathen, während die Anwendung auf die Winkelgleichungen weit einfacher wird. Da es scheint, dass diese Anwendung in manchen Fällen von Nutzen sein kann; zumal wenn man nicht allzuviele Winkelgleichungen hinein zieht, so will ich die Ausdrücke für die Behandlung Einer Winkelgleichung auf diese Art ableiten.

29.

Die Winkelgleichung, die ich der Betrachtung unterziehen werde, soll einem Dreieck angehören, und kann daher in der folgenden Gestalt aufgestellt werden,

$$(X' + x') - (X'' + x'') + (X''' + x''') - (X'' + x'') + (X^{v} + x^{v}) - (X^{vi} + x^{vi}) = 180^{0} + \varepsilon$$

wenn ε den sphärischen Excess dieses Dreiecks bezeichnet. Nun kann man aber immer ohne Mühe sogleich am ersten Anfange der Rechnung die vorläufigen Werthe der Richtungen so annehmen, dass

$$X' - X'' + X''' - X^{iv} + X^{v} - X^{vi} = 180^{0} + \varepsilon$$

wird, und hieraus folgen die Gleichungen

$$x - x' + x'' - x''' + x^{iv} - x^{v} = 0$$
$$dx - dx' + dx'' - dx''' + dx^{iv} - dx^{v} = 0$$

die im gegenwärtigen Falle nach dem zweiten Verfahren des Art. 3 anzuwenden sind.

30.

Von den sechs Gliedern, aus welchen jede der beiden vorstehenden Gleichungen besteht, gehören je zwei einer andern Station an, so dass drei verschiedene Stationen in Betracht kommen. Es wird dienlich sein, dieses in der Bezeichnung der betreffenden Grössen auszudrücken, und es soll daher die bis jetzt angewandte Bezeichnung ungeändert nur für die Station gelten, die man die erste nennen will; für die beiden anderen Stationen sollen zwar auch dieselben Buchstaben und dieselben an diesen angebrachten Striche angewandt werden, aber jeder soll in Klammern eingeschlossen, und ausserhalb dieser unten mit Einem bez. zwei Strichen versehen werden. Es werden demnach für die zweite Station die Richtungen, und die Verbesserungen der Anfangspunkte der Gyri

$$(x)_{,},\ (x')_{,},\ (x'')_{,},\ \text{etc.}\quad (u)_{,},\ (u_{,})_{,},\ (u_{,,})_{,},\ \text{etc.}$$

und für die dritte Station dieselben

$$(x)_{,,},\ (x')_{,,},\ (x'')_{,,},\ \text{etc.}\quad (u)_{,,},\ (u_{,})_{,,},\ (u_{,,})_{,,},\ \text{etc.}$$

sein, und die bisherige Bezeichnung aller übrigen Grössen soll auf dieselbe Weise für die zweite und dritte Station abgeändert werden. Die Gleichungen des vor. Art. stellen sich daher jetzt auf folgende Weise dar,

$$\begin{aligned} X' - X + (X')_{,} - (X)_{,} + (X')_{,,} - (X)_{,,} &= 180^{0} + \varepsilon \\ x - x' + (x)_{,} - (x')_{,} + (x)_{,,} - (x')_{,,} &= 0 \\ dx - dx' + d(x)_{,} - d(x')_{,} + d(x)_{,,} - d(x')_{,,} &= 0 \end{aligned}$$

31.

Wenden wir uns zur Minimalgleichung des Art. 8, so könnten wir diese durch die Einführungen der obigen Bezeichnungen in beliebigem Maasse erweitern, aber ich halte dieses für unnöthig, da sich aus derselben auch in der Ausdehnung, die ihr dort gegeben worden ist, die hier erforderlichen Gleichungen in der neuen Bezeichnung ableiten lassen. Eliminiren wir aus dieser Minimalgleichung zuerst dx, und machen darauf jeden Coefficienten aller übrig bleibenden Differentiale für sich Null, so ergeben sich zuerst die folgenden Gleichungen,

für die erste Station

$$\begin{aligned} 0 &= px + p'x' + p''x'' + \ldots + Pu \\ 0 &= p_{,}x + p_{,}'x' + p_{,}''x'' + \ldots + P_{,}u_{,} \\ &\text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

$$Qx + Q'x' + (p + p')u + (p_{,} + p_{,}')u_{,} + \ldots$$
$$= [(lx') + (lx)] - (I)(q' + q) - (II)(r' + r) - \ldots$$
$$Q''x'' + p''u + p_{,}''u_{,} + \ldots = (lx'') - (I)q'' - (II)r'' - \ldots$$
$$Q'''x''' + p'''u + p_{,}'''u_{,} + \ldots = (lx''') - (I)q''' - (II)r''' - \ldots$$

etc. etc.

für die zweite Station

$$0 = (p)_{,}(x)_{,} + (p')_{,}(x')_{,} + (p'')_{,}(x'')_{,} + \ldots + (P)_{,}(u)_{,}$$
$$0 = (p_{,})_{,}(x)_{,} + (p_{,}')_{,}(x')_{,} + (p_{,}'')_{,}(x'')_{,} + \ldots + (P_{,})_{,}(u_{,})_{,}$$

etc. etc.

$$- Qx - pu - p_{,}u_{,} - \ldots + (Q)_{,}(x)_{,} + (p)_{,}(u)_{,} + (p_{,})_{,}(u_{,})_{,} + \ldots$$
$$= [(l(x)_{,}) - (lx)] - (I)((q)_{,} - q) - (II)((r)_{,} - r) - \ldots$$
$$+ Qx + pu + p_{,}u_{,} + \ldots + (Q')_{,}(x')_{,} + (p')_{,}(u)_{,} + (p_{,}')_{,}(u_{,})_{,} + \ldots$$
$$= [(l(x')_{,}) + (lx)] - (I)((q')_{,} + q) - (II)((r')_{,} + r) - \ldots$$
$$(Q'')_{,}(x'')_{,} + (p'')_{,}(u)_{,} + (p_{,}'')_{,}(u_{,})_{,} + \ldots = (l(x'')_{,} - (I)(q'')_{,} - (II)(r'')_{,} - \ldots$$

etc. etc.

für die dritte Station

$$0 = (p)_{,,}(x)_{,,} + (p')_{,,}(x')_{,,} + (p'')_{,,}(x'')_{,,} + \ldots + (P)_{,,}(u)_{,,}$$
$$0 = (p_{,})_{,,}(x)_{,,} + (p_{,}')_{,,}(x')_{,,} + (p_{,}'')_{,,}(x'')_{,,} + \ldots + (P_{,})_{,,}(u_{,})_{,,}$$

etc. etc.

$$- Qx - pu - p_{,}u_{,} - \ldots + (Q)_{,,}(x)_{,,} + (p')_{,,}(u)_{,,} + (p_{,}')_{,,}(u_{,})_{,,} + \ldots$$
$$= [(l(x)_{,,}) - (lx)] - (I)((q)_{,,} - q) - (II)((r)_{,,} - r) - \ldots$$
$$+ Qx + pu + p_{,}u_{,} + \ldots + (Q')_{,,}(x')_{,,} + (p')_{,,}(u)_{,,} + (p_{,}')_{,,}(u_{,})_{,,} + \ldots$$
$$= [(l(x')_{,,}) + (lx)] - (I)((q')_{,,} + q) - (II)((r')_{,,} + r) - \ldots$$
$$(Q'')_{,,}(x'')_{,,} + (p'')_{,,}(u)_{,,} + (p_{,}'')(u_{,})_{,,} + \ldots = (l(x'')_{,,} - (I)(q'')_{,,} - (II)(r'')_{,,} - \ldots$$

etc. etc.

32.

Die Elimination von x durch die bez. Gleichung des vorvor. Art. giebt hierauf

für die erste Station

$$0 = (p + p')x' + p''x'' + p'''x''' + \ldots - p(x)_{,} + p(x')_{,} - p(x)_{,,} + p(x')_{,,} + Pu$$
$$0 = (p_{,} + p_{,}')x' + p_{,}''x'' + p_{,}'''x''' + \ldots - p_{,}(x)_{,} + p_{,}(x')_{,} - p_{,}(x)_{,,} + p_{,}(x')_{,,} + P_{,}u_{,}$$

etc. etc.

$$
\begin{aligned}
&(Q' + Q)x' - Q(x)_{,} + Q(x')_{,} - Q(x)_{,,} + Q(x')_{,,} \\
&+ (p + p')u + (p_{,} + p_{,}')u_{,} + \ldots \\
&= [(lx') + (lx)] - (I)(q' + q) - (II)(r' + r) - \ldots \\
&\quad Q''x'' + p''u + p_{,}''u_{,} + \ldots = (lx'') - (I)q'' - (II)r'' - \ldots \\
&\quad Q'''x''' + p'''u + p_{,}'''u_{,} + \ldots = (lx''') - (I)q''' - (II)r''' - \ldots \\
&\qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

für die zweite Station

$$
\begin{aligned}
0 &= (p)_{,}(x)_{,} + (p')_{,}(x')_{,} + (p'')_{,}(x'')_{,} + \ldots + (P)_{,}(u)_{,} \\
0 &= (p_{,})_{,}(x)_{,} + (p_{,}')_{,}(x')_{,} + (p_{,}'')_{,}(x'')_{,} + \ldots + (P_{,})_{,}(u_{,})_{,} \\
&\qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- Qx' + ((Q)_{,} + Q)(x)_{,} - Q(x')_{,} + Q(x)_{,,} - Q(x')_{,,} \\
&- pu - p_{,}u_{,} - \ldots + (p)_{,}(u)_{,} + (p_{,})_{,}(u_{,})_{,} + \ldots \\
&= [(l(x)_{,}) - (lx)] - (I)((q)_{,} - q) - (II)((r)_{,} - r) - \ldots \\
&+ Qx' - Q(x)_{,} + ((Q')_{,} + Q)(x')_{,} - Q(x)_{,,} + Q(x')_{,,} \\
&+ pu + p_{,}u_{,} + \ldots + (p')_{,}(u)_{,} + (p_{,}')_{,}(u_{,})_{,} + \ldots \\
&= [(l(x')_{,}) + (lx)] - (I)((q')_{,} + q) - (II)((r')_{,} + r) - \ldots \\
&\quad (Q'')_{,}(x'')_{,} + (p'')_{,}(u)_{,} + (p_{,}'')_{,}(u_{,})_{,} + \ldots = (l(x'')_{,}) - (I)(q'')_{,} - (II)(r'')_{,} - \ldots \\
&\qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

für die dritte Station

$$
\begin{aligned}
0 &= (p)_{,,}(x)_{,,} + (p')_{,,}(x')_{,,} + (p'')_{,,}(x'')_{,,} + \ldots + (P)_{,,}(u)_{,,} \\
0 &= (p_{,})_{,,}(x)_{,,} + (p_{,}')_{,,}(x')_{,,} + (p_{,}'')_{,,}(x'')_{,,} + \ldots + (P_{,})_{,,}(u_{,})_{,,} \\
&\qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- Qx' + Q(x)_{,} - Q(x')_{,} + ((Q)_{,,} + Q)(x)_{,,} - Q(x')_{,,} \\
&- pu - p_{,}u_{,} - \ldots + (p)_{,,}(u)_{,,} + (p_{,})_{,,}(u_{,})_{,,} + \ldots \\
&= [(l(x)_{,,}) - (lx)] - (I)((q)_{,,} - q) - (II)((r)_{,,} - r) - \ldots \\
&+ Qx' - Q(x)_{,} + Q(x')_{,} - Q(x)_{,,} + ((Q')_{,,} + Q)(x')_{,,} \\
&+ pu + p_{,}u_{,} + \ldots + (p')_{,,}(u)_{,,} + (p_{,}')_{,,}(u_{,})_{,,} + \ldots \\
&= [(l(x')_{,,}) + (lx)] - (I)((q')_{,,} + q) - (II)((r')_{,,} + r) - \ldots \\
&\quad (Q'')_{,,}(x'')_{,,} + (p'')_{,,}(u)_{,,} + (p_{,}'')_{,,}(u_{,})_{,,} + \ldots = (l(x'')_{,,}) - (I)(q'')_{,,} - (II)(r'')_{,,} - \ldots \\
&\qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

33.

Durch die Elimination endlich der verschiedenen u aus diesen Gleichungen entstehen die folgenden.

$$
\begin{aligned}
&[BB]x' + [Bc]x'' + [Bd]x''' + \dots \\
&- [aB](x)_1 + [aB](x')_1 - [aB](x)_{11} + [aB](x')_{11} \\
&= [(lx') + (lx)] - (I)(q' + q) - (II)(r' + r) - \dots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&[Bc]x' + [cc]x'' + [cd]x''' + \dots \\
&- [ac](x)_1 + [ac](x')_1 - [ac](x)_{11} + [ac](x')_{11} \\
&= (lx'') - (I)q'' - (II)r'' - \dots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&[Bd]x' + [cd]x'' + [dd]x''' + \dots \\
&- [ad](x)_1 + [ad](x')_1 - [ad](x)_{11} + [ad](x')_{11} \\
&= (lx''') - (I)q''' - (II)r''' - \dots
\end{aligned}
$$

etc. etc.

$$
\begin{aligned}
&- [aB]x' - [ac]x'' - [ad]x''' - \dots \\
&+ [aA]_1(x)_1 + [aB]_1(x')_1 + [ac]_1(x'')_1 + \dots \\
&+ [aa](x)_{11} - [aa](x')_{11} \\
&= [(l(x)_1) - (lx)] - (I)((q)_1 - q) - (II)((r)_1 - r) - \dots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&[aB]x' + [ac]x'' + [ad]x''' + \dots \\
&+ [aB]_1(x)_1 + [Bb]_1(x')_1 + [bc]_1(x'')_1 + \dots \\
&- [aa](x)_{11} + [aa](x')_{11} \\
&= [(l(x')_1) + (lx)] - (I)((q')_1 + q) - (II)((r')_1 + r) - \dots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&[ac]_1(x)_1 + [bc]_1(x')_1 + [cc]_1(x'')_1 + \dots \\
&= (l(x'')_1) - (I)(q'')_1 - (II)(r'')_1 - \dots
\end{aligned}
$$

etc. etc.

$$
\begin{aligned}
&- [aB]x' - [ac]x'' - [ad]x''' - \dots \\
&+ [aa](x)_1 - [aa](x')_1 \\
&+ [Aa]_{11}(x)_{11} + [aB]_{11}(x')_{11} + [ac]_{11}(x'')_{11} + \dots \\
&= [(l(x)_{11}) - (lx)] - (I)((q)_{11} - q) - (II)((r)_{11} - r) - \dots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&[aB]x' + [ac]x'' + [ad]x''' + \dots \\
&- [aa](x)_1 + [aa](x')_1 \\
&+ [aB]_{11}(x)_{11} + [bB]_{11}(x')_{11} + [bc]_{11}(x'')_{11} + \dots \\
&= [(l(x')_{11}) + (lx)] - (I)((q')_{11} + q) - (II)((r')_{11} + r) - \dots
\end{aligned}
$$

$$[ac]_{,,}(x)_{,,} + [bc]_{,,}(x')_{,,} + [cc]_{,,}(x'')_{,,} + \ldots$$
$$= (l(x'')_{,,}) - (I)(q'')_{,,} - (II)(r'')_{,,} - \ldots$$
etc. etc.

Nehmen wir die Bedeutung der mit zwei Buchstaben des kleinen Alphabets bezeichneten und in viereckige Klammern eingeschlossenen Grössen eben so wie früher, nemlich

$$[aa] = Q - (pp)$$
$$[ab] = \quad - (pp')$$
$$[ac] = \quad - (pp'')$$
etc.
$$[bb] = Q' - (p'p')$$
$$[bc] = \quad - (p'p'')$$
etc.
$$[cc] = Q'' - (p''p'')$$
etc.

und behalten für die erste Station diese Bezeichnung unverändert bei, während wir für die zweite

$$[aa]_{,}, \quad [ab]_{,}, \text{ etc. } [bb]_{,}, \text{ etc. etc.}$$

und für die dritte

$$[aa]_{,,}, \quad [ab]_{,,}, \text{ etc. } [bb]_{,,}, \text{ etc. etc.}$$

schreiben, so sind in den vorstehenden Gleichungen die auf diese Weise bezeichneten Coefficienten erklärt. Die übrigen Coefficienten sind durch jene auf folgende Art gegeben,

$$[BB] = [bb] + 2[ab] + [aa]$$
$$[Bc] = [bc] + [ac]$$
$$[Bd] = [bd] + [ad]$$
etc.
$$[aB] = [ab] + [aa]$$

$$[aA]_{,} = [aa]_{,} + [aa]$$
$$[aB]_{,} = [ab]_{,} - [aa]$$
etc.

$$[Bb]_{,} = [bb]_{,} + [aa]$$

$$[Aa]_{,,} = [aa]_{,,} + [aa]$$
$$[aB]_{,,} = [ab]_{,,} - [aa]$$

$$[bB]_{,,} = [bb]_{,,} + [aa]$$

34.

Man kann nun die mehrmals angeführte Bedingungsgleichung

$$0 = Nx + N'x' + N''x'' + N'''x''' + \ldots$$

in die Gleichungen des vor. Art. einführen, diese dadurch in von einander unabhängige verwandeln, und bewirken, dass eine gewisse Anzahl der Coefficienten verschwindet, wodurch ihre Auflösung vereinfacht wird. Die Einführung dieser Bedingungsgleichung kann auf verschiedene Weise ausgeführt werden. Man kann sie unmittelbar in die obigen Gleichungen einführen, man kann sie aber auch in die ursprünglichen Gleichungen der drei hier in Betracht kommenden Stationen einführen. Schliessen wir zum Zeichen, dass diese Einführung auf die eine oder die andere Art vorgenommen worden ist, wie früher, die Coefficienten in runde Klammern ein, und trennen die Glieder ab, die von den bis jetzt nicht berücksichtigten Bedingungsgleichungen abhängen, so bekommen wir im gegenwärtigen Falle die folgenden, sich auf alle drei hier in Betracht gekommenen Stationen erstreckenden Stationsgleichungen,

$$\begin{array}{l}
(BB)y' + (Bc)y'' + (Bd)y''' + \ldots \\
- (aB)(y)_, + (aB)(y')_, - (aB)(y)_{,,} + (aB)(y')_{,,} = (lx') + (lx) \\
\hline
(Bc)y' + (cc)y'' + (cd)y''' + \ldots \\
- (ac)(y)_, + (ac)(y')_, - (ac)(y)_{,,} + (ac)(y')_{,,} = (lx'') \\
\hline
(Bd)y' + (cd)y'' + (dd)y''' + \ldots \\
- (ad)(y)_, + (ad)(y')_, - (ad)(y)_{,,} + (ad)(y')_{,,} = (lx''') \\
\hline
\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
- (aB)y' - (ac)y'' - (ad)y''' - \ldots \\
+ (aA)_,(y)_, + (aB)_,(y')_, + (ac)_,(y'')_, + \ldots \\
+ (aa)(y)_{,,} - (aa)(y')_{,,} = (l(x)_,) - (lx) \\
\hline
(aB)y' + (ac)y'' + (ad)y''' + \ldots \\
+ (aB)_,(y)_, + (Bb)_,(y')_, + (bc)_,(y'')_, + \ldots \\
- (aa)(y)_{,,} + (aa)(y')_{,,} = (l(x')_,) + (lx) \\
\hline
(ac)_,(y)_, + (bc)_,(y')_, + (cc)_,(y'')_, + \ldots = (l(x'')_,) \\
\hline
\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{array}$$

$$
\begin{aligned}
&- (aB)y' - (ac)y'' - (ad)y''' - \dots \\
&+ (aa)(y)_{,} - (aa)(y')_{,} \\
&+ (Aa)_{,}(y)_{,} + (aB)_{,}(y')_{,} + (ac)_{,}(y'')_{,} + \dots = (l(x)_{,}) - (lx) \\
&\hline \\
&(aB)y' + (ac)y'' + (ad)y''' + \dots \\
&- (aa)(y)_{,} + (aa)(y')_{,} \\
&+ (aB)_{,}(y)_{,} + (bB)_{,}(y')_{,} + (bc)_{,}(y'')_{,} + \dots = (l(x')_{,}) + (lx) \\
&\hline \\
&(ac)_{,}(y)_{,} + (bc)_{,}(y')_{,} + (cc)_{,}(y'')_{,} + \dots = (l(x'')_{,}) \\
&\qquad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

in welchen immer eine Anzahl der Coefficienten gleich Null gemacht werden können. Ausser dem oben darüber schon angeführten, verweise ich auf das unten folgende Beispiel.

35.

Betrachten wir jetzt den zweiten Theil der Auflösung, so folgt aus den Entwickelungen dieser Abhandlung unmittelbar, dass sie eben so durchgeführt werden muss, als wäre die oben bezeichnete Bedingungsgleichung den Stationsgleichungen nicht einverleibt worden. Nur darf diese nicht unter den übrigen Bedingungsgleichungen einbegriffen werden, und man muss allenthalben in den dem zweiten Theil der Auflösung zufallenden Bedingungsgleichungen

$$
\begin{aligned}
&q' + q \\
&r' + r \\
&s' + s \\
&\text{etc.} \\
&(q)_{,} - q \\
&(r)_{,} - r \\
&(s)_{,} - s \\
&\text{etc.} \\
&(q')_{,} + q \\
&(r')_{,} + r \\
&(s')_{,} + s \\
&\text{etc.} \\
&(q)_{,,} - q \\
&(r)_{,,} - r \\
&(s)_{,,} - s \\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

$$(q')_n + q$$
$$(r')_n + r$$
$$(s')_n + s$$
etc.

anwenden. Auch die Berechnung der Summe der Fehlerquadrate, und die der Gewichte bleibt nach Anwendung der vorstehenden Additionen und Subtractionen dieselbe wie früher.

Man kann die vorstehenden Entwickelungen leicht auf so viele Winkelgleichungen ausdehnen als man will.

36.

Die Entwickelungen dieser Abhandlung sollen jetzt durch einfache Beispiele erläutert werden. Ich nehme zuerst ein Viereck vor, und bezeichne die Eckpunkte oder Stationen desselben mit den Zahlen (1), (2), (3), (4), so wie die wahrscheinlichsten Werthe der Richtungen auf der

Station (1) nach (2) mit $x(1)_1$
» » » (4) » $x(2)_1$
» » » (3) » $x(3)_1$
Station (2) nach (4) mit $x(1)_2$
» » » (3) » $x(2)_2$
» » » (1) » $x(3)_2$
Station (3) nach (1) mit $x(1)_3$
» » » (2) » $x(2)_3$
» » » (4) » $x(3)_3$
Station (4) nach (3) mit $x(1)_4$
» » » (1) » $x(2)_4$
» » » (2) » $x(3)_4$

Die vorläufigen Werthe dieser Richtungen, die mit $(1)_1$, $(2)_1$, $(3)_1$, $(1)_2$, etc. bezeichnet werden sollen, seien mit Einschluss der Centrirungen

$(1)_1 = 359^0\ 59'\ 27''369$
$(2)_1 = 55\ 59\ 19.167$
$(3)_1 = 82\ 23\ 13.969$
$(1)_2 = 359\ 59\ 59.853$
$(2)_2 = 51\ 22\ 37.000$
$(3)_2 = 93\ 55\ 17.369$

$$(1)_3 = 359\ 59\ 43.969$$
$$(2)_3 = 55\ 3\ 20.000$$
$$(3)_3 = 137\ 16\ 3.776$$
$$(1)_4 = 161\ 4\ 40.000$$
$$(2)_4 = 177\ 24\ 31.316$$
$$(3)_4 = 207\ 29\ 22.000$$

wonach man dieses Viereck leicht aufzeichnen kann. Die Bedingungsgleichungen, die dasselbe liefert, können wie folgt aufgestellt werden,

$$(I) \ldots x(3)_1 - x(1)_1 + x(3)_2 - x(2)_2 + x(2)_3 - x(1)_3 = 180^0\ 0'\ 2''871$$
$$(II) \ldots x(2)_2 - x(1)_2 + x(3)_3 - x(2)_3 + x(3)_4 - x(1)_4 = 180\ 0\ 5.488$$
$$(III) \ldots x(2)_1 - x(1)_1 + x(3)_2 - x(1)_2 + x(3)_4 - x(2)_4 = 180\ 0\ 5.796$$
$$(IV) \ldots \frac{\sin(x(3)_1 - x(2)_1)\sin(x(3)_2 - x(2)_2)\sin(x(3)_4 - x(1)_4)}{\sin(x(3)_1 - x(1)_1)\sin(x(2)_2 - x(1)_2)\sin(x(2)_4 - x(1)_4)} = 1$$

welchen ich die Bedingungsgleichung

$$(V) \ldots x(2)_1 - x(1)_1 = 55^0\ 59'\ 51''798$$

hinzufüge, wodurch dem Winkel zwischen den beiden Richtungen $x(1)_1$ und $x(2)_1$ im Voraus ein bestimmter Werth beigelegt wird, welcher aus den Ausgleichungsrechnungen wieder hervorgehen muss. Man sieht, dass die oben angeführten vorläufigen Werthe dieser beiden Richtungen so angenommen worden sind, dass sie schon der Bedingungsgleichung (V) gnügen, gleichwie im Art. 7 verlangt wurde.

37.

Die Ueberschüsse über die obigen vorläufigen Werthe der Richtungen, die durch die Beobachtungen erhalten worden sind, sollen die folgenden sein, die ich sogleich in der Form der zweiten Stationstäfelchen aufstelle, da die Kenntniss der ersten Stationstäfelchen hier von keinem Interesse ist.

St. (1).

Nr.	(1)	(2)	(3)	p	P	$p^2 : P$
1	—	+7″250	−7″250	28	56	14.0
2	−15″750	+15.750	—	22	44	11.0
3	−2.000	—	+2.000	2	4	1.0
4	−7.834	+5.417	+2.417	10	30	3.333
(lx)	−25″584	+28″417	−2″833		134	
Q	34	60	40	=	134	
	p	p'	p''			
p	15.333	14.333	4.333	=	34	
p'		28.333	17.333	=	60	
p''			18.333	=	40	

$$(ll) = 39.96$$

$$\log N = 0.2772\ ,\quad \log N' = 0.8791\ ,\quad \log N'' = 0.3596$$

St. (2).

Nr.	(1)	(2)	(3)	p	P	$p^2 : P$
1	−8″456	−3″457	+11″913	21	63	7.0
2	+1.500	−1.500	—	5	10	2.5
3	—	−5.700	+5.750	6	12	3.0
(lx)	−6″956	−10″707	+17″633		85	
Q	26	32	27	=	85	
	p	p'	p''			
p	9.5	9.5	7.0	=	26	
p'		12.5	10.0	=	32	
p''			10.0	=	27	

$$(ll) = 22.64$$

$$\log N = 0.4114\ ,\quad \log N' = 0.5663\ ,\quad \log N'' = 0.4337$$

St. (3).

Nr.	(1)	(2)	(3)	p	P	$p^2 : P$
1	−1″250	—	+1″250	15	30	7.5
2	+19.374	−19″374	—	21	42	10.5
3	+7.750	−5.750	−2.000	15	45	5.0
4	—	−7.375	+7.375	7	14	3.5
(lx)	+25″874	−32″499	+6″625		131	
Q	51	43	37	=	131	
	p	p'	p''			
p	23.0	15.5	12.5	=	51	
p'		19.0	8.5	=	43	
p''			16.0	=	37	

$$(ll) = 57.56$$

$$\log N = 0.6789\ ,\quad \log N' = 0.5114\ ,\quad \log N'' = 0.4180$$

St. (4).

Nr.	(1)	(2)	(3)	p	P	$p^2 : P$
1	+9″083	−29″168	+20″085	22	66	7.333
2	+0.750	−0.750	—	4	8	2.0
3	—	−1.000	+1.000	2	4	1.0
4	−7.500	—	+7.500	4	8	2.0
(lx)	+2″333	−30″918	+28″585		86	
Q	30	28	28.	=	86	
	p	p'	p''			
p	11.333	9.333	9.333	=	30	
p'		10.333	8.333	=	28	
p''			10.333	=	28	

$$(ll) = 90.18$$

$$\log N = 0.5096\ ,\quad \log N' = 0.4604\ ,\quad \log N'' = 0.4604$$

38.

Nach diesen Vorbereitungen, die jedes rationelle Verfahren erfordert, soll das Beispiel den vorhergehenden Entwickelungen gemäss durchgeführt werden. Da die Bedingungsgleichung (*V*), durch welche einem der in unserm Viereck vorkommenden Winkel ein im Voraus bestimmter Werth gegeben wird, sich auf die beiden ersten Richtungen der ersten Station bezieht, und keine anderen Bedingungsgleichungen dieser Gattung vorkommen, so sind es nur die Grössen, die sich auf diese Richtungen beziehen, die ein verändertes Verfahren erfordern. Die vorstehenden sich auf die

St. (1)

beziehenden Grössen geben, ohne auf die genannte Bedingungsgleichung Rücksicht zu nehmen, durch das allgemeine Verfahren, welches ich in der oben angezogenen Abhandlung entwickelt habe, die folgenden Stationsgleichungen

$$22.251\ w(1) = -\ 25''584$$
$$88.967\ w(2) = +\ 28.417$$
$$26.906\ w(3) = -\ 2.833$$

aber zufolge des Art. 13 dürfen die beiden ersten dieser nicht einzeln für sich angewandt werden, sondern es kommt blos die Summe derselben in Betracht, in welcher $w(1)$ in $w(2)$ zu verwandeln ist. Unsere Stationsgleichungen sind also jetzt

$$111.218\ w(2) = +\ 2''833$$
$$26.906\ w(3) = -\ 2.833$$

und diese geben

$$w(2) = +\ 0''025$$
$$w(3) = -\ 0.105\ ,\ (ll,2) = 39.59$$

Addirt man diese zu den im Art. 36 gegebenen vorläufigen Werthen, so erhält man

$$y(2) = 55^0\ 59'\ 19''192$$
$$y(3) = 82\ 23\ 13.864$$

welchen ich den nach der Regel des Art. 16 berechneten Werth von

$$y(1) = 359^0\ 59'\ 27''394$$

hinzufüge, welcher zur Berechnung von $F(I)$, etc. mit zu verwenden ist.

Ich mache auf eine kleine Abweichung von der in der allgemeinen Ableitung angewandten Bezeichnung aufmerksam, die ich in den An-

wendungen immer gebraucht habe, weil sie mir bequemer zu sein scheint. Die im Art. 36 mit angehängter Stationsnummer für die vorläufigen Werthe der Richtungen angewandte Bezeichnung (1), (2), etc. ist mit der X, X', etc. der allgemeinen Ableitung übereinstimmend, und die $w(1)$, $w(2)$, etc. sind die dortigen y, y', etc. Es folgt hieraus, dass die Aggregate $(1)+w(1)$, $(2)+w(2)$, etc., die $y(1)$, $y(2)$, etc. genannt worden sind, die Aggregate bezeichnen, die dort $X+y$, $X'+y'$, etc. genannt wurden. Zur Ermittelung der Grössen F, G, etc., oder wie sie hier genannt werden sollen, $F(I)$, $F(II)$, etc. sind also die $y(1)$, $y(2)$, etc. in die Bedingungsgleichungen zu substituiren.

39.

Die Behandlung der übrigen Stationen ist nun dieselbe wie im allgemeinen Falle. Auf der

St. (2)

werden die Stationsgleichungen

$$\begin{aligned} 23.150\ w(1) &= -\ 6''956 \\ 33.07\ \ w(2) &= -\ 10.707 \\ 24.368\ w(3) &= +\ 17.633 \end{aligned}$$

und hieraus folgen

$$\begin{aligned} w(1) &= -\ 0''300 \\ w(2) &= -\ 0.324 \\ w(3) &= +\ 0.725\ ,\ (ll,3) = 4.28 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} y(1) &= 359^0\ 59'\ 59''553 \\ y(2) &=\ \ 51\ \ 22\ \ 36.676 \\ y(3) &=\ \ 93\ \ 55\ \ 18.094 \end{aligned}$$

St. (3)

$$\begin{aligned} 50.79\ \ w(1) &= +\ 25''874 \\ 34.54\ \ w(2) &= -\ 32.499 \\ 27.855\ w(3) &=\ \ +\ 6.625 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w(1) &= +\ 0''509 \\ w(2) &= -\ 0.941 \\ w(3) &= +\ 0.238\ ,\ (ll,3) = 12.21 \end{aligned}$$

$y(1) = 359^{0}\ 59'\ 44''478$
$y(2) = \ 55\ \ 3\ 19.059$
$y(3) = 137\ 16\ \ 4.014$

St. (4)

$29.122\ w(1) = + 2''333$
$26.00\ \ w(2) = - 30.918$
$26.00\ \ w(3) = + 28.585$

$w(1) = + 0''080$
$w(2) = - 1.190$
$w(3) = + 1.100\ ,\ (ll,3) = 21.77$

$y(1) = 161^{0}\ \ 4'\ 40''080$
$y(2) = 177\ 24\ 30.126$
$y(3) = 207\ 29\ 23.100$

womit der erste Theil der Auflösung ausgeführt ist.

40.

Zum zweiten Theile übergehend, ergeben sich zuerst durch die Substitution der eben erhaltenen Werthe der $y(r)$, in die vier ersten Bedingungsgleichungen des Art. 36

$$F(I) = - 0''402\ ,\ F(II) = - 0''390$$
$$F(III) = - 2.483\ ,\ F(IV) = + 3.046$$

wobei ich bemerke, dass die Bedingungsgleichung (IV) mit der Zahl 50 dividirt worden ist. Berechnet man nun die Differentialquotienten der Bedingungsgleichungen, ohne auf die Gleichung (V) Rücksicht zu nehmen, so ergeben sich diejenigen derselben, welche der Station (1) angehören, wie folgt,

r	s	$q(r,I)$	$q(r,II)$	$q(r,III)$	$q(r,IV)$
1	1	−1	—	−1	+0.0562
2		—	—	+1	−0.8484
3		+1	—	—	+0.7922

Aber zufolge des Art. 15 dürfen diese nicht so angewandt werden, sondern man muss die Summe der zu den Richtungen 1 und 2 gehörigen Differentialquotienten der ferneren Rechnung unterwerfen. Nimmt man diese Summen, und fügt die Differentialquotienten der übrigen Stationen hinzu, die unverändert bleiben, so ergiebt sich die folgende Tafel,

r	s	$q(r,I)$	$q(r,II)$	$q(r,III)$	log $q(r,IV)$
2	1	−1	—	—	9.8988n
3		+1	—	—	9.8988
1	2	—	−1	−1	9.5271
2		−1	+1	—	9.9006n
3		+1	—	+1	9.6616
1	3	−1	—	—	—
2		+1	−1	—	—
3		—	+1	—	—
1	4	—	−1	—	0.0155
2		—	—	−1	0.1575n
3		—	+1	+1	9.6029

aus deren Angaben die Werthe der $f(r,I)$, $f(r,II)$, etc. nach dem allgemeinen Verfahren, welches ich gegeben habe, folgen. Nemlich

r	s	log $f(r,I)$	log $f(r,II)$	log $f(r,III)$	log $f(r,IV)$
2	1	7.9538n	—	—	7.8526n
3		8.5702	—	—	8.4690
1	2	—	8.6354n	8.6354n	8.4625
2		8.4805n	8.4805	—	8.3814n
3		8.6131	—	8.6131	8.2747
1	3	8.2943n	—	—	—
2		8.4618	8.4618n	—	—
3		—	8.5552	—	—
1	4	—	8.5359n	—	8.5514
2		—	—	8.5851n	8.7426n
3		—	8.5851	8.5851	8.4880

woraus wieder nach meinem allgemeinen Verfahren die folgenden Werthe der Coëfficienten der Endgleichungen hervorgehen.

	I	II	III	IV	$F(\ )$
I	0.16608	−0.05920	+0.04103	+0.07944	−0″402
II		0.21112	+0.08166	−0.05877	−0.390
III			0.16116	+0.07499	−2.483
IV				0.18414	+3.046

41.

Durch die Auflösung dieser Endgleichungen ergeben sich die Unbekannten derselben

$$(I) = -0.82$$
$$(II) = +33.27$$
$$(III) = -55.36$$
$$(IV) = +50.06\ ,\ R_4 = 277.3$$

und die Logarithmen der dabei vorkommenden Hülfsgrössen, die zur Berechnung der Gewichte dienen,

$$(2)_1 = (9.5520)\ ,\ (3)_1 = (9.3928n)\ ,\ (4)_1 = (9.6797n)$$
$$(3)_2 = (9.7047n)\ ,\ (4)_2 = (9.2049)$$
$$(4)_3 = (9.8406n)$$
$$(I,I) = (9.2203)\ ,\ (II,II,1) = (9.2788)\ ,\ (III,III,2) = (9.0095)$$
$$(IV,IV,3) = (8.9648)$$

woraus man mit Zuziehung der obigen Werthe der $f(r,I)$, $f(r,II)$, etc. die folgenden Werthe der $z(r)_s$ erhält,

$$z(1)_2 = +\ 1''682$$
$$z(1)_1 = -\ 0''350\ ,\ z(2)_2 = -\ 0.173$$
$$z(3)_1 = +\ 1.444\ ,\ z(3)_2 = -\ 1.363$$

$$z(1)_3 = +\ 0''016\ ,\ z(1)_4 = +\ 0''639$$
$$z(2)_3 = -\ 0.987\ ,\ z(2)_4 = -\ 0.637$$
$$z(3)_3 = +\ 1.194\ ,\ z(3)_4 = -\ 0.078$$

Zieht man diese von den in den Artt. 38 u. 39 erhaltenen Werthen der $y(r)_s$ ab, so ergeben sich die folgenden wahrscheinlichsten Werthe der Richtungen,

$$x(1)_2 = 359^0\ 59'\ 57''871$$
$$x(2)_1 = 55^0\ 59'\ 19''542\ ,\ x(2)_2 = 51\ 22\ 36.849$$
$$x(3)_1 = 82\ 23\ 12.420\ ,\ x(2)_3 = 93\ 55\ 19.547$$

$$x(1)_3 = 359^0\ 59'\ 44''462\ ,\ x(1)_4 = 161^0\ 4'\ 39''441$$
$$x(2)_3 = 55\ 3\ 20.046\ ,\ x(2)_4 = 177\ 24\ 30.763$$
$$x(3)_3 = 137\ 16\ 2.820\ ,\ x(3)_4 = 207\ 29\ 23.178$$

Die Richtung $x(1)_1$ wird durch die Bedingungsgleichung (V) aus dem vorstehenden Werthe von $x(2)_1$

$$x(1)_1 = 359^0\ 59'\ 27''744$$

gefunden.

42.

Für die Summe W der mit ihren Gewichten multiplicirten Quadrate der übrig bleibenden Fehler erhalten wir

$$(ll,2)_1 = 39.59$$
$$(ll,3)_2 = 4.28$$
$$(ll,3)_3 = 12.21$$
$$(ll,3)_4 = 21.77$$
$$\Sigma(ll,n) = 77.8$$
$$R_1 = 277.3$$
$$W = 355.1$$

womit die Auflösung durchgeführt ist.

43.

Berechnen wir dieses Beispiel auch nach dem im Art. 18 u. f. entwickelten Verfahren, und nehmen zu dem Ende an, dass statt des im Art. 39 angegebenen vorläufigen Werthes der Richtung $(2)_1$, bei der Berechnung der Stationstäfelchen der folgende

$$(2)_1 = 55^0\ 59'\ 20''667$$

zu Grunde gelegt worden wäre. Statt des im Art. 37 gegebenen zweiten Stationstäfelchens der Station (1), ergiebt sich demgemäss für die jetzt auszuführenden Rechnungen das folgende

St. (1).

Nr.	(1)	(2)	(3)	p	P	$p^2:P$
1	—	−13″750	+13″750			
2	+0″750	−0.750	—			
3	−2.000	—	+2.000			
4	−2.834	−4.583	+7.417			
(lx)	−4″084	−19″083	+23″167			
Q						

Die Abtheilungen, die ich hier leer gelassen habe, bleiben dieselben wie im Art. 37, so wie die dort gegebenen Werthe der (pp), (pp'), etc. unverändert bleiben. Nur (ll) bekommt einen anderen Werth, und wird jetzt

$$(ll) = 25.96$$

44.

Der im vor. Art. angenommene Werth von $(2)_1$ giebt in Verbindung mit dem des Art. 36 für $(1)_1$ und der Bedingungsgleichung (V) in der Gleichung

$$x = x' + a$$

für a den Werth

$$a = + 1''500$$

der den folgenden Rechnungen zu Grunde zu legen ist. Zufolge des Art. 21 sind ferner jetzt die Stationsgleichungen, da im Art. 38 der Coefficient $(Bc) = 0$ gemacht worden ist,

$$(BB)\ w(2) = (lx) + (lx') + [(pp) + (pp') - Q]a$$
$$(cc)\ w(3) = (lx'') + (pp'')a$$

und aus dem Art. 38 ist unverändert zu entnehmen

$$(BB) = 111.218\ ,\ (cc) = 26.906$$

Es werden ferner

$$(pp) + (pp') - Q = 15.333 + 14.333 - 34.0 = - 4.333$$
$$[(pp) + (pp') - Q]a = - 6.500$$
$$(pp'')a = 4.333a = + 6.500$$

woraus mit den (lx), (lx'), (lx'') des vor. Art. die Gleichungen

$$111.218\ w(2) = - 29''667$$
$$26.906\ w(3) = + 29.667$$

hervorgehen, die

$$w(2) = - 0''267$$
$$w(3) = + 1.102\ ,\ (ll,2) = (LL) - 40.64$$

geben. Addirt man diese zu den vorläufig angenommenen Werthen der Richtungen $(2)_1$ und $(3)_1$, so erhält man für die Station (1)

$$y(2) = 55^0\ 59'\ 20''400$$
$$y(3) = 82\ 23\ 15.071$$

woraus durch Zuziehung der Bedingungsgleichung (V)

$$y(1) = 359^0\ 59'\ 28''602$$

folgt. Da die Unterschiede dieser Richtungen, oder die Winkel, die daraus hervorgehen, mit denen des Art. 38 identisch sind, so erkennt man, dass die beiden angewandten Verfahrungsarten bis dahin wenigstens übereinstimmende Resultate geben.

Für die Summe der Fehlerquadrate, in so weit die Ausgleichung auf der Station dazu einen Beitrag liefert, haben wir zufolge des Art. 23 zuerst zu berechnen,

$$[Q - (pp)]a = 18.667a = 28.0$$
$$\{[Q - (pp)]a - 2(lx)\}a = (28.0 + 8.168)a = 54.25$$

und bekommen also durch Zuziehung des Werthes von (ll) des vor. Art.

$$(LL) = 80.21$$

Nun wurde aber oben gefunden

$$(ll,2) = (LL) - 40.64$$

und folglich wird

$$(ll,2) = 39.57$$

auch mit dem Art. 38 übereinstimmend. Da somit die Ausgleichung auf der Station vollständig mit dem vorher gehenden Verfahren übereinstimmt, und der zweite Theil der Auflösung in beiden Verfahren derselbe ist, so müssen auch die Endresultate mit einander übereinstimmen, und es ist nicht nöthig die Rechnungen nach dem gegenwärtigen Verfahren fortzusetzen.

45.

Um zu zeigen, dass dieselben Resultate auch hervorgehen, wenn die allgemeine Auflösung angewandt, und folglich die Bedingungsgleichung (V) den übrigen vier Bedingungsgleichungen angereiht wird, soll dieses Beispiel auch nach diesem Verfahren behandelt werden.

Die Stationsgleichungen des Art. 38 für die Station (1) müssen nun, gleichwie die der anderen Stationen, einzeln angewandt werden, und es sind folglich jetzt die drei Gleichungen

$$22.251\ w(1) = -\ 25''584$$
$$88.967\ w(2) = +\ 28.417$$
$$26.906\ w(3) = -\ 2.833$$

vorzunehmen, deren Auflösung

$$w(1) = -\ 1''150$$
$$w(2) = +\ 0.319$$
$$w(3) = -\ 0.105\ ,\ (ll,3) = 1.17$$

giebt, aus welchen man

$$y(1) = 359^0\ 59'\ 26''219$$
$$y(2) = 55\ 59\ 19.486$$
$$y(3) = 82\ 23\ 13.864$$

erhält. Man sieht, dass die aus diesen Richtungen hervorgehenden Winkel von denen, die die beiden vorher gehenden Verfahren gegeben haben, wesentlich verschieden sind.

Die $y(r)_0$ der übrigen Stationen bleiben unverändert dieselben, die im Art. 39 erhalten wurden.

46.

Die Substitution der jetzigen Werthe der $y(r)_1$ in alle Bedingungsgleichungen giebt

$$F(I) = +\ 0''773\ ,\ F(II) = -\ 0''390\ ,\ F(III) = -\ 1''013$$
$$F(IV) = +\ 2.730\ ,\ F(V) = +\ 1.469$$

die auch, mit Ausnahme von $F(II)$, wesentlich anders sind wie im vorher gehenden Verfahren.

Die Differentialquotienten der Bedingungsgleichungen in Bezug auf die Station (1) sind nun unverändert beizubehalten, und daher dieselben, die das erste Täfelchen des Art. 38 angiebt, nur kommen diejenigen hinzu, die der Bedingungsgleichung (V) angehören. Es wird also jetzt

r	s	$q(r,I)$	$q(r,II)$	$q(r,III)$	$\log q(r,IV)$	$q(r,V)$
1	1	−1	—	−1	8.7497	−1
2		—	—	+1	9.9286n	+1
3		+1	—	—	9.8988	—

woraus

r	s	$\log f(r,I)$	$\log f(r,II)$	$\log f(r,III)$	$\log f(r,IV)$	$\log f(r,V)$
1	1	8.6527n	—	8.6527n	7.4024	8.6527n
2		—	—	8.0507	7.9793n	8.0507
3		8.5702	—	—	8.4690	—

folgt. Mit Anwendung dieser, so wie der übrigen aus dem Art. 40 unverändert zu entnehmenden Grössen ergeben sich die folgenden Coefficienten der Endgleichungen,

	I	II	III	IV	V	$F(\ )$
I	0.20204	−0.05920	+0.08598	+0.06979	+0.04495	+0″773
II		0.21112	+0.08166	−0.05877	0	−0.390
III			0.21735	+0.06292	+0.05619	−1.013
IV				0.18673	−0.01207	+2.730
V					0.05619	+1.469

die auch grössten Theils von denen des vorhergehenden Verfahrens wesentlich verschieden sind.

47.

Die Auflösung dieser Endgleichungen giebt für die Unbekannten derselben die folgenden Werthe

$$(I) = -0.83$$
$$(II) = +33.25$$
$$(III) = -55.32$$
$$(IV) = +50.03$$
$$(V) = +92.88 \ , \ R_5 = 315.4$$

und für die Hülfsgrössen

$$(2)_1 = (9.4668) \ , \ (3)_1 = (9.6289n) \ , \ (4)_1 = (9.5383n) \ , \ (5)_1 = (9.3472n)$$
$$(3)_2 = (9.7415n) \ , \ (4)_2 = (9.2961) \ , \ (5)_2 = (8.8322n)$$
$$(4)_3 = (9.6495n) \ , \ (5)_3 = (9.3884n)$$
$$(5)_4 = (9.4664)$$

$$(I,I) = (9.3055) \ , \ (II,II,1) = (9.2873) \ , \ (III,III,2) = (9.0858)$$
$$(IV,IV,3) = (9.1166) \ , \ (V,V,4) = (8.4282)$$

Hier haben wir zuerst das merkwürdige Resultat, dass die Werthe der (I), (II), (III), (IV) dieselben geworden sind, die das vorhergehende Verfahren gegeben hat. Denn die kleinen Unterschiede, die die Vergleichung der vorstehenden mit denen des Art. 41 in der letzten Stelle zeigt, sind den Fehlern der letzten Stelle der angewandten Logarithmen (von vier Decimalen) zuzuschreiben, und würden verschwinden, wenn man die Rechnung mit Logarithmen von grösserer Ausdehnung wiederholen, und zugleich die bekannten Glieder der Endgleichungen mit mehr Decimalen berechnen wollte.

Aus dieser Gleichheit der Werthe der vier ersten Unbekannten folgt, dass die wahrscheinlichsten Werthe der Richtungen der Stationen (2), (3), (4) dieselben werden müssen, die das vorhergehende Verfahren gegeben hat, und es sind daher nur die Richtungen der Station (1) näher zu untersuchen. Zu dem Ende geben die vorstehenden Data

$$z(1)_1 = -1''525$$
$$z(2)_1 = -0.056$$
$$z(3)_1 = +1.442$$

womit die wahrscheinlichsten Werthe

$$x(1)_1 = 359^\circ\ 59'\ 27''744$$
$$x(2)_1 = 55\ 59\ 19.542$$
$$x(3)_1 = 82\ 23\ 12.422$$

erhalten werden. Die Vergleichung dieser mit denen des Art. 41, die aus dem vorhergehenden Verfahren hervor gegangen sind, giebt nur

einen Unterschied von 0″002 in der Richtung $x(3)_1$, welcher auch den Fehlern der letzten Stelle der angewandten Logarithmen zuzuschreiben ist.

48.

Die Berechnung von W steht jetzt so,

$$\begin{aligned}(ll,3)_1 &= 1.17\\ (ll,3)_2 &= 4.28\\ (ll,3)_3 &= 12.21\\ (ll,3)_4 &= 21.77\\ \hline \Sigma(ll,n) &= 39.4\\ R_5 &= 315.4\\ \hline W &= 354.8\end{aligned}$$

von dem des Art. 42 nur um 0.3 verschieden, welcher Unterschied der eben angeführten Quelle auch zuzuschreiben ist. Alle jetzt erhaltenen Resultate stimmen also mit den durch die beiden vorhergehenden Verfahrungsarten erhaltenen überein.

Ich mache darauf aufmerksam, dass sich hier ein Beispiel der Behauptung vorfindet, die ich im Art. 6 des Supplements 2 der »Fortgesetzte geodätische Untersuchungen u. s. w.« betitelten Abhandlung aufgestellt habe, nemlich, dass die (ll,n) und die R_q unbestimmte Grössen sind, die sich bei einer Aenderung des angewandten Verfahrens ändern können, dass aber alle Aenderungen, welchen sie unterliegen, immer so beschaffen sind, dass in jedem einzelnen Falle derselbe Werth von W daraus hervorgeht. Hier fanden sich beim zuerst angewandten Verfahren

$$(ll,2)_1 = 39.59\ ,\ R_4 = 277.3$$

und beim zunächst vorhergehenden Verfahren

$$(ll,3)_1 = 1.17\ ,\ R_5 = 315.4$$

aber ungeachtet dieser Verschiedenheiten sind die Summen dieser Grössen bis auf einen kleinen, erklärbaren Unterschied einander gleich, so dass die Werthe von W, die daraus hervorgehen, auch einander gleich werden.

49.

Um auch zu zeigen, dass die oben entwickelten Ausdrücke der Gewichte übereinstimmende Resultate geben, welche der eben erklärten Verfahrungsarten man auch anwenden möge, will ich für unser Beispiel Eins derselben berechnen.

Ich wähle dazu das Gewicht des zwischen den Richtungen $x(3)_1$ und $x(2)_1$ eingeschlossenen Winkels. Da das Resultat der obigen Entwickelungen zeigte, dass die Berechnung bei den verschiedenen, betrachteten Verfahrungsarten dasselbe ist, wenn man bei dem ersten und zweiten derselben nur die betreffenden k addirt, so kann in jedem Falle nach den Ausdrücken verfahren werden, die ich im § 6 der oft angezogenen Abhandlung gegeben habe.

Die aufzustellende Function ist nun

$$\Omega = x(3)_1 - x(2)_1$$

folglich

$$k(2)_1 = -1 \ , \ k(3)_1 = +1$$

und bei Anwendung des ersten Verfahrens folgt hieraus

$$(M,2)_1 = -1 \ , \ (M,3)_1 = +1$$

und alle übrigen Grössen dieser Gattung sind Null. Die Addition $k(1)_1 + k(2)_1$ fällt weg, da hier $k(1)_1 = 0$ ist. Durch Hülfe der im Art. 38 gegebenen Coefficienten von $w(2)$ und $w(3)$ der Stationsgleichungen, und zwar

$$(2,2,1) = 111.218 \ , \ (3,3,2) = 26.906$$

und durch die Ausdrücke des angezogenen § 6 ergeben sich

$$Q(M,2)_1 = (7.9539n) \ , \ Q(M,3)_1 = (8.5701)$$

und hieraus für R

$$\begin{array}{r} 0.00899 \\ 0.03716 \\ \hline R = 0.04615 \end{array}$$

Man erhält ferner durch die Ausdrücke des angezogenen § 6

$$(I,M) = +0.04615 \ , \ (II,M) = 0$$
$$(III,M) = 0 \ , \ (IV,M) = +0.03656$$

woraus

$$(II,M,1) = + 0.01645$$
$$(III,M,2) = - 0.01974$$
$$(IV,M,3) = + 0.03080$$

folgen, und für S sich die folgenden einzelnen Theile ergeben,

$$\begin{array}{r} 0.01283 \\ 0.00142 \\ 0.00381 \\ 0.01029 \\ \hline S = 0.02835 \end{array}$$

Aus R und S erhält man das Gewicht

$$P = 56.2$$

Die Werthe der $q(r,I)$, etc., die bei dieser Berechnung angewandt werden mussten, sind selbstverständlich die, welche das zweite Täfelchen des Art. 40 giebt.

50.

Um dasselbe Gewicht nach dem allgemeinen Verfahren zu berechnen, ist wie im vor. Art.

$$\Omega = x(3)_1 - x(2)_1$$

zu setzen, woraus wieder

$$k(2)_1 = - 1 \ , \ k(3)_1 = + 1$$
$$(M,2)_1 = - 1 \ , \ (M,3)_1 = + 1$$

folgen. Die anzuwendenden Divisoren, um die $Q(M,2)_1$ und $Q(M,3)_1$ zu erhalten, sind aber jetzt aus den Stationsgleichungen des Art. 45 zu entnehmen, nemlich

$$(2,2,1) = 88.967 \ , \ (3,3,2) = 26.906$$

womit sich

$$Q(M,2)_1 = (8.0508n) \ , \ Q(M,3)_1 = (8.5701)$$

letzterer wie vorher, ergeben. Man erhält zuerst hieraus für R

$$\begin{array}{r} 0.01124 \\ 0.03716 \\ \hline R = 0.04840 \end{array}$$

Es ergeben sich ferner

$$(I,M) = 0.03716 \ , \ (II,M) = 0 \ , \ (III,M) = - 0,1124$$
$$(IV,M) = + 0.03892 \ , \ (V,M) = - 0.1124$$

und hieraus

$$(II,M,1) = + 0.01089$$
$$(III,M,2) = - 0.03305$$
$$(IV,M,3) = + 0.04304$$
$$(V,M,4) = + 0.00043$$

die alle von denen des vor. Art. bedeutend verschieden sind. Für S erhalten wir jetzt die einzelnen Glieder

$$0.00684$$
$$0.00061$$
$$0.00897$$
$$0.01416$$
$$0.00001$$
$$S = 0{,}03059$$

Ungeachtet der grossen Verschiedenheit der einzelnen Glieder, erhalten wir aus den hier gefundenen Werthen von R und S wieder

$$P = 56.2$$

mit dem Resultat des vor. Art. übereinstimmend.

Die Werthe der $q(r,I)$, die hier angewandt werden mussten, sind die, welche das bez. Täfelchen des Art. 33 enthält.

51.

Bei dem hier in Rede stehenden Falle kann es sich ereignen, dass er auf eine Weise vorkommt, die von der vorhergehenden Darstellung etwas verschieden ist. Es wurde angenommen, dass beide Schenkel des vorher bestimmten Winkels Stücke des auszugleichenden Dreiecksnetzes sind, statt dessen kann aber auch der Fall eintreten, dass nur der Eine dieser beiden Schenkel ein Stück des auszugleichenden Dreiecksnetzes bildet, und der andere in diesem Dreiecksnetze gar nicht eintritt. Auch kann sich ereignen, dass beide Schenkel nicht eintreten, und blos in der Ausgleichung auf der betr. Station in Betracht kommen.

Diese beiden Fälle bilden durchaus keine Ausnahmen von den hier entwickelten Regeln, sondern sind nur specielle Fälle des entwickelten allgemeinen Falles, in welchen die sich auf den letzteren beziehenden Regeln die Vereinfachung erleiden, dass keine Coefficienten der Bedingungsgleichungen vor ihrer Anwendung zu addiren sind. Denn wenn der eine Schenkel, oder bez. beide, keine Stücke des auszugleichenden Dreiecks-

netzes sind, so können deren Richtungen in keiner der Bedingungsgleichungen, die dieses Netz darbietet, vorkommen.

52.

Um auch wenigstens den einen dieser beiden Fälle durch ein Beispiel zu erläutern will ich annehmen, dass ausser den drei Richtungen, die auf der Station (4) des vorhergehenden Beispiels vorkommen, noch eine vierte Richtung eingeschnitten worden sei, die mit der dritten, in Folge vorangegangener, anderweitiger Ausgleichungen einen bestimmten Winkel bilden soll. Diese neue Bedingungsgleichung soll die folgende sein,

$$x(4)_4 - x(3)_4 = 152^0\ 30'\ 38''000$$

und nachdem dieser Werth den vorläufigen Annahmen der Werthe der Richtungen zu Grunde gelegt worden ist, habe man das folgende zweite Stationstäfelchen erhalten.

St. (4).

Nr.	(1)	(2)	(3)	(4)	p	P	$p^2 : P$
1	+ 9″083	−29″168	+20″085	—	22	66	7.333
2	+ 0.750	− 0.750	—	—	4	8	2.0
3	—	− 1.750	+ 0.250	+ 1″500	2	6	0.667
4	−10.200	—	+ 4.800	+ 5.400	4	12	1.333
5	—	+20.000	—	−20.000	20	40	10.0
6	—	—	−20.000	+20.000	20	40	10.0
(lx)	− 0″367	−11″668	+ 5″135	+ 6″900		172	
Q	30	48	48	46	=	172	

	p	p′	p″	p‴		
p	10.677	9.333	8.667	1.333	=	30
p′		20.0	8.0	10.667	=	48
p″			19.333	12.0	=	48
p‴				22.0	=	46

$$(ll) = 142.80$$

$$\log N = 0.5024\ ,\ \log N' = 0.4676$$

$$\log N'' = 0.4355\ ,\ \log N''' = 9.6225$$

53

Ohne Rücksicht auf die Bedingungsgleichung erhalten nun die Coefficienten der Stationsgleichungen der Station (4) die folgenden Werthe

	1	2	3	4
1)	29.444 ,	0 ,	0 ,	0
2)		36.615 ,	0 ,	—9.4359
3)			36.095 ,	—10.8572
4)				24.1758

und da jetzt die dritte und vierte Stationsgleichung addirt, und der Index 4 in 3 verwandelt werden müssen, so werden die aufzulösenden Stationsgleichungen,

$$29.444\ w(1) = -\ 0''367$$
$$36.615\ w(2) - 9.4359\ w(3) = -\ 11.668$$
$$-\ 9.4359\ w(3) + 38.5546\ w(3) = +\ 12.035$$

durch welche man

$$\log \beta'' = 9.4111\ ,\quad w(1) = -\ 0''016$$
$$w(2) = -\ 0.254$$
$$w(3) = +\ 0.250\ ,\quad (ll,3) = 136.83$$

und

$$y(1) = 161^\circ\ 4'\ 39''984$$
$$y(2) = 177\ 24\ 31.062$$
$$y(3) = 207\ 29\ 22.250$$

erhält, während für die übrigen Stationen diese Grössen die Werthe beibehalten, die in den Artt. 38 und 39 angegeben sind.

54.

Die Substitution in die vier ersten Bedingungsgleichungen des Art. 36 giebt jetzt

$$F(I) = -\ 0''402\ ,\quad F(II) = -\ 1''144$$
$$F(III) = -\ 4.269\ ,\quad F(IV) = +\ 1.260$$

Das Täfelchen für die $q(r,I)$, etc. des Art. 40 bleibt unverändert, während in dem für die $f(r,I)$ etc., desselben Art. nur die drei ersten Stationen unverändert bleiben, und für die vierte Station das folgende entsteht.

r	s	$\log \eta(r,I)$	$\log \eta(r,II)$	$\log \eta(r,III)$	$\log \eta(r,IV)$
1	4	—	0. n	—	0.0155
2		—	—	0. n	0.1575n
3		—	0.	9.8706	8.4833
r	s	$\log f(r,I)$	$\log f(r,II)$	$\log f(r,III)$	$\log f(r,IV)$
1	4	—	8.5311n	—	8.5466
2		—	7.8534	8.3426n	8.5914n
3		—	8.4423	8.3129	6.9256

55.

Die Coefficienten der Endgleichungen werden hiemit

	I	*II*	*III*	*IV*	*F*( )
I	0.16608	−0.05920	+0.04103	+0.07944	−0.402
II		0.19996	+0.06374	−0.07296	−1.144
III			0.12678	+0.04415	−4.269
IV				0.15453	+1.260

und geben durch ihre Auflösung

$$(I) = +\ 6.19$$
$$(II) = +30.14$$
$$(III) = -63.87$$
$$(IV) = +37.45\ ,\ R_4 = 282.9$$

$$z(1)_2 = +\ 2''001$$
$$z(2)_1 = -\ 0''323\ ,\ z(2)_2 = -\ 0.176$$
$$z(3)_1 = +\ 1.333\ ,\ z(3)_2 = -\ 1.662$$
$$z(1)_3 = -\ 0''122\ ,\ z(1)_4 = +\ 0''294$$
$$z(2)_3 = -\ 0.694\ ,\ z(2)_4 = +\ 0.160$$
$$z(3)_3 = +\ 1.082\ ,\ z(3)_4 = -\ 0.446$$

$$r(1)_1 = 359^0\ 59'\ 27''717\ ,\ r(1)_2 = 359^0\ 59'\ 57''552$$
$$r(2)_1 = 55\ 59\ 19.515\ ,\ r(2)_2 = 51\ 22\ 36.852$$
$$r(3)_1 = 82\ 23\ 12.531\ ,\ r(3)_2 = 93\ 55\ 19.756$$
$$r(1)_3 = 359^0\ 59'\ 44''600\ ,\ r(1)_4 = 161^0\ 4'\ 39''690$$
$$r(2)_3 = 55\ 3\ 19.573\ ,\ r(2)_4 = 177\ 24\ 30.902$$
$$r(3)_3 = 137\ 16\ 2.932\ ,\ r(3)_4 = 207\ 29\ 22.696$$
$$r(4)_4 = 360\ 0\ 0.696$$

Man sieht aus diesen Zahlenwerthen, dass wenn wir die $z(r)_s$, die den Richtungen der vorbestimmten Winkel angehören, hier $z(2)_1$ und $z(3)_4$, hätten im Voraus ohne Weiteres gleich Null setzen wollen, wie anderswo geschehen ist, die Resultate wesentlich unrichtig geworden wären.

56.

Die Berechnung der Summe W der Fehlerquadrate steht jetzt so,

$$(ll,2)_1 = 39.59 \ldots . \text{Art. } 38$$
$$(ll,3)_2 = 4.28 \ldots . \text{Art. } 39$$
$$(ll,3)_3 = 12.21 \ldots . \text{Art. } 39$$
$$(ll,3)_4 = 136.83 \ldots . \text{Art. } 53$$

$$\Sigma(ll,n) = 192.9$$
$$R_4 = 282.9$$
$$W = 475.8$$

57.

Um wieder zu zeigen, dass dieselben Resultate hervorgehen, wenn man die allgemeine Auflösung anwendet, habe ich dieses Beispiel auch danach berechnet, und werde von dieser Rechnung die Hauptmomente angeben. Es sind jetzt auf der vierten Station die ursprünglichen Stationsgleichungen aufzulösen, deren Coefficienten im Art. 53 gegeben wurden. Diese Auflösung giebt

$$\log \gamma'' = 9.4111 \ , \ \log \gamma''' = 9.4782$$
$$w(1) = - 0''013$$
$$w(2) = - 0.243$$
$$w(3) = + 0.231$$
$$w(4) = + 0.294 \ , \ (ll,4) = 136.70$$

und somit

$$y(1) = 161^\circ \ 4' \ 39''987$$
$$y(2) = 177 \ 24 \ 31.073$$
$$y(3) = 207 \ 29 \ 22.231$$
$$y(4) = 360 \ 0 \ 0.294$$

58.

Man bekommt ferner

$$F(I) = + 0''773 \ , \ F(II) = - 1''166 \ , \ F(III) = - 2''829$$
$$F(IV) = + 0.924 \ , \ F(V) = + 1.469 \ , \ F(VI) = + 0.063$$

r	s	$\log \eta(r,I)$	$\log \eta(r,II)$	$\log \eta(r,III)$	$\log \eta(r,IV)$	$\log \eta(r,V$	$\log \eta(r,VI)$
1	4	—	0. n	—	0.0155	—	—
2		—	—	0. n	0.1575n	—	—
3		—	0.	0.	9.6027	—	0. n
4		—	9.4782	8.6340	9.3976n	—	9.8447
r	s	$\log f(r,I)$	$\log f(r,II)$	$\log f(r,III)$	$\log f(r,IV)$	$\log f(r,V)$	$\log f(r,VI)$
1	4	—	8.5310n	—	8.5465	—	—
2		—	7.6226	8.4267n	8.6307n	—	7.9891
3		—	8.5131	8.4533	7.8476	—	8.2127n
4		—	8.2115	7.3673	8.1309n	—	8.5780

während für die erste Station die Täfelchen des Art. 46, und für die zweite und dritte Station wieder die des Art. 40 Geltung haben.

59.

Die Coefficienten der hieraus folgenden Endgleichungen sind

	I	*II*	*III*	*IV*	*V*	*VI*	*F*( )
I	0.20204	−0.05920	+0.08598	+0.06979	+0.04495	0	+0.773
II		0.20485	+0.07159	−0.06675	0	−0.01632	−1.166
III			0.19552	+0.04198	+0.05619	−0.02607	−2.829
IV				0.16491	−0.01207	−0.02056	+0.924
V					0.05619	0	+1.469
VI						0.05417	+0.063

deren Auflösung

$$(I) = +\ 6.16$$
$$(II) = +\ 30.11$$
$$(III) = -\ 63.85$$
$$(IV) = +\ 37.47$$
$$(V) = +\ 93.11$$
$$(VI) = -\ 6.28\ ,\ R_6 = 321.3$$

giebt. Hievon sind die (I), (II), (III), (IV) wieder von denen, die das andere Verfahren gegeben hat, so wenig verschieden, dass sie für die Endresultate der Stationen 2 und 3, auf welche (V) und (VI) nicht einwirken, dieselben Resultate geben müssen, wie vorher. Wir haben daher hier nur die Resultate der Stationen (1) und (4) zu untersuchen. Hiefür bekommen wir

$$z(1)_1 = -\ 1''498\ ,\ z(1)_4 = +\ 0''296$$
$$z(1)_2 = -\ 0\ 029\ ,\ z(2)_4 = +\ 0.170$$
$$z(1)_3 = +\ 1.332\ ,\ z(3)_4 = -\ 0.466$$
$$z(4)_4 = -\ 0.403$$

und hiemit

$$r(1)_1 = 359^\circ\ 59'\ 27''717\ ,\ r(1)_4 = 161^\circ\ 4'\ 39''691$$
$$r(2)_1 = 55\ 59\ 19.512\ ,\ r(2)_4 = 177\ 24\ 30.093$$
$$r(3)_1 = 82\ 23\ 12.532\ ,\ r(3)_4 = 207\ 29\ 22.697$$
$$r(4)_4 = 360\ 0\ 0.697$$

die mit den Resultaten des anderen Verfahrens übereinstimmen.

60.

Für W bekommt man jetzt

$$\left.\begin{aligned}(ll,3)_1 &= 1.17\\ (ll,3)_2 &= 4.28\\ (ll,3)_3 &= 12.21\end{aligned}\right\} \ldots \text{Art. } 48$$

$$(ll,4)_4 = 136.70 \ldots \text{Art. } 57$$

$$\Sigma(ll,n) = 154.4$$

$$R_6 = 321.3$$

$$W = 475.7$$

von dem Resultat des Art. 56 nur um 0.1 verschieden.

61.

Es wird unter den statt findenden Umständen wohl dienlich sein, ein der Wirklichkeit entnommenes, zusammengesetzteres Beispiel zu geben. Es soll dieses aus der Pr. Küstenvermessung entlehnt werden, in welcher der hier behandelte Fall mehrmals vorkommt. Das Hauptdreiecksnetz dieser Vermessung erstreckt sich in der Nähe der Küste der Ostsee von Wildenhof bis Lübeck, und von den Stationen Vogelsang und Kleistberg zweigt sich in der Richtung nach Berlin ein zweites Netz ab.

Auf der Station Vogelsang wurden die Richtungen nach

Anklam . . . . . (4)
Lebbin . . . . . (5)
Sprengelsberg . . . . (6)
Kleistberg. . . . . (7)
Bahn . . . . . (1)
Koboldsberg . . . . . (2)
Luckow . . . . . (3)

eingeschnitten, von welchen die drei ersten ausschliesslich dem Hauptnetz, die vierte beiden Netzen, und die drei letzten ausschliesslich dem Zweignetz angehören. Auf der Station Kleistberg wurden die Richtungen nach

Bahn . . . . . (1)
Stargard . . . . . (*a*)
Vogelsang . . . . . (2)

Sprengelsberg . . . . (3)
Klorberg . . . . . (4)

eingeschnitten, von welchen die erste dem Zweignetz angehört, die zweite eine überzählige Richtung ist, die dritte beiden Netzen, und die beiden letzten dem Hauptnetz ausschliesslich angehören.

Zu mehrerer Einfachheit werde ich im Folgenden die Station Vogelsang mit (1), die Station Kleistberg mit (2), und die auf diesen Stationen eingeschnittenen Richtungen mit den Zahlen bezeichnen, die oben den Namen derselben beigefügt worden sind.

62.

St. (1).

Die durch die Ausgleichung des Hauptnetzes gegebenen Winkel sind (Küstenverm. S. 367)

$$x(5)_1 - x(4)_1 = 45^0\ 23'\ 22''364$$
$$x(6)_1 - x(5)_1 = 47\ 47\ 16.169$$
$$x(7)_1 - x(6)_1 = 52\ 49\ 30.983$$

die in der Ausgleichung des Zweignetzes dieselben Werthe bekommen müssen. Ich habe demzufolge die vorläufigen Werthe aller Richtungen mit Einschluss der Centrirungen wie folgt angenommen,

$$(1) = 219^0\ 31'\ 43''000$$
$$(2) = 250\ 20\ 35.509$$
$$(3) = 270\ 22\ 6.000$$
$$(4) = 0\ 0\ 5.562$$
$$(5) = 45\ 23\ 27.926$$
$$(6) = 93\ 10\ 44.095$$
$$(7) = 146\ 0\ 15.078$$

in welchen, wie man sieht, die vorstehenden Bedingungsgleichungen berücksichtigt worden sind. Durch Zuziehung dieser nebst den Beobachtungen (Küstenverm. S. 147 u. f.) wurden die Stationstäfelchen und die Stationsgleichungen berechnet. Ohne Rücksicht auf die obigen Bedingungen wurden die letzteren wie folgt gefunden,

$$
\begin{array}{rrrrrrrr}
30.8097\,w(4) & & & & & & & = -51''918 \\
9.8334\,w(2) & + 0.2321\,w(4) & - 0.2174\,w(5) & & & 0\,w(6) & - 0.6007\,w(7) & = +24.366 \\
80.7053\,w(3) & + 8.7552\,w(4) & + 16.5223\,w(5) & & & 0\,w(6) & + 20.8387\,w(7) & = +29.508 \\
+0.2321\,w(2) & + 8.7552\,w(3) & + 35.1916\,w(4) & - 6.3003\,w(5) & - 5.8333\,w(6) & - 1.8980\,w(7) & & = +18.384 \\
-0.2174\,w(2) & + 16.5223\,w(3) & - 6.3003\,w(4) & + 79.2003\,w(5) & - 11.8331\,w(6) & - 8.3867\,w(7) & & = - 2.374 \\
0\,w(2) & 0\,w(3) & - 5.8333\,w(4) & - 11.8333\,w(5) & + 28.1667\,w(6) & - 10.5000\,w(7) & & = - 1.856 \\
-0.6007\,w(2) & + 20.8387\,w(3) & - 1.8980\,w(4) & - 8.3867\,w(5) & - 10.5000\,w(6) & + 77.4833\,w(7) & & = -16.574
\end{array}
$$

Da nun hier die Richtungen (4), (5), (6), (7) gegebene Winkel einschliessen, so müssen die vier letzten dieser Gleichungen vor der Auflösung addirt, und $w(4)$, $w(5)$, $w(6)$ in $w(7)$ verwandelt werden, somit bekommen wir

$$
\begin{array}{rrrr}
30.8097\,w(1) & & & = -51''918 \\
9.8334\,w(2) & & - 0.5860\,w(7) & = +24.366 \\
80.7053\,w(3) & + 45.6162\,w(7) & & = +29.508 \\
-0.5860\,w(2) & + 45.6162\,w(3) & + 130.4886\,w(7) & = - 1.956
\end{array}
$$

deren Auflösung

$$
\begin{aligned}
\log \gamma'' &= 8.77519 \;,\; \log \gamma''' = 9.75222n \\
w(1) &= - 1''685 \\
w(2) &= + 2.468 \\
w(3) &= + 0.458 \\
w(7) &= - 0.164 \;,\; (ll,4) = (ll) - 161.5
\end{aligned}
$$

giebt. Fügt man diesen die obigen vorläufigen Werthe hinzu, so findet man

$$
\begin{aligned}
y(1)_1 &= 219^0\ 31'\ 41''315 \\
y(2)_1 &= 250\ \ 20\ \ 37.977 \\
y(3)_1 &= 270\ \ 22\ \ \ 6.458 \\
y(7)_1 &= 146\ \ \ 0\ \ 14.914
\end{aligned}
$$

denen man noch die folgenden hinzufügen kann,

$$
\begin{aligned}
y(4)_1 &= \ \ 0^0\ \ 0'\ \ 5''398 \\
y(5)_1 &= 45\ 23\ 27.762 \\
y(6)_1 &= 93\ 10\ 43.931
\end{aligned}
$$

die aber hier nicht gebraucht werden.

63.

St. (2).

Die durch die Ausgleichung des Hauptnetzes gegebenen Winkel sind hier (Küstenverm. S. 367)

$$x(3)_2 - x(2)_2 = 60^0\ 33'\ 3''689$$
$$x(4)_2 - x(3)_2 = 51\ 21\ 6.288$$

die in der Ausgleichung des Zweignetzes auch dieselben Werthe bekommen müssen. Es sind demnach die vorläufigen Werthe aller Richtungen dieser Station, mit Einschluss der Centrirungen, wie folgt angenommen worden,

$$\begin{aligned}(a) &= 11^0\ 3'\ 36''000\\ (1) &= 0\ 0\ 0.000\\ (2) &= 40\ 35\ 33.944\\ (3) &= 101\ 8\ 37.633\\ (4) &= 152\ 29\ 43.921\end{aligned}$$

in welchen die vorstehenden Bedingungsgleichungen berücksichtigt worden sind. Nachdem hiemit, und mit Zuziehung der Beobachtungen auf der Station (2) (Küstenverm. S. 144 u. f.) die Stationstäfelchen berechnet worden waren, ergaben sich ohne Rücksicht auf die obigen Bedingungsgleichungen die folgenden Stationsgleichungen

$$\begin{aligned}7.8002\,w(a) &= -2''633\\ 30.1460\,w(1) - 5.7709\,w(4) &= -1.066\\ 51.8892\,w(2) - 14.6667\,w(3) - 11.2222\,w(4) &= +13.342\\ -14.6667\,w(2) + 36.3333\,w(3) - 21.6667\,w(4) &= -5.527\\ -5.7709\,w(1) - 11.2222\,w(2) - 21.6667\,w(3) + 56.5346\,w(4) &= -4.116\end{aligned}$$

Da nun hier die Richtungen (2), (3), (4) gegebene Winkel einschliessen, so müssen vor der Auflösung die drei letzten der vorstehenden Gleichungen addirt, und $w(3)$ nebst $w(4)$ in $w(2)$ verwandelt werden. Hiemit ergeben sich

$$\begin{aligned}7.8002\,w(a) &= -2''633\\ 30.1460\,w(1) - 5.7709\,w(2) &= -1.066\\ -5.7709\,w(1) + 49.6460\,w(2) &= +3.699\end{aligned}$$

durch deren Auflösung man

$$\begin{aligned}\log\beta'' &= 9.28201\\ w(a) &= -0''338\\ w(1) &= -0.022\\ w(2) &= +0.072\ ,\ (ll,3) = (ll) - 1.2\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}y(a)_2 &= 11^0\ 3'\ 35''622\\ y(1)_2 &= 359\ 59\ 59.978\\ y(2)_2 &= 40\ 35\ 34.016\end{aligned}$$

erhält. Ausserdem bekommt man durch die Bedingungsgleichungen

$$y(3)_2 = 101^0\ 8'\ 37''705$$
$$y(4)_2 = 152\ 29\ 43.993$$

die aber hier nicht gebraucht werden.

64.

Um in Erfahrung zu bringen, welche Endresultate hieraus hervorgehen, habe ich noch die drei folgenden Stationen hinzugezogen:

Bahn . . . . . (3)
Koboldsberg . . . (4)
Luckow . . . . . (5)

und die beobachteten Richtungen auf diesen Stationen wie folgt bezeichnet:

Von Bahn nach Koboldsberg . . . . . $(1)_3$
» » » Luckow . . . . . $(2)_3$
» » » Vogelsang . . . . . $(3)_3$
» » » Kleistberg . . . . . $(4)_3$

Von Koboldsberg nach Luckow . . . . $(1)_4$
» » » Vogelsang . . . $(2)_4$
» » » Bahn . . . . . $(3)_4$

Von Luckow nach Vogelsang . . . . . $(1)_5$
» » » Bahn . . . . . $(2)_5$
» » » Koboldsberg . . . . $(3)_5$

Die Ausgleichungen auf diesen Stationen habe ich so angenommen, wie man sie in der Küstenvermessung angegeben findet. Nemlich

$$y(1)_3 = 0^0\ 0'\ 0''$$
$$y(2)_3 = 48\ 30\ 9.629$$
$$y(3)_3 = 99\ 30\ 5.890$$
$$y(4)_3 = 165\ 23\ 12.042$$

Unbestimmte Auflösung der Stationsgleichungen (3)

$$+ 0.06933((2)-(1)) + 0.02478((3)-(1)) + 0.01539((4)-(1));$$
$$+ 0.02478((2)-(1)) + 0.06111((3)-(1)) + 0.02156((4)-(1));$$
$$+ 0.01539((2)-(1)) + 0.02156((3)-(1)) + 0.06689((4)-(1));$$

$$y(1)_4 = 131^\circ\ 23'\ 26''012$$
$$y(2)_4 = 157\ \ 47\ \ 58.026$$
$$y(3)_4 = 207\ \ 28\ \ 57.938$$

Unbestimmte Auflösung der Stationsgleichungen (4)

$$+ 0.11605(1) + 0.07196(2) + 0.07463(3);$$
$$+ 0.07196(1) + 0.12902(2) + 0.07543(3);$$
$$+ 0.07463(1) + 0.07543(2) + 0.10882(3);$$

$$y(1)_5 = \ \ 0^\circ\ \ 0'\ \ 0''$$
$$y(2)_5 = \ 78\ \ 9\ \ 40.220$$
$$y(3)_5 = 133\ \ 33\ \ 59.489$$

Unbestimmte Auflösung der Stationsgleichungen (5)

$$+ 0.06827((2)-(1)) + 0.02599((3)-(1));$$
$$+ 0.02599((2)-(1)) + 0.05545((3)-(1)).$$

65.

Die Bedingungsgleichungen zwischen den vorbenannten Beobachtungen dieser fünf Stationen sind

$$(I)\ldots\ x(1)_1 - x(7)_1 + x(2)_2 - x(1)_2 + x(4)_3 - x(3)_3 = 180^\circ\ 0'\ 7''032$$
$$(II)\ldots\ x(3)_1 - x(1)_1 + x(3)_3 - x(2)_3 + x(2)_5 - x(1)_5 = 180\ \ 0\ \ 3.219$$
$$(III)\ldots\ x(2)_3 - x(1)_3 + x(3)_4 - x(1)_4 + x(3)_5 - x(2)_5 = 180\ \ 0\ \ 2.084$$
$$(IV)\ldots\ x(2)_1 - x(1)_1 + x(3)_3 - x(1)_3 + x(3)_4 - x(2)_4 = 180\ \ 0\ \ 3.464$$
$$(V)\ldots\ \frac{\sin(x(3)_3-x(2)_3)\ \sin(x(3)_4-x(2)_4)\ \sin(x(3)_5-x(1)_5)}{\sin(x(3)_3-x(1)_3)\ \sin(x(2)_4-x(1)_4)\ \sin(x(2)_5-x(1)_5)} = 1$$

und substituirt man hierin die vorstehenden Werthe der $y(r)_s$, so erhält man

$$F(I) = -\ 0''441\ ,\ F(II) = -\ 1''595\ ,\ F(III) = -\ 1''260$$
$$F(IV) = -\ 1.000\ ,\ F(V) = +\ 1.046$$

wobei zu bemerken ist, dass die Gleichung (V) mit der Zahl 50 dividirt worden ist.

66.

Es ergeben sich nun aus dem Vorhergehenden die folgenden Werthe der $q(r,I)$, etc.

r	s	q(r,I)	q(r,II)	q(r,III)	q(r,IV)	log q(r,V)
1	1	+1	−1	—	−1	—
2		—	—	—	+1	—
3		—	+1	—	—	—
4		−1	—	—	—	—
1	2	−1	—	—	—	—
2		+1	—	—	—	—
2, −1	3	—	−1	+1	—	9.5328n
3, −1		−1	+1	—	+1	9.6145
4, −1		+1	—	—	—	—
1	4	—	—	−1	—	9.9284
2		—	—	—	−1	0.0810n
3		—	—	+1	+1	9.5529
2, −1	5	—	+1	−1	—	8.9455n
3, −1		—	—	+1	—	9.6038n

und hieraus bekommt man

r	s	log f(r,I)	log f(r,II)	log f(r,III)	log f(r,IV)	log f(r,V)
1	1	8.5113	8.5113n	—	8.5113n	—
2		6.7554n	6.5076n	—	9.0074	—
3		7.7324	8.1886	—	6.5076n	—
4		7.9802n	7.7324n	—	6.7554	—
1	2	8.4769n	—	—	—	—
2		8.2216	—	—	—	—
2, −1	3	7.9727n	8.6489n	8.8409	8.3941	8.1287n
3, −1		8.5971n	8.5602	8.3941	8.7861	8.2227
4, −1		8.6564	7.7903	8.1872	8.3337	7 5599
1	4	—	—	8.6172n	7.4265	8.5839
2		—	—	7.5403	8.7291n	8 8295n
3		—	—	8.5339	8.5236	8.0515
2, −1	5	—	8.8342	8.6261n	—	8.2164n
3, −1		—	8.4148	8.4692	—	8.3902n

Aus diesen Daten erhielt ich die folgenden Coefficienten der Endgleichungen,

	I	II	III	IV	V	F( )
I	0.17353	−0.05722	−0.00939	−0.07258	−0.01307	−0″441
II		0.19704	−0.08683	+0.06847	+0.01369	−1.595
III			0.21668	+0.05550	−0.04865	−1.260
IV				0.28227	+0.09549	−1.000
V					0.14070	+1.046

67.

Die Auflösung dieser Endgleichungen giebt für die Unbekannten derselben die folgenden Werthe,

$$(I) = -\ 8.384$$
$$(II) = -\ 14.630$$
$$(III) = -\ 10.103$$
$$(IV) = -\ 2.225$$
$$(V) = +\ 6.095 \quad , \quad R_5 = -\ 48.3$$

womit man

$$z(1)_1 = +\ 0''275 \quad , \quad z(1)_2 = +\ 0''251 \quad , \quad z(2,-1)_3 = -\ 0''107$$
$$z(2)_1 = -\ 0.217 \quad , \quad z(2)_2 = -\ 0.140 \quad , \quad z(3,-1)_3 = -\ 0.485$$
$$z(3)_1 = -\ 0.270 \quad , \qquad\qquad z(4,-1)_3 = -\ 0.652$$
$$z(7)_1 = +\ 0.158 \quad ,$$

$$z(1)_4 = +\ 0''646 \quad , \quad z(2,-1)_5 = -\ 0''672$$
$$z(2)_4 = -\ 0.328 \quad , \quad z(3,-1)_5 = -\ 0.828$$
$$z(3)_4 = -\ 0.351 \quad ,$$

erhält, und hiemit und durch die $y(r)$, der Artt. 62, 63, 64 ergeben sich die folgenden Endresultate,

$$x(1)_1 = 219^0\ 31'\ 41''040 \quad , \quad x(1)_2 = 359^0\ 59'\ 59''727$$
$$x(2)_1 = 250\ \ 20\ \ 38.194 \quad , \quad x(2)_2 = \ \ 40\ \ 35\ \ 34.156$$
$$x(3)_1 = 270\ \ 22\ \ \ 6.728 \quad ,$$
$$x(7)_1 = 146\ \ \ 0\ \ 14.756 \quad ,$$

$$x(1)_3 = \ \ 0^0\ \ 0'\ \ 0'' \quad , \quad x(1)_4 = 131^0\ 23'\ 25''366$$
$$x(2)_3 = \ \ 48\ \ 30\ \ \ 9.736 \quad , \quad x(2)_4 = 157\ \ 47\ \ 58.354$$
$$x(3)_3 = \ \ 99\ \ 30\ \ \ 6.375 \quad , \quad x(3)_4 = 207\ \ 28\ \ 58.289$$
$$x(4)_3 = 165\ \ 23\ \ 12.694 \quad ,$$

$$x(1)_5 = \ \ 0^0\ \ 0'\ \ 0''$$
$$x(2)_5 = \ \ 78\ \ \ 9\ \ 40.892$$
$$x(3)_5 = 133\ \ 34\ \ \ 0.317$$

68.

Die Vergleichung dieser Resultate mit den in der Küstenvermessung angegebenen zeigt bedeutende Unterschiede in den daraus hervorgehenden Winkeln, allein man kann strenge genommen diese beiden Resultate nicht mit einander vergleichen, da hier nur die ersten fünf Stationen des Zweignetzes, dort aber alle Stationen desselben in Betracht gezogen worden sind. Um die Data zu einer rationellen Vergleichung zu erhalten, müssen wir dieselben fünf Stationen, ohne Hinzufügung der übrigen,

nach dem in der Küstenvermessung angewandten Verfahren behandeln. Dieses soll im Folgenden ausgeführt werden.

69.

Die Ausgleichungen auf den Stationen, so wie die obigen fünf Bedingungsgleichungen bleiben nun dieselben wie in der Küstenvermessung. Auch die Resultate der Substitutionen in die Bedingungsgleichungen bleiben unverändert, wie sie dort S. 295 u. 296 angegeben worden sind, mit der Ausnahme jedoch, dass das dort angegebene logarithmische Resultat der Seitengleichung, mit der Zahl 50 dividirt, anzuwenden ist. Es werden demnach

$$F(I) = -\ 0''299\ ,\ F(II) = -\ 1''699\ ,\ F(III) = -\ 1''260$$
$$F(IV) = -\ 1.100\ ,\ F(V) = +\ 1.038$$

Zufolge des im angeführten Werk angewandten Verfahrens werden die Verbesserungen der auf den Stationen (1) und (2) beobachteten Richtungen weggelassen, und von den Täfelchen des Art. 53 für die $q(r,I)$, etc. und $f(r,I)$, etc. fallen daher jetzt die beiden ersten, sich auf die Stationen (1) und (2) beziehenden Abtheilungen ganz weg, während die drei übrigen, sich auf die Stationen (3), (4), (5) beziehenden, Abtheilungen unverändert beizubehalten sind. Berechnet man nun aus diesen die Coefficienten der Endgleichungen, so erhält man die folgenden Werthe derselben,

	I	*II*	*III*	*IV*	*V*	*F*( )
I	0.08488	−0.03016	−0.00939	−0.03955	−0.01307	−0″299
II		0.14915	−0.08683	+0.03633	+0 01369	−1.699
III			0.21668	+0.05550	−0.04865	−1.260
IV				0.14809	+0 09549	−1.100
V					0.14070	+1.038

die mit den Angaben der Küstenvermessung S. 336 übereinstimmen, nachdem die auf V sich beziehenden Coefficienten mit dem Factor, dessen log = 0.3755, und der Coefficient (V,V) mit dem Quadrat dieses Factors multiplicirt worden sind.

70.

Die Auflösung dieser Endgleichungen giebt

$$(I) = -\ 15.101$$
$$(II) = -\ 6.091$$

$$(III) = + \ 5.894$$
$$(IV) = - \ 31.513$$
$$(V) = + \ 29.991 \ , \ R_5 = 73.2$$

womit man

$$z(2,-1)_3 = - \ 0''362 \ , \ z(1)_4 = + \ 0''823 \ . \ z(2,-1)_5 = - \ 1''159$$
$$z(3,-1)_3 = - \ 0.903 \ , \ z(2)_4 = - \ 0.316 \ , \ z(3,-1)_5 = - \ 0.721$$
$$z(4,-1)_3 = - \ 1.202 \ , \ z(3)_4 = - \ 0.512 \ ,$$

und

$$x(1)_3 = \ 0^0 \ 0' \ 0'' \ , \ x(1)_4 = 131^0 \ 23' \ 25''189$$
$$x(2)_3 = \ 48 \ 30 \ 9.991 \ , \ x(2)_4 = 157 \ 47 \ 58.342$$
$$x(3)_3 = \ 99 \ 30 \ 6.793 \ , \ x(3)_4 = 207 \ 28 \ 58.450$$
$$x(4)_3 = 165 \ 23 \ 13.244 \ ,$$

$$x(1)_5 = \ 0^0 \ 0' \ 0''$$
$$x(2)_5 = \ 78 \ 9 \ 41.379$$
$$x(3)_5 = 133 \ 34 \ 0.210$$

erhält, wozu noch

$$x(1)_1 = 219^0 \ 31' \ 35''583 \ , \ x(1)_2 = 359^0 \ 59' \ 59''970$$
$$x(2)_1 = 250 \ 20 \ 32.145 \ , \ x(2)_2 = \ 40 \ 35 \ 34.037$$
$$x(3)_1 = 270 \ 22 \ 0.622 \ ,$$
$$x(7)_1 = 146 \ 0 \ 9.069 \ ,$$

die ich aus der Küstenvermessung S. 367 habe entnehmen können, da sie von den hier in Betracht gezogenen Ausgleichungsrechnungen unberührt bleiben.

71.

Die Vergleichung der Winkel, die aus den eben erhaltenen Richtungen folgen, mit denen, die die Küstenvermessung enthält, giebt nur sehr kleine Unterschiede, woraus folgt, dass die hier weggelassenen Stationen nur geringen Einfluss auf diese Richtungen äussern; ein Umstand, der sich auch schon durch die Figur des Netzes im Voraus erkennen lässt. Desto grösser sind aber die Unterschiede mit den nach dem hier entwickelten Verfahren berechneten, und im Art. 67 erhaltenen Resultate. Ich will diese nebst den Unterschieden, die daraus folgen, hier zusammen stellen, werde aber nur die Secunden der Winkel anführen, da diese hinreichend sind.

	Art. 67.	Art. 70.	Unterschiede.
$x(1)_1 - x(7)_1 =$	26″284	26″514	+ 0″230
$x(2)_1 - x(1)_1 =$	57.154	56.562	— 0.592
$x(3)_1 - x(2)_1 =$	28.534	28.477	— 0.057
$x(2)_1 - x(7)_1 =$	23.438	23.076	— 0.362
$x(3)_1 - x(1)_1 =$	25.688	25.039	— 0.649
$x(3)_1 - x(7)_1 =$	51.972	51.553	— 0.419
$x(3)_2 - x(1)_2 =$	34.429	34.067	— 0.362
$x(2)_3 - x(1)_3 =$	9.736	9.991	+ 0.255
$x(3)_3 - x(2)_3 =$	56.639	56.802	+ 0.163
$x(4)_3 - x(3)_3 =$	6.319	6.451	+ 0.132
$x(3)_3 - x(1)_3 =$	6.375	6.793	+ 0.418
$x(4)_3 - x(2)_3 =$	2.958	3.253	+ 0.295
$x(4)_3 - x(1)_3 =$	12.694	13.244	+ 0.550
$x(2)_4 - x(1)_4 =$	32.988	33.153	+ 0.165
$x(3)_4 - x(2)_4 =$	59.935	60.108	+ 0.173
$x(3)_4 - x(1)_4 =$	32.923	34.261	+ 0.338
$x(2)_5 - x(1)_5 =$	40.892	41.379	+ 0.487
$x(3)_5 - x(2)_5 =$	19.425	18.831	— 0.594
$x(3)_5 - x(1)_5 =$	0.317	0.210	— 0.107

Diese Unterschiede sind sehr gross, und steigen, wie man sieht, fast auf 0″7. Das Verfahren, welches diese Unterschiede gegeben hat, ist in der Küstenvermessung wiederholt angewandt worden.

72.

Zum Schlusse will ich noch die Summen der Fehlerquadrate vergleichen, die in diesem Beispiel erhalten werden. Diese Summen selbst kann man zwar aus dem Vorhergehenden nicht erhalten, weil ich die (ll) nicht berechnet habe, aber um ihren Unterschied zu erhalten, sind alle erforderlichen Data angegeben worden. Zuerst bemerke ich, dass die Ausgleichungen auf den Stationen (3), (4), (5) hiebei nicht in Betracht kommen, denn da diese Stationen in beiden, im Vorstehenden angewandten Verfahrungsarten auf dieselbe Weise eintreten, so ist ihr Beitrag derselbe, und verschwindet also im Unterschied der Summe der Fehlerquadrate. Es sind daher von allen Stationen hier nur die (1)

und (2) zu berücksichtigen. Für das in dieser Abhandlung entwickelte Verfahren erhalten wir

$$\begin{array}{rrrl} (ll,4)_1 = & (ll)_1 & - 161.5 \ldots & \text{Art. 62} \\ (ll,3)_2 = & (ll)_2 & - \quad 1.2 \ldots & \text{Art. 63} \\ \hline \Sigma(ll,n) = & \Sigma(ll) & - 162.7 & \\ R_5 = & & \quad 48.3 \ldots & \text{Art. 67} \\ \hline W = & \Sigma(ll) & - 114.4 & \end{array}$$

In Bezug auf das Verfahren der Küstenvermessung erhält man für die zwei genannten Stationen die Werthe der (ll,n) durch die Auflösung der ursprünglichen, in den Artt. 62 u. 63 gegebenen Stationsgleichungen, und die Werthe der (ll), die dabei in Betracht kommen, sind mit denen, die jenem Verfahren angehören, identisch. Es ergeben sich auf die beschriebene Weise

$$\begin{array}{rrrl} (ll,7)_1 = & (ll)_1 & - 172.5 & \\ (ll,5)_2 = & (ll)_2 & - \quad 4.7 & \\ \hline \Sigma(ll,n) = & \Sigma(ll) & - 177.2 & \\ R_5 = & & \quad 73.2 \ldots & \text{Art. 70} \\ \hline W = & \Sigma(ll) & - 104.0 & \end{array}$$

Der Unterschied zwischen diesen beiden Werthen von W beträgt 10.4, und zwar ist die Summe der Fehlerquadrate, die das Verfahren der Küstenvermessung giebt, um diesen Betrag grösser wie die Summe, welche das in dieser Abhandlung entwickelte Verfahren giebt. Nun ist aber bei nur fünf Stationen ein Unterschied von zehn bis elf Einheiten in dieser Summe erheblich zu nennen, und wir sehen also, dass das Verfahren der Küstenvermessung die Summe der Fehlerquadrate nicht zum Minimum macht.

In anderen Fällen können sich alle im Vorhergehenden erhaltenen Unterschiede beträchtlich vergrössern, und sie wären schon in diesem Beispiel wesentlich grösser geworden, wenn zufällig einige Umstände etwas anders gewesen wären. Nimmt man z. B. an, dass der Fehler der ersten Bedingungsgleichung nach der Substitution der $y(r)$, $-1''299$ statt $-0''299$ gewesen wäre, welches leicht der Fall hätte sein können, so hätten die Unterschiede in den Winkeln $1''$ erreicht, und grosse Unterschiede wären häufiger vorgekommen, als in der Zusammenstellung des

vor. Art. Die Summe der Fehlerquadrate wäre in diesem Falle 31,2 Einheiten grösser geworden als ihr Minimum.

73.

Es soll zur Erläuterung der Entwickelungen des Art. 28 u. f. ein Beispiel des Falles gegeben werden, wo eine Winkelgleichung des Dreiecksnetzes auf die dort erklärte Art behandelt wird. Ich nehme zwei Dreiecke an, die eine gemeinschaftliche Seite haben, und bezeichne die Stationen, die die Ecken des daraus entstehenden Vierecks bilden, mit (1), (2), (3), (4). Die gemeinschaftliche Seite soll die Seite (2) (3) sein. Ich nehme ferner an, dass die zweite Diagonale dieses Vierecks nicht beobachtet worden ist, aber dass auf jeder Station Richtungen beobachtet worden sind, die nicht zu diesem Viereck gehören; man kann diese entweder als überzählige, oder als solche betrachten, die zu anderen hier nicht in Betracht gezogenen Dreiecken gehören.

Die wahrscheinlichsten Werthe der Richtungen auf der

Station (1) nach (3) sei $x(1)_1$
» » » (2) » $x(2)_1$
eine überzählige Richtung sei $x(3)_1$

Station (2) nach (1) sei $x(1)_2$
» » » (3) » $x(2)_2$
» » » (4) » $x(3)_2$
überzählige Richtungen seien $x(4)_2$ und $x(5)_2$

Station (3) nach (2) sei $x(1)_3$
» » » (1) » $x(2)_3$
» » » (4) » $x(4)_3$
eine überzählige Richtung sei $x(3)_3$

Station (4) nach (2) sei $x(1)_4$
» » » (3) » $x(2)_4$
überzählige Richtungen seien $x(3)_4$ und $x(4)_4$

74.

Die zwei Bedingungsgleichungen, die dieses Viereck giebt, sind in Folge der Grösse einer der Seiten desselben, die ich beliebig angenommen habe,

$$x(2)_1 - x(1)_1 + x(2)_2 - x(1)_2 + x(2)_3 - x(1)_3 = 180^0\ 0'\ 2''871$$
$$x(3)_2 - x(2)_2 + x(1)_3 - x(4)_3 + x(2)_4 - x(1)_4 = 180\ \ 0\ \ 5.488$$

von welchen die erste auf die oben entwickelte Art behandelt, aber die zweite im zweiten Theil der Auflösung berücksichtigt werden soll. Die vorläufigen Werthe der Richtungen mit Einschluss der Centrirungen sollen die folgenden sein,

$$\begin{aligned}
(1)_1 &= 60^0\ \ 0'\ \ 0'' \\
(2)_1 &= 142\ \ 23\ \ 46.600 \\
(3)_1 &= 193\ \ 40\ \ \ 8.540 \\
(1)_2 &= 100\ \ \ 4\ \ \ 0 \\
(2)_2 &= 142\ \ 36\ \ 40.369 \\
(3)_2 &= 193\ \ 59\ \ 17.516 \\
(4)_2 &= 282\ \ 31\ \ 42.800 \\
(5)_2 &= 335\ \ 49\ \ 51.600 \\
(1)_3 &= \ \ 15\ \ 30\ \ 30.000 \\
(2)_3 &= \ \ 70\ \ 34\ \ \ 5.902 \\
(3)_3 &= 270\ \ 18\ \ \ 4.183 \\
(4)_3 &= 293\ \ 17\ \ 46.224 \\
(1)_4 &= 204\ \ \ 8\ \ 30.000 \\
(2)_4 &= 250\ \ 33\ \ 12.000 \\
(3)_4 &= 332\ \ 37\ \ 48.000 \\
(4)_4 &= \ \ 41\ \ 51\ \ 15.000
\end{aligned}$$

Man erkennt, dass unter diesen Werthen die Gleichung

$$(2)_1 - (1)_1 + (2)_2 - (1)_2 + (2)_3 - (1)_3 = 180^0\ 0'\ 2''871$$

statt findet, gleichwie im Art. 30 verlangt wurde.

75.

Da es hier von keinem Interesse sein kann, die Stationsgleichungen kennen zu lernen, so stelle ich gleich die Stationsgleichungen, aber vor der Einführung der N, N', N'', etc., auf,

St. (1).

$$\begin{aligned}
18.667\,w(1) - 14.333\,w(2) - \ 4.333\,w(3) &= -17''312 \\
-14.333\,w(1) + 31.667\,w(2) - 17.333\,w(3) &= -\ 8.417 \\
-\ 4.333\,w(1) - 17.333\,w(2) + 21.667\,w(3) &= +25.729
\end{aligned}$$

St. (2).

$$
\begin{aligned}
32.0\,w(1) - 8.5\,w(2) - 10.5\,w(3) - 6.0\,w(4) - 7.0\,w(5) &= -8''146\\
-8.5\,w(1) + 37.0\,w(2) - 14.0\,w(3) - 6.0\,w(4) - 8.5\,w(5) &= -10.318\\
-10.5\,w(1) - 14.0\,w(2) + 34.0\,w(3) - 4.0\,w(4) - 5.5\,w(5) &= -2.978\\
-6.0\,w(1) - 6.0\,w(2) - 4.0\,w(3) + 24.0\,w(4) - 8.0\,w(5) &= +10.134\\
-7.0\,w(1) - 8.5\,w(2) - 5.5\,w(3) - 8.0\,w(4) + 29.0\,w(5) &= +11.308
\end{aligned}
$$

St. (3).

$$
\begin{aligned}
40.5\,w(1) - 15.5\,w(2) - 12.5\,w(3) - 12.5\,w(4) &= +9''432\\
-15.5\,w(1) + 32.5\,w(2) - 8.5\,w(3) - 8.5\,w(4) &= -8.571\\
-12.5\,w(1) - 8.5\,w(2) + 29.5\,w(3) - 8.5\,w(4) &= -10.841\\
-12.5\,w(1) - 8.5\,w(2) - 8.5\,w(3) + 29.5\,w(4) &= +9.980
\end{aligned}
$$

St. (4).

$$
\begin{aligned}
22.667\,w(1) - 9.333\,w(2) - 9.333\,w(3) - 4.0\,w(4) &= +7''000\\
-9.333\,w(1) + 24.667\,w(2) - 7.0\,w(3) - 8.333\,w(4) &= +8.316\\
-9.333\,w(1) - 7.0\,w(2) + 22.0\,w(3) - 5.667\,w(4) &= +0.444\\
-4.0\,w(1) - 8.333\,w(2) - 5.667\,w(3) + 18.0\,w(4) &= -15.760
\end{aligned}
$$

Die Coefficienten der Unbekannten dieser Gleichungen sind die, die in den Entwickelungen mit $[aa]$, $[ab]$, etc. $[bb]$, etc, etc. bezeichnet worden sind.

76.

Die Einführung der N, N', etc. in die Gleichungen des vor. Art. werde ich etwas anders einrichten, wie ich es bisher gethan habe, da es im gegenwärtigen Falle einigen Vortheil bringt. Ich werde diese Grössen so bestimmen, dass die Coefficienten der letzten Unbekannten, mit Ausnahme des letzten derselben, so wie in der ersten Gleichung auch der Coefficient der vorletzten Unbekannten, Null werden. Die Ausdrücke, durch welche dieses bewirkt wird, kann sich jeder leicht selbst entwickeln, zum Ueberfluss will ich sie für die am Meisten vorkommenden Fälle hier anführen. Wenn nur drei Unbekannte auf der Station vorhanden sind, so erleiden die früher gegebenen Ausdrücke gar keine Abänderung.

Wenn vier Unbekannte vorhanden sind, so berechne man

$$M = + \sqrt{-[aa''][aa'''][a''a''']}$$
$$N = -\frac{M}{[a''a''']} \qquad N' = -\frac{[a'a''']}{N'''}$$
$$N'' = -\frac{M}{[aa''']}$$
$$N''' = -\frac{M}{[aa'']}$$

Wenn fünf Unbekannte vorhanden sind, so erfüllen die folgenden Ausdrücke den Zweck,

$$M = + \sqrt{-[aa'''][aa^{IV}][a'''a^{IV}]}$$
$$N = -\frac{M}{[a'''a^{IV}]} \qquad N' = -\frac{[a'a^{IV}]}{N^{IV}}$$
$$N''' = -\frac{M}{[aa^{IV}]} \qquad N'' = -\frac{[a''a^{IV}]}{N^{IV}}$$
$$N^{IV} = -\frac{M}{[aa''']}$$

Wenn sechs Unbekannte vorhanden sind, so sind die folgenden Ausdrücke anzuwenden,

$$M = + \sqrt{-[aa''][aa^{V}][a''a^{V}]}$$
$$N = -\frac{M}{[a''a^{V}]} \qquad N' = -\frac{[a'a^{V}]}{N^{V}}$$
$$N''' = -\frac{M}{[aa^{V}]} \qquad N'' = -\frac{[a''a^{V}]}{N^{V}}$$
$$N^{V} = -\frac{M}{[aa^{IV}]} \qquad N''' = -\frac{[a'''a^{V}]}{N^{V}}$$

Man kann hieraus leicht die Ausdrücke für eine grössere Anzahl von Unbekannten aufstellen.

77.

Führt man auf diese Art die N, N', etc. in die Gleichungen des vorvor. Art. ein, so ergeben sich die Coefficienten, die in den Entwickelungen mit (aa), (ab), etc. (bb), etc. etc. $(aa)_{'}$, $(ab)_{'}$, etc. $(bb)_{'}$, etc. etc. $(aa)_{''}$, $(ab)_{''}$, etc. $(bb)_{''}$ etc. etc. bezeichnet worden sind. Stellt man diese tabellarisch auf, so erhält man die folgenden Werthe,

St. (1).

$N = 1.8930$, $N' = 7.5718$, $N'' = 2.2892$

log $= (0.27714)$ $= (0.87920)$ $= (0.35968)$

	a	b	c	(lx), etc.
a	22.2500	0	0	−17″312
b		89.000	0	− 8.417
c			26.907	+25.729

St. (2).

$N_{,} = 2.2913$; $N_{,}' = 2.7823$, $N_{,}'' = 1.8003$,
log $= (0.36008)$ $= (0.44440)$ $= (0.25534)$

$N_{,}''' = 2.6186$, $N_{,}'' = 3.0551$
log $= (0,41807)$ $= (0.48502)$

	$a_{,}$	$b_{,}$	$c_{,}$	$d_{,}$	$e_{,}$	(lx), etc.
$a_{,}$	37.25	− 2.125	− 6.375	0	0	− 8″146
$b_{,}$		44.741	− 8.9910	+ 1.2857	0	−10.318
$c_{,}$			37.241	+ 0.7142	0	− 2.978
$d_{,}$				30.857	0	+10.134
$e_{,}$					38.333	+11.308

St. (3).

$N_{,,} = 4.2875$, $N_{,,}' = 2.9155$, $N_{,,}'' = 2.9155$, $N_{,,}''' = 2.9155$
log $= (0.63220)$ $= (0.46471)$

	$a_{,,}$	$b_{,,}$	$c_{,,}$	$d_{,,}$	(lx), etc.
$a_{,,}$	58.882	− 3.0	0	0	+ 9″432
$b_{,,}$		41.0	0	0	− 8.571
$c_{,,}$			38.0	0	−10.841
$d_{,,}$				38.0	+ 9.980

St. (4).

$N_{,,,} = 2.5668$, $N_{,,,}' = 5.3474$, $N_{,,,}'' = 3.6363$, $N_{,,,}''' = 1.5584$
log $= (0.40939)$ $= (0.72814)$ $= (0.56066)$ $= (0.19268)$

	a	b	c	d	(lx), etc.
a	29.2548	+ 4.3917	0	0	+ 7″000
b		53.262	+12.445	0	+ 8.316
c			35.222	0	+ 0.444
d				20.429	−15.760

78.

Aus den vorstehenden Angaben für die drei ersten Stationen sind nun die combinirten Stationsgleichungen des Art. 34 zu berechnen, deren Coefficienten ich wieder tabellarisch aufstellen, und mit den a. a. O. angewandten Bezeichnungen versehen werde. Durch sehr geringe Arbeit, und indem man sich der im Art. 33 gegebenen Zusammenstellung der Ausdrücke der combinirten Coefficienten bedient, wobei man sich aber die runden Klammern statt der eckigen denken muss, ergiebt sich nun die folgende Zusammenstellung

	B	c	A_1	B_1	c_1	d_1
B	111.25	0	−22.25	+22.25	0	0
c		26.907	0	0	0	0
a_1			59.50	−24.375	− 6.375	0
b_1				66.991	− 8.991	+ 1.2857
c_1					37.241	+ 0.7142
d_1						30.857

	e_1	A_{11}	B_{11}	c_{11}	d_{11}	Bek. Gl.
B	0	−22.25	+22.25	0	0	−25″729
c	0	0	0	0	0	+25.729
a_1	0	+22.25	−22.25	0	0	+ 9.166
b_1	0	−22.25	+22.25	0	0	−27.630
c_1	0	0	0	0	0	− 2.978
d_1	0	0	0	0	0	+10.134
e_1	38.333	0	0	0	0	+11.308
a_{11}		81.132	−25.25	0	0	+26.744
b_{11}			63.25	0	0	−25.883
c_{11}				38.000	0	−10.841
d_{11}					38.000	+ 9.980

Die Coefficienten dieser Gleichungen sind leicht zu controliren. In Betreff der bekannten Glieder ist zu bemerken, dass ihre Summe gleich Null werden muss. Wie die Coefficienten der ursprünglichen Stationsgleichungen durch ihre Summen controlirt werden können, habe ich früher gezeigt, und diese Summen müssen in den Summen der Coefficienten einer jeden der vorstehenden Gleichungen wieder zum Vorschein kommen, wenn man die Additionen und Subtractionen berücksichtigt, die in den Gleichungen des Art. 34 durch die Zusammensetzung der bekannten Glieder derselben angezeigt werden. Auf diese Art habe ich alle vorhergehenden Coefficienten controlirt. Ich füge noch hinzu, dass die Unbekannten der Gleichungen, deren Coefficienten die vorstehende Tafel giebt, der Reihe nach $w(2)_1$, $w(3)_1$, $w(1)_2$, $w(2)_2$, $w(3)_2$, $w(4)_2$, $w(5)_2$, $w(1)_3$, $w(2)_3$, $w(3)_3$, $w(4)_3$ sind.

Die Stationsgleichungen der St. (4), die der vor. Art. angiebt, bleiben unverändert.

79.

In der Zusammenstellung der Coefficienten der aufzulösenden Gleichungen des vor. Art. bemerkt man sogleich, dass vier Gleichungen vorkommen, die jede nur Eine Unbekannte enthalten. Man verfährt am Besten, diese vier Gleichungen allen übrigen voran zu stellen, und braucht zu dem Ende die Tafel nicht umzuschreiben. Hier werde ich

indess, zur leichteren Uebersicht, diese Umschreibung vornehmen, und stelle daher die folgenden Gleichungen voran,

$$26.907\, w(3)_1 = +25''729$$
$$38.333\, w(5)_2 = +11.308$$
$$38.000\, w(3)_3 = -10.841$$
$$38.000\, w(4)_3 = +\ 9.980$$

in welchen die Coefficienten der Unbekannten der Reihe nach im Folgenden mit (1,1), (2,2,1), (3,3,2), (4,4,3) bezeichnet werden sollen. Wählen wir für die Coefficienten der übrigen Gleichungen auch Zahlen zur Bezeichnung, und fangen, an das Vorhergehende anknüpfend, mit (5,5,4) an, so ergiebt sich die folgende Tafel der übrigen Coefficienten

	5,4	6,4	7,4	8,4	9,4	10,4	11,4	Bek. Gl.
5	111.25	−22.25	+22.25	0	0	−22.25	+22.25	−25″729
6		59.20	−24.375	− 6.375	0	+22.25	−22.25	+ 9.166
7			66.991	− 8.991	+ 1.2857	−22.25	+22.25	−27.630
8				37.241	+ 0.7142	0	0	− 2.978
9					30.857	0	0	+10.134
10						81.132	−25.25	+26.744
11							63.25	−25.883

Die Unbekannten dieser Gleichungen sind der Reihe nach $w(2)_1$. $w(1)_2$, $w(2)_2$, $w(3)_2$, $w(4)_2$, $w(1)_3$, $w(2)_3$.

80.

Die Auflösung der eben erhaltenen Gleichungen wird nun auf die gewöhnliche Weise ausgeführt. Die einzige Abänderung, die angemessen erscheint, besteht in einer Aenderung der Bezeichnung der Hülfsgrössen, die ich für die Stationsgleichungen α', β', γ', etc., β'', γ'', etc., γ''', etc. etc. genannt habe. Diese Bezeichnung ist zwar ganz passend, wenn nur eine kleine Anzahl von Unbekannten und Gleichungen vorhanden ist, aber wenn diese Anzahl nicht klein zu nennen ist, verliert sie an Uebersichtlichkeit. Weit passender und übersichtlicher ist die Bezeichnung dieser Hülfsgrössen, die ich bei der Erklärung der Auflösung der Endgleichungen eingeführt habe, da sie in jedem Falle, die Anzahl der Gleichungen und Unbekannten mag noch so gross sein, eine sofortige Orientirung gewährt. Diese werde ich daher auch bei der Auflösung der obigen Stationsgleichungen anwenden, und ihre Verbindung mit den übrigen Grössen, ohne Abkürzungen für nicht vorhandene Coefficienten einzuführen, hier hinzufügen:

$$(2)_1 = \frac{(1,2)}{-(1,1)}\ ,\quad (3)_1 = \frac{(1,3)}{-(1,1)}\ ,\quad (4)_1 = \frac{(1,4)}{-(1,1)}\ ,\quad \text{etc.}\quad \chi' = \frac{(1,l)}{(1,1)}$$

$$(2,2,1) = (2,2) + (1,2)(2)_1$$
$$(2,3,1) = (2,3) + (1,3)(2)_1$$
$$(2,4,1) = (2,4) + (1,4)(2)_1$$
etc.
$$(2,l,1) = (2,l) + (1,l)(2)_1$$

$$(3,3,1) = (3,3) + (1,3)(3)_1$$
$$(3,4,1) = (3,4) + (1,4)(3)_1$$
etc.
$$(3,l,1) = (3,l) + (1,l)(3)_1$$

$$(4,4,1) = (4,4) + (1,4)(4)_1$$
etc.
$$(4,l,1) = (4,l) + (1,l)(4)_1$$

etc. bis
$$(ll,1) = (ll) - (1,l)\chi'$$

$$(3)_2 = \frac{(2,3,1)}{-(2,2,1)}\ ,\quad (4)_2 = \frac{(2,4,1)}{-(2,2,1)}\ ,\quad \text{etc.}\quad \chi' = \frac{(2,l,1)}{(2,2,1)}$$

$$(3,3,2) = (3,3,1) + (2,3,1)(3)_2$$
$$(3,4,2) = (3,4,1) + (2,4,1)(3)_2$$
etc.
$$(3,l,2) = (3,l,1) + (2,l,1)(3)_2$$

$$(4,4,2) = (4,4,1) + (2,4,1)(4)_2$$
etc.
$$(4,l,2) = (4,l,1) + (2,l,1)(4)_2$$

etc. bis
$$(ll,2) = (ll,1) - (2,l,1)\chi''$$

$$(4)_3 = \frac{(3,4,2)}{-(3,3,2)}\ ,\quad \text{etc.}\quad \chi''' = \frac{(3,l,2)}{(3,3,2)}$$

$$(4,4,3) = (4,4,2) + (3,4,2)(4)_3$$
etc.
$$(4,l,3) = (4,l,2) + (3,l,2)(4)_3$$

etc. bis

$$(ll,3) = (ll,2) - (3,l,2)\chi'''$$

$$\ldots\ldots \chi^{IV} = \frac{(4,l,3)}{(4,4,3)}$$

etc. bis

$$(ll,4) = (ll,3) - (4,l,3)\chi^{IV}$$

etc. bis (ll,n)

wenn die Anzahl der Gleichungen und Unbekannten n ist.

Nachdem diese Rechnungen ausgeführt worden sind, wodurch man die sogenannten reducirten Gleichungen erhält, werden die Unbekannten selbst, wenn man sie der Reihenfolge nach mit $w(1)$, $w(2)$, $w(3)$, $w(4)$, etc. bezeichnet, durch die folgenden Gleichungen erhalten:

$$\begin{aligned}
w(1) &= \chi' + (2)_1\, w(2) + (3)_1\, w(3) + (4)_1\, w(4) + \text{etc.}\\
w(2) &= \chi'' + (3)_2\, w(3) + (4)_2\, w(4) + \text{etc.}\\
w(3) &= \chi''' + (4)_3\, w(4) + \text{etc.}\\
w(4) &= \chi^{IV} + \text{etc.}\\
\text{etc.} &= \text{etc.}
\end{aligned}$$

bei deren Anwendung man von der letzten derselben anfangen muss.

81.

Wendet man nun diese Auflösungsart auf die Stationsgleichungen des vorvor. Art. an, so werden die Logarithmen der Hülfsgrössen, die nicht Null werden,

$$\begin{aligned}
(6)_5 &= (9.30103)\,,\ (7)_5 = (9.30103n)\,,\ (10)_5 = (9.30103)\ ,\ (11)_5 = (9.30103n)\\
(7)_6 &= (9.55864)\,.\ (8)_6 = (9.06372)\ ,\ (10)_6 = (9.50966n)\,,\ (11)_6 = (9.50966)\\
(8)_7 &= (9.31005)\,,\ (9)_7 = (8.36619n)\,,\ (10)_7 = (9.31232)\ ,\ (11)_7 = (9.31232n)\\
(9)_8 &= (8.45578n)\,,\ (10)_8 = (7.87764)\ ,\ (11)_8 = (7.87764n)\\
(10)_9 &= (7.94491n)\,,\ (11)_9 = (7.94491)\\
(11)_{10} &= (9.26788)
\end{aligned}$$

wozu noch die folgenden Divisoren kommen, die ich alle ansetzen werde, obgleich sie nicht alle gebraucht werden,

$$\begin{aligned}
(1,1) &= (1.42986) & (7,7,6) &= (1.74295)\\
(2,2,1) &= (1.58357) & (8,8,7) &= (1.53398)\\
(3,3,2) &= (1.57978) & (9,9,8) &= (1.48854)\\
(4,4,3) &= (1.57978) & (10,10,9) &= (1.83627)\\
(5,5,4) &= (2.04630) & (11,11,10) &= (1.68445)\\
(6,6,5) &= (1.74076)
\end{aligned}$$

Die Werthe der Unbekannten werden hierauf

$$w'3_{/1} = +0''9562 \;,\; w'2_{/1} = -0''1192$$
$$w'5_{/2} = +0.2950 \;,\; w'1_{/2} = -0.2145$$
$$w'3_{/3} = -0.2853 \;,\; w'2_{/2} = -0.3411$$
$$w'4_{/3} = +0.2626 \;,\; w'3_{/2} = -0.2057$$
$$w'4_{/2} = +0.3474$$
$$w(1)_3 = +0.1847$$
$$w'2_{/3} = -0.2490 \;,\; (u,11) = (u) - 59.70$$

mit welchen verbunden die im Art. 74 angesetzten vorläufigen Werthe der Richtungen die folgenden Werthe der $y(r)_s$ für die combinirten ersten drei Stationen geben:

$$y(1)_1 = 59^\circ\ 59'\ 59''321$$
$$y(2)_1 = 142\ 23\ 46.481$$
$$y(3)_1 = 193\ 40\ 9.496$$

$$y'1)_2 = 100\ 3\ 59.785$$
$$y'2)_2 = 142\ 36\ 40.028$$
$$y'3)_2 = 193\ 59\ 17.310$$
$$y(4)_2 = 282\ 31\ 43.147$$
$$y(5)_2 = 335\ 49\ 51.895$$

$$y(1)_3 = 15\ 30\ 30.185$$
$$y(2)_3 = 70\ 34\ 5.653$$
$$y(3)_3 = 270\ 18\ 3.898$$
$$y(4)_3 = 293\ 17\ 46.487$$

Von diesen ist $y(1)_1$ auf die oben erklärte Weise durch die Bedingungsgleichung berechnet worden.

Bei der Anwendung der oft erwähnten Bedingungsgleichung zur Controle dieser Werthe von $w(r)_s$ müssen die verschiedenen N den aufzulösenden Gleichungen gemäss addirt und subtrahirt werden. Diese Bedingungsgleichung steht daher im gegenwärtigen Beispiel so:

$$0 = (N+N')w(2)_1 + N''w(3)_1 + (N_{,}-N)w(1)_2 + (N_{,}'+N)w(2)_2$$
$$+ N_{,}''w(3)_2 + N_{,}'''w(4)_2 + N_{,}''''w(5)_2 + (N_{,,}-N)w(1)_3$$
$$+ (N_{,,}'+N)w(2)_3 + N_{,,}''w(3)_3 + N_{,,}'''w(4)_3$$

und giebt, nach der Substitution der im Vorhergehenden angegebenen numerischen Werthe, die folgenden Werthe der einzelnen Glieder derselben:

−1″128	
	+2″189
−0.085	
−1.595	
−0.370	
	+0.910
	+0.901
	+0.442
−1.197	
−0.832	
	+0.766
Summen = −5″207	+5″208 = +0″001

welches eine erwünschte Uebereinstimmung ist.

82.

Die Stationsgleichungen der St. (4) des Art. 77 sind auf gewöhnliche Art zu behandeln, jedoch ziehe ich vor, die letzte derselben, die wieder nur Eine Unbekannte enthält, den anderen voran zu stellen. Es ergeben sich somit die Logarithmen der Hülfsgrössen

$$(3)_2 = (9.17643n) \ , \ (4)_3 = (9.37399n)$$
$$(1,1) = (1.31025) \ , \ (2,2,1) = (1.46620) \ , \ (3,3,2) = (1.72101),$$
$$(4,4,3) = (1.50889)$$

und die Unbekannten

$$w(4)_4 = -0''7714$$
$$w(1)_4 = +0.2171$$
$$w(2)_4 = +0.1475$$
$$w(3)_4 = -0.0398 \ , \ (ll,4)_4 = (ll)_4 - 2.73$$

Hiemit werden

$$y(1)_4 = 204^0\ 8'\ 30''217$$
$$y(2)_4 = 250\ 33\ 12,147$$
$$y(3)_4 = 332\ 37\ 47,960$$
$$y(4)_4 = 41\ 51\ 14,229$$

womit der erste Theil der Auflösung ausgeführt ist.

83.

Zum zweiten Theile der Auflösung übergehend, sind zuerst die Werthe der $y(r)_s$ in die zweite Bedingungsgleichung des Art. 74 statt der $x'(r)_s$ zu substituiren. Diese Rechnung ist die folgende:

$$\begin{aligned}
y(3)_2 - y(2)_2 &= 51^\circ\ 22'\ 37''282 \\
y(1)_3 - y(4)_3 &= 82\ \ 12\ \ 43.698 \\
y(2)_4 - y(1)_4 &= 46\ \ 24\ \ 41.930 \\
\hline
&\ \ 180\ \ 0\ \ 2.910 \\
&-180\ \ 0\ \ 5.488 \\
\hline
F(I) &= -2''578
\end{aligned}$$

Hierauf sind die Differentialquotienten dieser Bedingungsgleichung aufzustellen, und dabei dieselbe Reihenfolge einzuhalten, die bei der Auflösung der Stationsgleichungen gewählt wurde. Das Täfelchen für diese Grössen steht daher wie folgt:

r	s	$q(r,I)_s$	Nr.
3	1	—	1
5	2	—	2
3	3	—	3
4	3	−1	4
2	1	—	5
1	2	—	6
2	2	−1	7
3	2	+1	8
4	2	—	9
1	3	+1	10
2	3	—	11
4	4	—	1
1		−1	2
2		+1	3
3		—	4

und vor der Anwendung sind diese Grössen, wie im Art. 35 angegeben ist, zu addiren und zu subtrahiren. Da aber alle diese Operationen Coefficienten enthalten, die zu der ersten Station gehören, und diese in der hier in Rede stehenden Bedingungsgleichung nicht vorkommt, so fallen für unser Beispiel diese Additionen und Subtractionen weg, und die Grössen der vorstehenden Tafel sind unverändert anzuwenden.

Die letzte Columne dieser Tafel giebt die Zahlen, die mit den in der Bezeichnung der Coefficienten der Stationsgleichungen angewandten übereinstimmen, und bei den ferneren Rechnungen massgebend sind.

n, da keine Additionen und
gungsgleichung vorkommen;
nnen sie erst nach der Aus-

. und $f(r,I)$, etc. habe ich bisher
. γ''', etc. etc. ausgedrückt, sie müs-
ichkeit durch die $(2)_1$, $(3)_1$, etc. $(3)_2$,
ehmen wir sie aus dem Supplement 9
wechseln darin diese Bezeichnungen um,
welches eine
e der darin vorkommenden Grössen Null
lgenden Ausdrücke:

$$
\begin{aligned}
&(2,I)\\
&(2,I)+\quad q(3,I)\\
&(2,I)+(4)_3\,\eta(3,I)+\quad q(4,I)\\
&(2,I)+(5)_3\,\eta(3,I)+(5)_4\,\eta(4,I)+\quad q(5,I)\\
&(2,I)+(6)_3\,\eta(3,I)+(6)_4\,\eta(4,I)+(6)_5\,\eta(5,I)+q(6,I)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{etc.}
\end{aligned}
$$

Die St
liche Art zu
wieder nur
ergeben sich

$$Q(2,I)=\frac{\eta(2,I)}{(2,2,1)},\quad Q(3,I)=\frac{\eta(3,I)}{(3,3,2)},\ \text{etc.}$$

$(1,1)=$
$(4,4,3)=$
und die

$$
\begin{aligned}
&(2,I)+(3)_1 f(3,I)+(4)_1 f(4,I)+(5)_1 f(5,I)+(6)_1 f(6,I)+\text{etc.}\\
&Q(2,I)+(3)_2 f(3,I)+(4)_2 f(4,I)+(5)_2 f(5,I)+(6)_2 f(6,I)+\text{etc.}\\
&Q(3,I)+(4)_3 f(4,I)+(5)_3 f(5,I)+(6)_3 f(6,I)+\text{etc.}\\
&Q(4,I)+(5)_4 f(5,I)+(6)_4 f(6,I)+\text{etc.}\\
&Q(5,I)+(6)_5 f(6,I)+\text{etc.}\\
&Q(6,I)+\text{etc.}\\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

werden wie früher durch Verwandelung von I in II, III, etc. auf
vorhandenen Bedingungsgleichungen ausgedehnt. Die Ausdrücke
die $f(1,I)$ etc. müssen, von der letzten derselben anfangend, berech-
t werden, und man kann bemerken, dass sie den Ausdrücken für die
$v(1)$, etc. des Art. 80 vollständig analog sind.

85.

Die Ausdrücke des vor. Art. ziehen sich in der Anwendung sehr zusammen, da in jedem speciellen Falle eine Anzahl der darin vorkommenden Grössen Null sind. In unserm Beispiel ziehen sich die für die η in die folgenden zusammen:

$$\begin{aligned}
\eta(4,I) &= q(4,I)\\
\eta(7,I) &= q(7,I)\\
\eta(8,I) &= (8)_7\,\eta(7,I) + q(8,I)\\
\eta(9,I) &= (9)_7\,\eta(7,I) + (9)_8\,\eta(8,I)\\
\eta(10,I) &= (10)_7\,\eta(7,I) + (10)_8\,\eta(8,I) + (10)_9\,\eta(9,I) + q(10,I)\\
\eta(11,I) &= (11)_7\,\eta(7,I) + (11)_8\,\eta(8,I) + (11)_9\,\eta(9,I) + (11)_{10}\,\eta(10,I)
\end{aligned}$$

und die für die f erleiden auch eine beträchtliche Zusammenziehung. Dass die Berechnung der zur Station (4) gehörigen Grössen noch viel einfacher wird, liegt auf der Hand. Mit Anwendung der Tafel für die q des Art. 83, und der Werthe der Hülfsgrössen, die in den Artt. 81 u. 82 gegeben sind, erhielt ich für das Beispiel die folgenden numerischen Werthe:

Nr.	$\log\eta(r,I)$	$\log Q(r,I)$	$\log f(r,I)$
1	—	—	—
2	—	—	—
3	—	—	—
4	0. n	8.4202n	8.4202n
5	—	—	7.4579
6	—	—	7.5527n
7	0. n	8.2570n	8.0835n
8	9.9008	8.3668	8.3678
9	6.7059	5.2174	5.544n
10	9.9035	8.0672	8.1139
11	9.5411	7.8566	7.8566
1	—	—	—
2	0. n	8.5338n	8.5770n
3	0.0608	8.3398	8.3777
4	9.4348n	7.9259n	7.9259n

Die Werthe der f müssen denselben Bedingungsgleichungen gnügen wie die der w, nur muss man die Reihenfolge derselben beachten. Für die ersten drei combinirten Stationen steht diese Bedingungsgleichung so:

$$\begin{aligned}
0 = {} & N_{,,}'''\,f(4,I) + (N+N')\,f(5,I) + (N_{,}-N)\,f(6,I)\\
& + (N_{,}'+N)\,f(7,I) + N_{,}''\,f(8,I) + N_{,}'''\,f(9,I)\\
& + (N_{,,}-N)\,f(10,I) + (N_{,,}'+N)\,f(11,I)
\end{aligned}$$

und für die vierte Station wird sie

$$0 = N_{,,} f(2,I) + N_{,,}' f(3,I) + N_{,,}'' f(4,I)$$

Durch die Substitution der numerischen Werthe kann man sich überzeugen, dass diesen Gleichungen in der That Gnüge geleistet wird.

86.

Berechnet man nun die Coefficienten der Endgleichungen, deren hier nur Eine vorhanden ist, wie immer, so findet man

$$(I,I) = 0.13637$$

und die Endgleichung ist also

$$0.13637\,(I) = -2''578$$

woraus

$$(I) = -18.90\ ,\ R_1 = 48.73$$

folgt. Die $z(r)_s$ werden hierauf

$z(3)_1 = 0$	$z(4)_4 = 0$
$z(5)_2 = 0$	$z(1)_4 = +0''714$
$z(3)_3 = 0$	$z(2)_4 = -0.451$
$z(4)_3 = +0''498$	$z(3)_4 = +0.159$
$z(2)_1 = -0.052$	
$z(1)_2 = +0.068$	
$z(2)_2 = +0.229$	
$z(3)_2 = -0.441$	
$z(4)_2 = +0.001$	
$z(1)_3 = -0.246$	
$z(2)_3 = -0.136$	

und mit Zuziehung der Werthe der $y(r)_s$ finden sich hieraus die wahrscheinlichsten Werthe der Richtungen

$x(1)_1 =$	59°	59′	59″102
$x(2)_1 =$	142	23	46.533
$x(3)_1 =$	193	40	9.496
$x(1)_2 =$	100	3	59.717
$x(2)_2 =$	142	36	39.799
$x(3)_2 =$	193	59	17.751
$x(4)_2 =$	282	31	43.146
$x(5)_2 =$	335	49	51.895

$$
\begin{aligned}
x(1)_3 &= 15^\circ\ 30'\ 30''431\\
x(2)_3 &= 70\ \ 34\ \ 5.789\\
x(3)_3 &= 270\ \ 18\ \ 3.898\\
x(4)_3 &= 293\ \ 17\ \ 45.989\\
x(1)_4 &= 204\ \ 8\ \ 29.503\\
x(2)_4 &= 250\ \ 33\ \ 12.598\\
x(3)_4 &= 332\ \ 37\ \ 47.801\\
x(4)_4 &= 41\ \ 51\ \ 14.229
\end{aligned}
$$

von welchen wieder $x(1)_1$ durch die Bedingungsgleichung berechnet worden ist.

87.

Für W steht die Berechnung so:

$$
\begin{aligned}
(ll,11) &= (ll) - 59.70\\
(ll,4)_4 &= (ll)_4 - 2.73\\
\hline
\Sigma(ll,n) &= \Sigma(ll) - 62.43\\
R_1 &= 48.73\\
\hline
W &= \Sigma(ll) - 13.70
\end{aligned}
$$

Wenn ein grosses Dreiecksnetz zu berechnen ist, so kann man durch Ausdehnung dieses Verfahrens auf mehrere Winkelgleichungen, die verschiedenen Gruppen von Stationen angehören, sich eine bedeutende Abkürzung der ganzen Rechnung verschaffen, die sich dadurch ausspricht, dass die Anzahl der Endgleichungen, die in ihrer Gesammtheit aufgelöst werden müssen, eine wesentlich kleinere wird. Aber man muss stets hiebei mit Umsicht verfahren, und den grade vorliegenden Fall in seinen Einzelnheiten genau erörtern, denn wenn man dieses unterlässt, so kann leicht geschehen, dass man sich die ganze Arbeit vergrössert.

88.

Es soll auch dieses Beispiel ausserdem nach dem allgemeinen Verfahren gerechnet werden, in welchem beide Bedingungsgleichungen dem zweiten Theile der Auflösung einverleibt werden. Die Auflösungen der Stationsgleichungen des Art. 77 geben, nachdem auf den Stationen (2) und (3) die Gleichungen, die nur Eine Unbekannte enthalten, den anderen voran gestellt worden sind:

St. (1).

$(1,1) = (1.34733)$, $(2,2,1) = (1.94939)$, $(3,3,2) = (1,42986)$

$w(1) = -0''778$

$w(2) = -0.095$

$w(3) = +0.956$, $(ll,3) = (ll) - 38.70$

$y(1) = 59^0\ 59'\ 59''222$

$y(2) = 142\ 23\ 46.505$

$y(3) = 193\ 40\ 9.496$

St. (2).

$(3)_2 = (8.75623)$, $(4)_2 = (9.23335)$

$(4)_3 = (9.32150)$, $(5)_3 = (8.45902n)$

$(5)_4 = (8.45902n)$

$(1,1) = (1.58357)$, $(4,4,3) = (1.53389)$

$(2,2,1) = (1.57113)$, $(5,5,4) = (1.48844)$

$(3,3,2) = (1.64953)$,

$w(5) = +0''295$

$w(1) = -0.270$

$w(2) = -0.294$

$w(3) = -0.204$

$w(4) = +0.345$, $(ll,5) = (ll) - 12.68$

$y(1) = 100^0\ 3'\ 59''730$

$y(2) = 142\ 36\ 40.075$

$y(3) = 193\ 59\ 17.312$

$y(4) = 282\ 31\ 43.145$

$y(5) = 335\ 49\ 51.895$

St. (3).

$(4)_3 = (8.70714)$

$(1,1) = (1.57978)$, $(3,3,2) = (1.76998)$

$(2,2,1) = (1.57978)$, $(4,4,3) = (1.61116)$

$w(3) = -\ 0''285$

$w(4) = +\ 0.263$

$w(1) = +\ 0.150$

$w(2) = -\ 0.198$, $(ll,4) = (ll) - 8.83$

$$y(1) = 15^{\circ}\ 30'\ 30''150$$
$$y(2) = 70\ 34\ 5.704$$
$$y(3) = 270\ 18\ 3.898$$
$$y(4) = 293\ 17\ 46.487$$

Die Ausgleichung auf der St. (4) bleibt dieselbe wie im Art. 82.

89.

Die Substitution der Werthe der $y(r)_s$ in die beiden Bedingungsgleichungen giebt jetzt

$$F(I) = +0''311\ ,\ F(II) = -2''658$$

und die Werthe der Hülfsgrössen zeigt die folgende Tafel:

r	s	$q(r,I)$	$q(r,II)$	$\log\eta(r,I)$	$\log\eta(r,II)$	$\log f(r,I)$	$\log f(r,II)$	Nr.
1	1	−1	—	0. n	—	8.6527n	—	1
2		+1	—	0.	—	8.0506	—	2
3		—	—	—	—	—	—	3
5	2	—	—	—	—	—	—	1
1		−1	—	0. n	—	8.4063n	7.4701	2
2		+1	−1	9.9745	0. n	8.3290	8.2450n	3
3		—	+1	8.4241	9.8978	6.9047	8.3638	4
4		—	—	8.4461n	7.7832	6.9577n	6.2948	5
3	3	—	—	—	—	—	—	1
4		—	−1	—	0. n	—	8.4202n	2
1		−1	+1	0. n	0.	8.1987n	8.2314	3
2		+1	—	9.9773	8.7071	8.3661	7.0959	4
4	4	—	—	—	—	—	—	1
1		—	−1	—	0. n	—	8.5770n	2
2		—	+1	—	0.0608	—	8.3777	3
3		—	—	—	9.4348n	—	7.9259n	4

Hieraus ergeben sich zuerst die Coefficienten der Unbekannten in den Endgleichungen:

$$(I,I) = 0.14204\ ,\ (I,II) = -0.03632$$
$$(II,II) = 0.14566$$

die mit den obigen Werthen von $F(I)$ und $F(II)$ verbunden,

$$(I) = -\ 2.642$$
$$(II) = -18.90\ ,\ R_2 = 49.41$$

geben. Man bekommt jetzt ferner

$$z(1)_1 = +0''119 \qquad z(5)_2 = 0$$
$$z(2)_1 = -0.030 \qquad z(1)_2 = +0''012$$
$$z(3)_1 = 0 \qquad z(2)_2 = +0.276$$

$$z(3)_2 = -0''439 \qquad z(2)_3 = -0''085$$
$$z(4)_2 = -0.001 \qquad z(4)_4 = 0$$
$$z(3)_3 = 0 \qquad z(1)_4 = +0.714$$
$$z(4)_3 = +0.497 \qquad z(2)_4 = -0.451$$
$$z(1)_3 = -0\ 280 \qquad z(3)_4 = +0.159$$

und hiemit schliesslich

$$x(1)_1 = 59^0\ 59'\ 59''103$$
$$x(2)_1 = 142\ 23\ 46.535$$
$$x(3)_1 = 193\ 40\ 9.496$$
$$x(1)_2 = 100\ 3\ 59.718$$
$$x(2)_2 = 142\ 36\ 39.799$$
$$x(3)_2 = 193\ 59\ 17.751$$
$$x(4)_2 = 282\ 31\ 43.146$$
$$x(5)_2 = 335\ 49\ 51.895$$
$$x(1)_3 = 15\ 30\ 30.430$$
$$x(2)_3 = 70\ 34\ 5.789$$
$$x(3)_3 = 270\ 18\ 3.898$$
$$x(4)_3 = 293\ 17\ 45.990$$
$$x(1)_4 = 204\ 8\ 29.503$$
$$x(2)_4 = 250\ 33\ 12.598$$
$$x(3)_4 = 332\ 37\ 47.801$$
$$x(4)_4 = 41\ 51\ 14.229$$

die mit den Werthen des Art. 86, die das neue Verfahren gegeben hat, übereinstimmen.

90.

Für W ergiebt sich jetzt

$$(ll,3)_1 = (ll)_1 - 38.70$$
$$(ll,5)_2 = (ll)_2 - 12.68$$
$$(ll,4)_3 = (ll)_3 - 8.83$$
$$(ll,4)_4 = (ll)_4 - 2.73$$
$$\Sigma(ll,n) = \Sigma(ll) - 62.94$$
$$R_2 = 49.41$$
$$W = \Sigma(ll) - 13.53$$

von dem Werthe des Art. 87 nur um 0.17 verschieden, indem in beiden Verfahrungsarten die $\Sigma(ll)$ einander gleich sind.

SUPPLEMENT

ZU DER

GEODÄTISCHE UNTERSUCHUNGEN

BENANNTEN ABHANDLUNG

DIE

REDUCTION DER WINKEL EINES SPHÄROIDISCHEN DREIECKS BETREFFEND.

VON

P. A. HANSEN.

Die Ausdrücke, die ich in der »Geodätische Untersuchungen« benannten Abhandlung für die Reduction der Winkel eines sphäroidischen Dreiecks auf die eines ebenen oder sphärischen Dreiecks gegeben habe, sind bis auf Grössen sechster und bez. achter Ordnung richtig, und die ersten, deren Genauigkeit so weit reicht. Sie reichen für Dreiecke von mässiger Grösse vollständig aus, während sie für solche Dreiecke, die an der Grenze der überhaupt möglichen Anwendung solcher Ausdrücke liegen, schon merkliche Unterschiede von den strenge berechneten Winkeln geben. Ich habe dieses in der Abhandlung durch Hinzufügung von numerischen Beispielen offen dargelegt.

Schon längst war es mein Wunsch, diese Ausdrücke, wo möglich, durch andere zu ersetzen, die an der Grenze der Anwendbarkeit genauere Resultate gäben, und habe vor einiger Zeit dieses Ziel erreicht. Ich habe einen neuen Ausdruck gefunden, der dieselbe analytische Genauigkeit besitzt als die eben erwähnten Ausdrücke, dabei sich in einer überraschenden Einfachheit, sowohl in seiner allgemeinen Form, wie in seiner Anwendung auf das Revolutionsellipsoid darstellt, und weit genauere Resultate an der Grenze der Anwendbarkeit giebt als die eben erwähnten Ausdrücke, oder mit anderen Worten einer ausgedehnteren Anwendbarkeit fähig ist.

Das gegenwärtige Supplement zu der oben angezogenen Abhandlung ist dazu bestimmt, die Ableitung dieses Ausdrucks, den ich schon ohne Beweis in den Berichten der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu veröffentlichen besondere Veranlassung hatte, zu geben, und an einigen Beispielen die Genauigkeit, die er gewährt, darzulegen.

Da in diesem Ausdruck der Schwerpunkt des allgemeinen, auf unbestimmter Oberfläche liegenden, Dreiecks in Betracht kommt, so musste

vor Allem die Lage des Schwerpunkts eines solchen Dreiecks untersucht und ermittelt werden, welches noch Nirgends geschehen ist. Es war hiebei erforderlich, nicht blos die abstracten Ausdrücke, die den Schwerpunkt bestimmen, abzuleiten, sondern ein synthetisches Verfahren anzugeben, durch welches in jedem Falle der Schwerpunkt construirt werden kann. Ein solches Verfahren gewährt der im § 1 bewiesene Lehrsatz.

Im § 2, welcher hierauf die Auflösung der eigentlichen Aufgabe enthält, wird zuerst gezeigt, dass das mit δ bezeichnete Krümmungsmaass für gewisse Klassen von Oberflächen der normalen Projection des Schwerpunkts des in Betracht stehenden Dreiecks auf der betreffenden Oberfläche entspricht, für andere Klassen von Oberflächen aber diese Bedeutung nicht, oder wenigstens nur beiläufig, in Anspruch nehmen kann. Es wird aber zugleich gezeigt, dass diese Umstände keinen Einfluss auf die zu entwickelnden Ausdrücke ausüben, und die Genauigkeit derselben nicht im Geringsten beeinträchtigen.

Es werden ferner unter den Bezeichnungen β_1 und γ_1 noch zwei andere Krümmungsmaasse eingeführt, die dem ersten Drittel der am Winkel A des Dreiecks anliegenden Seiten bis auf Grössen dritter Ordnung angehören; ausserdem werden die früher benutzten Krümmungsmaasse, die den Winkelpunkten des Dreiecks entsprechen, beibehalten. Die drei durch die neuen Krümmungsmaasse δ, β_1, γ_1 entstehenden Gleichungen besitzen die Eigenschaft, dass durch ihre Anwendung aus dem allgemeinen Ausdruck für die Reduction der Winkel des sphäroidischen Dreiecks auf die des ebenen oder des sphärischen Dreiecks sieben Coefficienten eliminirt werden können, und diese Eigenschaft ist die Hauptveranlassung zur grossen Einfachheit des Endresultats, zu welcher übrigens auch der Umstand einen Beitrag liefert, dass die Krümmungsmaasse β_1 und γ_1 nicht genau dem Drittel der betreffenden Seiten angehören. Statt der Einen, in den »Berichten u. s. w.« angeführten Endformel leite ich hier drei für die Reduction auf das ebene, und drei andere für die Reduction auf das sphärische Dreieck ab, von welchen die letzte die übrigen noch an Einfachheit übertrifft.

In Bezug auf das Revolutionsellipsoid, welches im § 3 abgehandelt wird, findet dieselbe Einfachheit statt.

Der § 4, in welchem die Probedreiecke, die ich in der angezogenen Abhandlung aufgestellt habe, wieder als Beispiele benutzt werden, zeigt,

dass der neue, hier entwickelte, Ausdruck in der That eine weit grössere Genauigkeit gewährt, wie die früheren zu demselben Zwecke entwickelten Ausdrücke.

In Nr. 1733 der Astr. Nachrichten hat Weingarten einen Aufsatz abdrucken lassen, der dieselbe Aufgabe behandelt, und mit solchen Bemerkungen und Ausdrücken versehen ist, dass jeder, welcher der deutlich durchblickenden Ansicht des Verf. derselben folgen will, eine sehr hohe Meinung von dieser Arbeit bekommen muss. Als Hauptresultat dieses Aufsatzes muss eine allgemeine Formel für die Reduction der Winkel eines sphäroidischen Dreiecks angesehen werden, welcher der Verf. die Richtigkeit bis auf Grössen fünfter Ordnung (excl.) vindicirt. Ob diese Formel nun im Sinne von Gauss, wie der Verf. nicht undeutlich zu verstehen giebt, gehalten ist oder nicht, will ich dahin gestellt lassen, obgleich sich Erhebliches dagegen einwenden lässt, aber Thatsache ist, dass sie, wenn man auch von anderen, hier in Betracht kommenden, Umständen absehen will, schon ihrer ungemeinen Verwickelung wegen, nicht einmal die Vergleichung mit einer schon vorher von Hrn. Schering veröffentlichten Formel, die bis auf Grössen fünfter Ordnung richtig ist, bestehen kann. Weniger noch ist dieses in Bezug auf den hier entwickelten Ausdruck der Fall, der ungeachtet seiner Einfachheit eine Ordnung genauer ist.

In demselben Aufsatze kommt auch ein sich auf das Revolutionsellipsoid beziehender Ausdruck vor, dessen Anwendung der Verf. in den bestimmtesten Ausdrücken für geboten erachtet. Dieser Ausdruck, welcher die Glieder bis auf Grössen achter Ordnung enthält, kann unmöglich aus einem nur bis auf Grössen fünfter Ordnung gehenden allgemeinen Ausdruck abgeleitet worden sein, und ist in der That auch nur eine einfache Transformation eines der Ausdrücke meiner mehrmals angezogenen Abhandlung, wie ich in den »Berichten u. s. w.« nachgewiesen habe. Wenn diese Transformation nun genauere Resultate gäbe, als der Ausdruck, aus welchem sie hervor geht, so wäre schon etwas gewonnen, aber sie giebt weniger genaue Resultate. Die Vergleichung vollends mit den Resultaten, die der in diesem Supplement entwickelte Ausdruck giebt, zeigt die auffallendsten Unterschiede, wie am Schlusse des § 4 zu ersehen ist. Wo z. B. das Resultat meines Ausdrucks von dem strenge berechneten Werthe der Reduction des betr. Winkels nur 0″001 abweicht, steigt diese Abweichung, wenn man sich des Ausdrucks

bedient, den der genannte Verf. angewandt wissen will, bis auf 0″027, in einem anderen Falle, wo mein Ausdruck nur 0″009 Abweichung giebt, erhält man aus jenem 0″069, u. s. w Diese Angaben genügen schon, um den geringen Werth jenes Ausdrucks zu erkennen.

---

§ 1. Bestimmung des Schwerpunkts eines sphäroidischen Dreiecks von kleinen Seiten.

1.

Aus der Mechanik ist bekannt, dass die rechtwinkligen Coordinaten x', y', z' des Schwerpunkts irgend einer Figur auf irgend einer beliebigen Oberfläche durch die folgenden Ausdrücke erhalten werden,

$$x' = \frac{\int\int x\, d\omega}{\int\int d\omega} \quad , \quad y' = \frac{\int\int y\, d\omega}{\int\int d\omega} \quad , \quad z' = \frac{\int\int z\, d\omega}{\int\int d\omega}$$

in welchen x, y, z überhaupt die auf dieselben Achsen wie x', y', z' bezogenen rechtwinkligen Coordinaten irgend eines Punkts der Oberfläche, und $d\omega$ das Flächenelement derselben sind.

2.

Gehen wir von irgend einem Punkt A der Oberfläche aus, und nennen σ eine beliebige, von diesem Punkt ausgehende kürzeste Linie auf dieser Oberfläche, so kann man, wenn σ als eine kleine Grösse erster Ordnung betrachtet wird,

$$x = x_0 + \left(\frac{dx}{d\sigma}\right)_0 \sigma + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2x}{d\sigma^2}\right)_0 \sigma^2 + \tfrac{1}{6}\left(\frac{d^3x}{d\sigma^3}\right)_0 \sigma^3 + \ldots$$

$$y = y_0 + \left(\frac{dy}{d\sigma}\right)_0 \sigma + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{d\sigma^2}\right)_0 \sigma^2 + \tfrac{1}{6}\left(\frac{d^3y}{d\sigma^3}\right)_0 \sigma^3 + \ldots$$

$$z = z_0 + \left(\frac{dz}{d\sigma}\right)_0 \sigma + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2z}{d\sigma^2}\right)_0 \sigma^2 + \tfrac{1}{6}\left(\frac{d^3z}{d\sigma^3}\right)_0 \sigma^3 + \ldots$$

setzen, wo die mit dem Index 0 versehenen Functionen sich auf den Punkt A beziehen. Zu bemerken ist noch, dass diese Ausdrücke der Gleichung der Oberfläche gnügen müssen. und dass also, wenn diese bekannt ist, man mittelst derselben aus irgend zwei der vorstehenden Gleichungen die dritte erhalten kann.

Setzt man überhaupt

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = p \ , \ \left(\frac{dz}{dy}\right) = q$$

so ist bekanntlich die Differentialgleichung jeder beliebigen Oberfläche

$$dz = pdx + qdy$$

und die Bedingungsgleichungen für irgend eine kürzeste Linie auf dieser Oberfläche sind

$$\left(\frac{d^2x}{d\sigma^2}\right) + p\left(\frac{d^2z}{d\sigma^2}\right) = 0$$

$$\left(\frac{d^2y}{d\sigma^2}\right) + q\left(\frac{d^2z}{d\sigma^2}\right) = 0$$

Aus diesen Gleichungen kann man die in den Ausdrücken für x, y, z enthaltenen Differentialquotienten ermitteln.

3.

Legen wir den Anfangspunkt der Coordinaten in den Punkt A der Oberfläche und machen die Berührungsebenen in diesem Punkt zur Ebene der xy. Die Achse der z ist also die Normale in demselben Punkt, und die positiven z sollen an der concaven Seite der Oberfläche liegen. Die Achsen der x und des y sollen in den Hauptkrümmungsebenen liegen.

Durch die eben eingeführten Bestimmungen wird bewirkt, dass

$$x_0 = 0 \ , \ y_0 = 0 \ , \ z_0 = 0$$

$$p_0 = 0 \ , \ q_0 = 0$$

werden, wenn ebenfalls unter p_0 und q_0 die Werthe dieser Functionen für den Punkt A verstanden werden. Bezeichnet man mit χ den Winkel, den das erste Element der Linie σ mit dem positiven Theil der Achse der x macht, so werden

$$\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)_0 = \cos\chi \ , \ \left(\frac{dy}{d\sigma}\right)_0 = \sin\chi \ , \ \left(\frac{dz}{d\sigma}\right)_0 = 0$$

womit die zwei ersten Glieder der Ausdrücke für x, y, z des vor. Art. bestimmt sind.

4.

Um die übrigen Glieder dieser Ausdrücke zu erhalten, giebt die Differentialgleichung der Oberfläche unmittelbar

$$\left(\frac{dz}{d\sigma}\right) = p\left(\frac{dx}{d\sigma}\right) + q\left(\frac{dy}{d\sigma}\right)$$

neben welcher die Differentialgleichungen der kürzesten Linie

$$\left(\frac{d^2x}{d\sigma^2}\right) + p\left(\frac{d^2z}{d\sigma^2}\right) = 0$$

$$\left(\frac{d^2y}{d\sigma^2}\right) + q\left(\frac{d^2z}{d\sigma^2}\right) = 0$$

benutzt werden müssen. Durch fortgesetzte Differentiationen dieser Gleichungen, und wenn man

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = r \ , \ \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) = s \ , \ \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = t$$

setzt, bekommt man allgemein

$$\left(\frac{d^2z}{d\sigma^2}\right) = p\left(\frac{d^2x}{d\sigma^2}\right) + q\left(\frac{d^2y}{d\sigma^2}\right) + r\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2 + 2s\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)\left(\frac{dy}{d\sigma}\right) + t\left(\frac{dy}{d\sigma}\right)^2$$

etc.

$$\left(\frac{d^2x}{d\sigma^2}\right) + p\left(\frac{d^2z}{d\sigma^2}\right) + r\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)\left(\frac{d^2z}{d\sigma^2}\right) + s\left(\frac{dy}{d\sigma}\right)\left(\frac{d^2z}{d\sigma^2}\right) = 0$$

$$\left(\frac{d^2y}{d\sigma^2}\right) + q\left(\frac{d^2z}{d\sigma^2}\right) + s\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)\left(\frac{d^2z}{d\sigma^2}\right) + t\left(\frac{dy}{d\sigma}\right)\left(\frac{d^2z}{d\sigma^2}\right) = 0$$

etc.

die man fortsetzen kann so weit man will; die vorstehenden gnügen indess zur Erlangung der hier beabsichtigten Genauigkeit.

Beziehen wir die vorstehenden Ausdrücke auf den Punkt A, und schreiben für diesen auch r_0, s_0, t_0 statt r, s, t, so ergeben sich, wenn man erwägt, dass, zufolge der festgesetzten Lage der Achsen der x und der y, $s_0 = 0$ ist,

$$\left(\frac{d^2x}{d\sigma^2}\right)_0 = 0$$

$$\left(\frac{d^2y}{d\sigma^2}\right)_0 = 0$$

$$\left(\frac{d^2z}{d\sigma^2}\right)_0 = r_0\cos^2\chi + t_0\sin^2\chi$$

$$\left(\frac{d^2x}{d\sigma^2}\right)_0 = -\, r_0 \cos\chi\,(r_0 \cos^2\chi + t_0 \sin^2\chi)$$

$$\left(\frac{d^2y}{d\sigma^2}\right)_0 = -\, t_0 \sin\chi\,(r_0 \cos^2\chi + t_0 \sin^2\chi)$$

die in die Ausdrücke für x, y, z des Art. 2 zu substituiren sind.

5.

Bevor wir diese Substitution ausführen, machen wir darauf aufmerksam, dass wir, um alle möglichen, vom Punkt A ausgehenden, kürzesten Linien auf der Oberfläche zu umfassen, χ als einen veränderlichen Winkel betrachten müssen, und dass jede dieser kürzesten Linien sich von allen übrigen durch den Werth, der χ beigelegt worden ist, unterscheidet. Um an der Allgemeinheit nichts zu vergeben, muss χ aus zwei Bögen zusammen gesetzt werden, aus einem constanten v, und einem veränderlichen φ, so dass

$$\chi = v + \varphi$$

wird. Der Bogen v hat für alle vom Punkt A aus gezogenen kürzesten Linien denselben Werth und kann als der Winkel definirt werden, den in der Reihenfolge der verschiedenen kürzesten Linien, die man ziehen will, das erste Element der ersten dieser Linien mit der positiven Achse der x macht. Der Winkel φ hingegen hat für jede kürzeste Linie einen andern Werth, und bestimmt daher in Verbindung mit v die Lage derselben auf der Oberfläche. Für die kürzeste Linie, die eben die erste genannt wurde, ist $\varphi = 0$. Führt man $v + \varphi$ in die obigen Ausdrücke der Differentialquotienten ein, setzt

$$R = r_0 \cos^2 v + t_0 \sin^2 v$$

$$S = (t_0 - r_0) \sin v \cos v$$

$$T = r_0 \sin^2 v + t_0 \cos^2 v$$

und substituirt hierauf in die Ausdrücke der Coordinaten, so ergeben sich diese, nachdem man die Achsen der x und y um den Winkel v gedreht hat,

$$x = \sigma \cos\varphi - \tfrac{1}{6}\sigma^3 K\,(R\cos\varphi + S\sin\varphi)$$

$$y = \sigma \sin\varphi - \tfrac{1}{6}\sigma^3 K\,(S\cos\varphi + T\sin\varphi)$$

$$z = \tfrac{1}{2}\sigma^2 K$$

wo zur Abkürzung

$$K = R\cos^2\varphi + 2S\sin\varphi\cos\varphi + T\sin^2\varphi$$

gesetzt worden ist.

6.

Um die eben erhaltenen allgemeinen Ausdrücke der Coordinaten in Function der auf der Oberfläche gezogenen kürzesten Linien k und h darzustellen, muss man sich der Ausdrücke des Art. 118 der Abhandlung »Geodätische Untersuchungen« bedienen, die hier in die folgenden abgekürzt werden können,

$$\sigma\cos\varphi = k - \tfrac{1}{3} r_0 t_0 kh^2$$
$$\sigma\sin\varphi = h + \tfrac{1}{6} r_0 t_0 k^2 h$$

welche, da aus dem Vorhergehenden folgt, dass

$$r_0 t_0 = RT - S^2$$

wird, für den gegenwärtigen Zweck in

$$\sigma\cos\varphi = k - \tfrac{1}{3} RT kh^2 + \tfrac{1}{3} S^2 kh^2$$
$$\sigma\sin\varphi = h + \tfrac{1}{6} RT k^2 h - \tfrac{1}{6} S^2 k^2 h$$

übergehen. Die Substitution giebt

$$x = k - \tfrac{1}{6} R^2 k^3 - \tfrac{1}{2} RS k^2 h - \tfrac{1}{2} RT kh^2 - \tfrac{1}{6} ST h^3$$
$$y = h - \tfrac{1}{6} RS k^3 - \tfrac{1}{2} S^2 k^2 h - \tfrac{1}{2} ST kh^2 - \tfrac{1}{6} T^2 h^3$$

aus welchen sich durch die Umkehrung

$$k = x + \tfrac{1}{6} R^2 x^3 + \tfrac{1}{2} RS x^2 y + \tfrac{1}{2} RT xy^2 + \tfrac{1}{6} ST y^3$$
$$h = y + \tfrac{1}{6} RS x^3 + \tfrac{1}{2} S^2 x^2 y + \tfrac{1}{2} ST xy^2 + \tfrac{1}{6} T^2 y^3$$

ergeben. Die Gleichung der allgemeinen Oberfläche folgt aus den Ausdrücken der Coordinaten des vor. Art., soweit wir sie hier brauchen,

$$z = \tfrac{1}{2} Rx^2 + Sxy + \tfrac{1}{2} Ty^2$$

und folglich werden

$$p = Rx + Sy \quad , \quad q = Sx + Ty$$

7.

Das Flächenelement der Oberfläche, welches mit $d\omega$ bezeichnet werden soll, hat folgenden Ausdruck:

$$d\omega = m\, d\varphi\, d\sigma$$

(s. Geod. Unt. Art. 119), und mit der hier erforderlichen Genauigkeit ist

$$m = \sigma - \tfrac{1}{6} r_0 t_0 \sigma^3$$

(s. Geod. Unt. Art. 114), also hier

$$m = \sigma - \tfrac{1}{6} RT\sigma^3 + \tfrac{1}{6} S^2\sigma^3$$

Es werden folglich

$$x\,d\omega = \{\sigma^2 \cos\varphi - \tfrac{1}{6}\sigma^4(KR + RT - S^2)\cos\varphi - \tfrac{1}{6}\sigma^4 KS \sin\varphi\}\, d\varphi\, d\sigma$$

$$y\,d\omega = \{\sigma^2 \sin\varphi - \tfrac{1}{6}\sigma^4 KS \cos\varphi - \tfrac{1}{6}\sigma^4(KT + RT - S^2)\sin\varphi\}\, d\varphi\, d\sigma$$

$$z\,d\omega = \tfrac{1}{2}\sigma^3 K\, d\varphi\, d\sigma$$

$$d\omega = \{\sigma - \tfrac{1}{6}\sigma^3 RT + \tfrac{1}{6}\sigma^3 S^2\}\, d\varphi\, d\sigma$$

Denken wir uns nun auf der Oberfläche zwei rechtwinklige Dreiecke, die beide den Punkt A zum Scheitel des Einen ihrer Winkel, und die gemeinschaftliche Kathete k haben, während die anderen Katheten bezüglich h und h', und die Hypotenusen die betreffenden Werthe von σ sind. Der Unterschied dieser beiden Dreiecke giebt ein allgemeines schiefwinkliges Dreieck, von welchem wir durch die erste Integration der vorstehenden Ausdrücke, wenn wir sie in Bezug auf σ ausführen, und dabei φ constant setzen, irgend einen unendlich kleinen, zwischen φ und $\varphi + d\varphi$ enthaltenen Streifen umfassen. Drücken wir hierauf diese ersten Integrale durch k, h und dh aus, und integriren zum zweiten Male von $h = h'$ bis $h = h$, so umfassen wir die ganze Dreiecksfläche (s. Geod. Unt. Art. 119). Die beschriebene erste Integration giebt

$$\int x\,d\omega = \{\tfrac{1}{3}\sigma\cos\varphi - \tfrac{1}{30}\sigma^3(KR + RT - S^2)\cos\varphi - \tfrac{1}{30}\sigma^3 KS\sin\varphi\}\sigma^2\, d\varphi$$

$$\int y\,d\omega = \{\tfrac{1}{3}\sigma\sin\varphi - \tfrac{1}{30}\sigma^3 KS\cos\varphi - \tfrac{1}{30}\sigma^3(KT + RT - S^2)\sin\varphi\}\sigma^2\, d\varphi$$

$$\int z\,d\omega = \tfrac{1}{8}\sigma^2 K\cdot\sigma^2\, d\varphi$$

$$\int d\omega = (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{24} RT\sigma^2 + \tfrac{1}{24} S^2\sigma^2)\sigma^2\, d\varphi$$

wo die Integrationsconstanten Null sind, da die Integrale von $\sigma = 0$ anfangen müssen. Führt man hierin k, h, dh durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\sigma \cos\varphi &= k - \tfrac{1}{2} RT\, kh^2 + \tfrac{1}{2} S^2 k h^2 \\
\sigma \sin\varphi &= h + \tfrac{1}{6} RT\, k^2 h - \tfrac{1}{6} S^2 k^2 h \\
\sigma^2 &= k^2 + h^2 \\
\sigma^2 d\varphi &= \{k + \tfrac{1}{6} RT\, k^3 - \tfrac{1}{6} S^2 k^3 \\
&\qquad + \tfrac{1}{3} RT\, kh^2 - \tfrac{1}{3} S^2 kh^2\} dh
\end{aligned}$$

ein, so werden sie

$$\begin{aligned}
\int x\, d\omega &= \{\tfrac{1}{3} k^2 + \tfrac{1}{90}(2RT - 2S^2 - 3R^2) k^4 - \tfrac{1}{10} RS\, k^3 h \\
&\qquad - \tfrac{1}{30}(2RT + S^2) k^2 h^2 - \tfrac{1}{30} ST\, kh^3\} dh \\
\int y\, d\omega &= \{\tfrac{1}{3} kh - \tfrac{1}{30} RS\, k^4 + \tfrac{1}{90}(4RT - 13S^2) k^3 h \\
&\qquad - \tfrac{1}{10} ST\, k^2 h^2 + \tfrac{1}{90}(7RT - 7S^2 - 3T^2) kh^3\} dh \\
\int z\, d\omega &= \tfrac{1}{8}\{R k^3 + 2S k^2 h + T kh^2\} dh \\
\int d\omega &= \tfrac{1}{2}\{k + \tfrac{1}{12}(RT - S^2) k^3 + \tfrac{1}{4}(RT - S^2) kh^2\} dh
\end{aligned}$$

8.

Die zweite Integration giebt hierauf zwischen den oben bezeichneten Grenzen

$$\begin{aligned}
\iint x\, d\omega &= \tfrac{1}{3} k^2 (h - h') + \tfrac{1}{90}(2RT - 2S^2 - 3R^2) k^4 (h - h') - \tfrac{1}{20} RS\, k^3 (h^2 - h'^2) \\
&\qquad - \tfrac{1}{90}(2RT + S^2) k^2 (h^3 - h'^3) - \tfrac{1}{120} ST\, k (h^4 - h'^4) \\
\iint y\, d\omega &= \tfrac{1}{6} k (h^2 - h'^2) - \tfrac{1}{30} RS\, k^4 (h - h') + \tfrac{1}{180}(4RT - 13S^2) k^3 (h^2 - h'^2) \\
&\qquad - \tfrac{1}{30} ST\, k^2 (h^3 - h'^3) + \tfrac{1}{360}(7RT - 7S^2 - 3T^2) k (h^4 - h'^4) \\
\iint z\, d\omega &= \tfrac{1}{8} R k^3 (h - h') + \tfrac{1}{8} S k^2 (h^2 - h'^2) + \tfrac{1}{24} T k (h^3 - h'^3) \\
\iint d\omega &= \tfrac{1}{2} k (h - h') + \tfrac{1}{24}(RT - S^2) k^3 (h - h') + \tfrac{1}{24}(RT - S^2) k (h^3 - h'^3)
\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
\iint x\, d\omega &= \tfrac{1}{3} k^2 (h - h')\{1 + \tfrac{1}{30}(2RT - 2S^2 - 3R^2 k^2 - \tfrac{3}{20} RSk (h + h') \\
&\qquad - \tfrac{1}{30}(2RT + S^2)(h^2 + hh' + h'^2) - \tfrac{1}{40} \tfrac{ST}{k} (h^3 + h^2 h' + hh'^2 + h'^3)\} \\
\iint y\, d\omega &= \tfrac{1}{6} k (h^2 - h'^2)\{1 - \tfrac{1}{5} RS\, \tfrac{k^3}{h + h'} + \tfrac{1}{30}(4RT - 13S^2) k^2 \\
&\qquad - \tfrac{1}{5} ST k\, \tfrac{h^3 + hh' + h'^3}{h + h'} + \tfrac{1}{60}(7RT - 7S^2 - 3T^2)(h^2 + h'^2)\}
\end{aligned}$$

$$\iint z\,d\omega = \tfrac{1}{8}k(h-h')\{Rk^2 + Sk(h+h') + \tfrac{1}{3}T(h^2+hh'+h'^2)\}$$

$$\iint d\omega = \tfrac{1}{2}k(h-h')\{1 + \tfrac{1}{12}(RT-S^2)k^2 + \tfrac{1}{12}(RT-S^2)(h^2+hh'+h'^2)\}$$

womit die Fundamentalgleichungen des Art. 1

$$x' = \tfrac{2}{3}k\{1 - \tfrac{1}{60}(RT-S^2+6R^2)k^2 - \tfrac{3}{20}RSk(h+h')$$
$$- \tfrac{1}{20}(3RT-S^2)(h^2+hh'+h'^2) - \tfrac{1}{40}\frac{ST}{k}(h^3+h^2h'+hh'^2+h'^3)\}$$

$$y' = \tfrac{1}{3}(h+h')\{1 - \tfrac{1}{5}RS\frac{k^2}{h+h'} + \tfrac{1}{20}(RT-7S^2)k^2 - \tfrac{1}{5}STk\frac{h^3+hh'+h'^3}{h+h'}$$
$$+ \tfrac{1}{60}(2RT-2S^2-3T^2)(h^2+h'^2) - \tfrac{1}{12}(RT-S^2)hh'\}$$

$$z' = \tfrac{1}{4}\{Rk^2 + Sk(h+h') + \tfrac{1}{3}T(h^2+hh'+h'^2)\}$$

geben, welche die gesuchten Ausdrücke der rechtwinkligen und gradlinigen Coordinaten des Schwerpunkts des allgemeinen Dreiecks sind. Wenn auf der Oberfläche, auf welcher das Dreieck liegt, innerhalb desselben Stetigkeitsunterbrechungen vorkommen, so werden die Integrale im Allgemeinen aus zwei oder mehr, den obigen ähnlichen, Theilen bestehen, da man bei den Integrationen alsdann zwischen den eigentlichen Grenzen der Integrale, bei jeder Stetigkeitsunterbrechung Zwischengrenzen einlegen muss; diese Fälle sollen indess hier nicht in Betracht gezogen werden.

9.

Mit dem Vorhergehenden ist eigentlich schon die in der Ueberschrift dieses § aufgestellte Aufgabe gelöst, allein diese Lösung ist in der Form, die ihr gegeben worden ist, der Anwendung, die hier davon gemacht werden soll, nicht zugänglich. Sie muss, um angewandt werden zu können, construirt werden, es muss, mit anderen Worten, ein Verfahren abgeleitet werden, durch welches man den Schwerpunkt synthetisch finden kann. Zu dem Ende wollen wir zuerst die Coordinaten der normalen Projection des Schwerpunkts auf der Oberfläche selbst ableiten.

Ziehen wir eine Normale durch den Schwerpunkt an die Oberfläche. Die Gleichungen dieser Normale sind offenbar

$$x' - x_1 + p_1(z'-z_1) = 0$$
$$y' - y_1 + q_1(z'-z_1) = 0$$

wenn $x_,$, $y_,$, $z_,$ die Coordinaten des Punkts der Oberfläche sind, in welchem diese von der Normale geschnitten wird, und auch $p_,$ und $q_,$ sich auf diesen Durchschnittspunkt beziehen müssen. Die beiden vorstehenden Gleichungen reichen aber für diese Bestimmung nicht aus, sondern es muss noch die Gleichung der Oberfläche hinzugezogen werden, und diese ist schon im Art. 6 mit der hier erforderlichen Genauigkeit abgeleitet worden. Für den genannten Durchschnittspunkt ergiebt sich

$$z_, = \tfrac{1}{2} R x_,^2 + S x_, y_, + \tfrac{1}{2} T y_,^2$$

und ausserdem

$$p_, = R x_, + S y_, \quad , \quad q_, = S x_, + T y_,$$

Nach der Substitution dieser, so wie der Ausdrücke des vor. Art. für x', y', z' in die Gleichungen der Normale erhält man durch eine leichte Reduction

$$x_, = \tfrac{2}{3} k \{1 - \tfrac{1}{180}(3RT + 13R^2) k^2 - \tfrac{1}{1260} RSk(h+h') - \tfrac{1}{90} RT(11h^2 + 16hh' + 11h'^2)$$
$$+ \tfrac{1}{3780} S^2(6k^2 + 23h^2 + 28hh' + 23h'^2) - \tfrac{1}{3780} \frac{ST}{k}(4h^3 + 9h^2h' + 9hh'^2 + 4h'^3)\}$$

$$y_, = \tfrac{1}{3}(h+h') \{1 - \tfrac{1}{90} RS \frac{k^2}{h+h'} - \tfrac{1}{1890} S^2(53k^2 + 6h^2 - 15hh' + 6h'^2) - \tfrac{1}{630} STk \frac{7h^2 + 12hh' + 7h'^2}{h+h'} -$$
$$+ \tfrac{1}{1890} RT(14k^2 + 6h^2 - 15hh' + 6h'^2) - \tfrac{1}{1890} T^2(4h^2 + 5hh' + 4h'^2)\}$$

$$z_, = \tfrac{1}{18} \{4Rk^2 + 4Sk(h+h') + T(h+h')^2\}$$

und die normale Entfernung des Schwerpunkts von der Oberfläche wird =

$$\sqrt{(x'-x_,)^2 + (y'-y_,)^2 + (z'-z_,)^2}$$
$$= \tfrac{1}{15} \{Rk^2 + Sk(h+h') + T(h^2 - hh' + h'^2)\}$$

Hiemit ist eine von der vorhergehenden verschiedene Bestimmung der Lage des Schwerpunkts erlangt, die zu noch anderen Bestimmungen führen wird.

10.

Wir wollen jetzt eine kürzeste Linie auf der Oberfläche ziehen, die durch den Punkt A und die eben erhaltene Projection des Schwerpunkts gehen soll. Die allgemeinen Coordinaten dieser Linie sollen wieder mit x und y, und die Länge derselben in irgend einem ihrer Punkte, von A

an gerechnet, mit σ bezeichnet werden. Nehmen wir nun σ als unabhängige Veränderliche an, so können wir die Gleichungen der gesuchten Linie in der folgenden Form aufstellen,

$$x = a\sigma + b\sigma^2 + c\sigma^3 + \ldots$$
$$y = a'\sigma + b'\sigma^2 + c'\sigma^3 + \ldots$$

in welchen die unbestimmten Coefficienten a, b, c, etc. a', b', c', etc. so bestimmt werden müssen, dass diese Ausdrücke von x und y die Integrale der Gleichungen

$$\left(\frac{d^2x}{d\sigma^2}\right) + p\left(\frac{d^2z}{d\sigma^2}\right) = 0$$
$$\left(\frac{d^2y}{d\sigma^2}\right) + q\left(\frac{d^2z}{d\sigma^2}\right) = 0$$

werden.

Die im Art. 6 erhaltenen allgemeinen Werthe von p und q geben im gegenwärtigen Falle

$$p = (Ra + Sa')\sigma + (Rb + Sb')\sigma^2 + \ldots$$
$$q = (Sa + Ta')\sigma + (Sb + Tb')\sigma^2 + \ldots$$

und die dort erhaltene Gleichung der allgemeinen Oberfläche giebt

$$z = \tfrac{1}{2}(Ra^2 + 2Saa' + Ta'^2)\sigma^2 + \ldots$$

Durch die Substitution dieser Ausdrücke in die vorstehenden Differentialgleichungen erhält man

$$b = 0$$
$$b' = 0$$
$$c = -\tfrac{1}{6}Ra\{Ra^2 + 2Saa' + Ta'^2\} - \tfrac{1}{6}Sa'\{Ra^2 + 2Saa' + Ta'^2\}$$
$$c' = -\tfrac{1}{6}Sa\{Ra^2 + 2Saa' + Ta'^2\} - \tfrac{1}{6}Ta'\{Ra^2 + 2Saa' + Ta'^2\}$$

also

$$x = a\sigma - \tfrac{1}{6}\{R^2a^3 + 3RSa^2a' + (RT + 2S^2)aa'^2 + STa'^3\}\sigma^3$$
$$y = a'\sigma - \tfrac{1}{6}\{RSa^3 + (RT + 2S^2)a^2a' + 3STaa'^2 + T^2a'^3\}\sigma^3$$

wo a und a' willkührlich sind. Aus diesem Grunde, und weil die beiden anderen willkührlichen Constanten, die den Integralen zukommen, schon anfänglich durch die Bedingung verschwunden sind, dass die

gesuchte Linie durch den Anfangspunkt A der Coordinaten gehen soll, sind die vorstehenden Gleichungen die allgemeinen Integrale unserer Differentialgleichungen.

Um auch die Bedingung zu erfüllen, dass die gesuchte Linie durch die Projection des Schwerpunkts gehe, sei σ' der Werth von σ für diesen Punkt, so dass für denselben

$$x_{,} = a\sigma' - \tfrac{1}{6}\{R^2a^3 + 3RSa^2a' + (RT + 2S^2)aa'^2 + STa'^3\}\sigma'^3$$
$$y_{,} = a'\sigma' - \tfrac{1}{6}\{RSa^3 + (RT + 2S^2)a^2a' + 3STaa'^2 + T^2a'^3\}\sigma'^3$$

werden. Die Vergleichung mit den Ausdrücken für $x_{,}$ und $y_{,}$ des vor. Art. bestimmt die willkührlichen Constanten a und a', und man erhält hierauf

$$x = \tfrac{2}{3}k\{1 - \tfrac{1}{540}(9RT - 9S^2 - R^2)k^2 + \tfrac{1}{360}RSk(h+h')$$
$$- \tfrac{1}{1512}RT(14h^2 + 19hh' + 14h'^2) + \tfrac{1}{10080}S^2(109h^2 + 164hh' + 109h'^2)$$
$$+ \tfrac{1}{10080}\frac{ST}{k}(2h^3 - 3h^2h' - 3hh'^2 + 2h'^3)\}\frac{\sigma}{\sigma'}$$
$$- \tfrac{1}{1512}k\{8R^2k^2 + 12RSk(h+h') + 2(RT + 2S^2)(h+h')^2 + \frac{ST}{k}(h+h')^3\}\frac{\sigma^2}{\sigma'^2}$$

$$y = \tfrac{1}{3}(h+h')\{1 + \tfrac{1}{210}RS\frac{k^2}{h+h'} + \tfrac{1}{540}RT(82k^2 + 18h^2 - 45hh' + 18h'^2)$$
$$- \tfrac{1}{540}S^2(79k^2 + 18h^2 - 45hh' + 18h'^2) - \tfrac{1}{180}STk\frac{h^2 - 4hh' + h'^2}{h+h'}$$
$$- \tfrac{1}{540}T^2(2h^2 - 5hh' + 2h'^2)\}\frac{\sigma}{\sigma'}$$
$$- \tfrac{1}{1512}(h+h')\{8RS\frac{k^2}{h+h'} + 4(RT + 2S^2)k^2 + 6STk(h+h') + T^2(h+h')^2\}\frac{\sigma^2}{\sigma'^2}$$

welche in Verbindung mit der Gleichung der Oberfläche selbst die entwickelten Gleichungen der gesuchten kürzesten Linie sind.

11.

Die im Vorhergehenden enthaltenen, mit k und h bezeichneten Linien sind nach den Integrationen, die vorgekommen sind, Unveränderliche, die sich auf die Dimensionen des in Betracht gezogenen Dreiecks beziehen, und diese Dimensionen auf der Oberfläche bestimmen; unter andern ist $h - h'$ die dem Winkel A gegenüber liegende Dreiecksseite.

Aber wenn man k und h als Veränderliche betrachtet, so kann man auch darunter die auf der Oberfläche selbst liegenden Coordinaten irgend

eines Punkts der Oberfläche verstehen, und da alle Elemente der Linien k und h einander unter einem rechten Winkel schneiden, so kann man sie rechtwinklige, krummlinige Coordinaten nennen. Unter diesem Gesichtspunkt sind k und h vor den Integrationen betrachtet worden, und sollen unter demselben Gesichtspunkt hier wieder aufgenommen werden. Diese Coordinaten sind kürzeste Linien auf der Oberfläche, und die Relationen zwischen ihnen und den hier anderweitig angewandten gradlinigen, rechtwinkligen Coordinaten sind schon im Art. 6 gegeben worden.

Sehen wir jetzt k und h als Coordinaten irgend eines Punkts der Oberfläche an, und bezeichnen sie, um dieses auszudrücken, mit K und H, dann giebt der Art. 6

$$K = x + \tfrac{1}{6} R^2x^3 + \tfrac{1}{2} RSx^2y + \tfrac{1}{2} RTxy^2 + \tfrac{1}{6} STy^3$$
$$H = y + \tfrac{1}{6} RSx^3 + \tfrac{1}{2} S^2x^2y + \tfrac{1}{2} STxy^2 + \tfrac{1}{6} T^2y^3$$

Betrachten wir speciell K und H als die Coordinaten der im vor. Art. bestimmten kürzesten Linie, so ergiebt sich aus dem Vorstehenden:

$$K = \tfrac{2}{3}k\{1 - \tfrac{1}{5\,4\,0}(9RT - 9S^2 - R^2)k^2 + \tfrac{1}{3\,6\,0}RSk(h+h')$$
$$- \tfrac{1}{1\,3\,5}RT(14h^2 + 19hh' + 14h'^2) + \tfrac{1}{1\,0\,8\,0}S^2(109h^2 + 164hh' + 109h'^2)$$
$$- \tfrac{1}{1\,0\,8\,0}\tfrac{ST}{k}(2h^3 - 3h^2h' - 3hh'^2 + 2h'^3)\}\tfrac{\sigma}{\sigma'}$$
$$+ \tfrac{2}{8\,1}(RT - S^2)k(h+h')^2\tfrac{\sigma^2}{\sigma'^2}$$

$$H = \tfrac{1}{3}(h+h')\{1 + \tfrac{1}{2\,7\,0}RS\tfrac{k^3}{h+h'} + \tfrac{1}{5\,4\,0}RT(82k^2 + 16h^2 - 40hh' + 16h'^2)$$
$$- \tfrac{1}{5\,4\,0}S^2(79k^2 + 18h^2 - 45hh' + 18h'^2) - \tfrac{1}{1\,8\,0}STk\tfrac{h^2 - 4hh' + h'^2}{h+h'}$$
$$+ \tfrac{1}{5\,4\,0}T(R - T)(2h^2 - 5hh' + 2h'^2)\}\tfrac{\sigma}{\sigma'}$$
$$- \tfrac{2}{8\,1}(RT - S^2)k^2(h+h')\tfrac{\sigma^2}{\sigma'^2}$$

die an sich schon auch die Gleichungen derselben kürzesten Linie sind.

12.

Suchen wir nun die Länge der eben erhaltenen kürzesten Linie vom Winkelpunkt A des Dreiecks bis zum Durchschnittspunkt derselben mit der Dreiecksseite $h - h'$, und nennen diese Länge λ, dann ist nichts

Weiteres zu thun, als in der ersten der im vor. Art. abgeleiteten Gleichungen λ statt σ, k statt K zu setzen, und die Gleichung in Bezug auf λ aufzulösen, denn der genannten Dreiecksseite entspricht in jedem ihrer Punkte die Abscisse k. Diese Gleichung giebt hierauf

$$\lambda = \tfrac{3}{2}\sigma'\{1 + \tfrac{1}{540}RT(8k^2 + 11h^2 - 14hh' + 11h'^2) - \tfrac{1}{540}R(R-T)k^2$$
$$- \tfrac{1}{880}RSk(h+h') - \tfrac{1}{10\,880}S^2(18k^2 + 19h^2 - 16hh' + 19h'^2)$$
$$+ \tfrac{1}{10\,880}\tfrac{ST}{k}(2h^3 - 3h^2h' - 3hh'^2 + 2h'^3)\}$$

woraus durch die Umkehrung

$$\sigma' = \tfrac{2}{3}\lambda(1-y)$$

folgt, wenn zur Abkürzung

$$y = \tfrac{1}{540}r_0t_0(8k^2 + 11h^2 - 14hh' + 11h'^2)$$
$$- \tfrac{1}{540}(R-T)Rk^2$$
$$- \tfrac{S}{1080}\Big\{3Rk(h+h') + S(2k^2 - 3h^2 + 12hh' - 3h'^2)$$
$$- T'(2h^2 - 5hh' + 2h'^2)\tfrac{h+h'}{k}\Big\}$$

gesetzt wird. Suchen wir ferner den Durchschnittspunkt derselben Linie mit der Dreiecksseite $h - h'$, zu welchem Ende wir nur den eben erhaltenen Ausdruck für λ statt σ in die zweite Gleichung des vor. Art. zu setzen brauchen. Die Ordinate H dieses Durchschnittspunkts wird hierauf

$$H = \tfrac{1}{2}(h+h')\{1 + \tfrac{1}{20}RT(h-h')^2 - \tfrac{1}{540}R(R-T)k^2$$
$$+ \tfrac{1}{540}T\Big(R - T + S\tfrac{h+h'}{2k}\Big)(2h^2 - 5hh' + 2h'^2)$$
$$+ \tfrac{1}{10\,880}RSk\tfrac{4k^2 - 3(h+h')^2}{h+h'} - \tfrac{1}{1080}STk\tfrac{h^2 - 4hh' + h'^2}{h+h'}$$
$$+ \tfrac{1}{10\,880}S^2(4k^2 - 55h^2 + 106hh' - 55h'^2)\}$$

oder, wenn man die Dreiecksseite $h - h' = a$ setzt,

$$H - h' = \tfrac{1}{2}a(1+x)$$

wo

$$x = \tfrac{1}{20}r_0t_0(h^2 - h'^2)$$
$$- \tfrac{R-T}{540a}\{Rk^2 - T(2h^2 - 5hh' + 2h'^2)\}(h+h')$$

$$+\frac{S}{1080a}\left\{Rk(4k^2-3(h+h')^2)+S(4k^2-(h+h')^2)(h+h')\right.$$
$$\left.-T\left[6k(h^2-4hh'+h'^2)-(2h^2-5hh'+2h'^2)\frac{(h+h')^2}{k}\right]\right\}$$

gesetzt worden ist.

Alle vorhergehenden Ausdrücke beruhen, wie man sieht, auf der Anwendung der krummlinigen, rechtwinkligen, auf der Oberfläche liegenden Coordinaten k und h, statt welcher ich mich aber auch krummliniger, schiefwinkliger Coordinaten hätte bedienen können. Zu dem Ende hätte ich, statt von dem Binom

$$ds^2 = dh^2 + m^2\,dq^2$$

auszugehen, wie sowohl in der Abhandlung als hier geschehen ist, und Gauss selbst auch gemacht hat, von dem Trinom

$$ds^2 = Edp^2 + Fdp\,dq + Gdq^2$$

ausgehen müssen, welches auch ohne Schwierigkeit hätte geschehen können, indess neue und längere Entwickelungen verlangt hätte. Die vorstehenden Resultate sind aber schon in der Form, die ihnen hier gegeben worden ist, der weitesten Anwendung auf sehr einfache Art zugänglich, und daher unterlasse ich jede Umformung derselben.

13.

Es ist nun ein Leichtes, die Construction des Schwerpunkts unseres Dreiecks anzugeben, denn die im Vorhergehenden abgeleiteten Gleichungen enthalten den folgenden

Lehrsatz.

1) »Um den Schwerpunkt eines allgemeinen sphäroidischen Dreiecks »von nicht allzu grossen Seiten zu erhalten, muss man vor Allem »die normale Projection desselben auf der Oberfläche, auf welcher »das Dreieck liegt, suchen.

2) »Um diese Projection zu erhalten, theile man die Dreiecksseite a »in zwei gleiche Theile, und füge dem Halbirungspunkt nach der »Richtung hin, in welcher die grössere der beiden anderen Seiten »liegt, die Linie

$$\tfrac{1}{2}\,ax$$

»hinzu. Zieht man hierauf von dem dadurch gegebenen Punkt der »Seite a eine kürzeste Linie nach dem gegenüber liegenden Win»kelpunkt A, so ist die Länge dieser Linie $= \lambda$, und auf derselben »liegt die normale Projection des Schwerpunkts.

3) »Um letztere selbst zu erhalten, ziehe man von dem Endpunkt von »λ, welcher auf der Seite a liegt, die Linie

$$\lambda y$$

»ab, und theile den Rest von λ in drei gleiche Theile, dann ist der »der Seite a zunächst liegende Drittheilungspunkt die normale Pro»jection des Schwerpunkts des Dreiecks auf der Oberfläche des»selben.

4) »Um hierauf den Schwerpunkt selbst zu erhalten, errichte man im »eben gefundenen Projectionspunkt desselben, auf der concaven »Seite der Oberfläche eine Normale, dann liegt auf dieser der »Schwerpunkt selbst, und sein Abstand von der Oberfläche ist der »Linie

$$\tfrac{1}{3^6}\{Rk^2 + Sk(h+h') + T(h^2 - hh' + h'^2)\}$$

»gleich.«

Es ist an sich klar, dass man bei dieser Construction von jeder beliebigen Seite des Dreiecks ausgehen kann, und hieraus erwächst zum vorstehenden Lehrsatze folgender

Erster Zusatz.

»Statt die Construction, die unter 3) angegeben ist, auszufüh»ren, wiederhole man die unter 2) angegebene auf einer der bei»den anderen Seiten des Dreiecks, nachdem im Ausdruck von x »die betreffende Vertauschung der Bezeichnungen vorgenommen »worden ist. Zieht man hierauf von dem dadurch gegebenen »Punkt dieser Seite auch eine kürzeste Linie nach dem gegenüber »liegenden Winkelpunkt, und nennt die Länge dieser Linie λ', so »liegt die Projection des Schwerpunkts im Durchschnittspunkte »der Linien λ und λ'.«

Aus denselben Betrachtungen ergiebt sich folgender

Zweiter Zusatz.

»Führt man die unter 2) angegebene Construction auf allen »drei Dreiecksseiten aus, und zieht die kürzesten Linien λ, λ', λ'', »so schneiden sich diese drei Linien in Einem und demselben »Punkt, und zwar im Projectionspunkt des Schwerpunkts des »Dreiecks.«

14.

Die Ausdrücke für y und x des vorvor. Art. werden, wie man sogleich erkennt, viel einfacher, wenn $S = 0$ gesetzt werden kann, und es kommen Fälle vor, in welchen diese Gleichung entweder strenge, oder wenigstens so nahe statt findet, dass man sie der Genauigkeit unbeschadet annehmen darf.

Aus dem Ausdruck des Art. 5 für S erkennt man, dass in zwei von einander gänzlich verschiedenen Fällen $S = 0$ wird. Diese Gleichung findet erstens statt, wenn der Winkel v irgend einem Vielfachen von 90^0 gleich ist, und zweitens, wenn $r_0 = t_0$ ist. Der erste Fall kann auf jeder Oberfläche vorkommen, und tritt jedes Mal ein, wenn das Dreieck eine solche Lage hat, dass das erste Element der von irgend einem der Winkelpunkte senkrecht auf die gegenüber liegende Seite, oder deren Verlängerung, gezogenen kürzesten Linie mit einer der beiden Hauptkrümmungsebenen der Oberfläche zusammen fällt. Die Ausdrücke für x und y werden in diesem Falle

$$x = \tfrac{1}{2\,0}\, r_0 t_0 (h^2 - h'^2) - \tfrac{1}{5\,4\,0 a} R (R - T) k^2 (h + h') + \tfrac{1}{5\,4\,0 a} T (R - T) (2h^2 - 5hh' + 2h'^2) (h + h')$$

$$y = \tfrac{1}{5\,4\,0}\, r_0 t_0 (8k^2 + 11h^2 - 14hh' + 11h'^2) - \tfrac{1}{5\,4\,0} R (R - T) k^2$$

Der zweite Fall tritt allgemein ein, wenn das Dreieck ein ebenes oder ein sphärisches ist, und theilweise wenn die Oberfläche Nabelpunkte besitzt, und der betreffende Winkelpunkt des Dreiecks einem der Nabelpunkte angehört. Die Ausdrücke für x und y werden in diesen Fällen allgemein

$$x = \tfrac{1}{2\,0}\, r_0 t_0 (h^2 - h'^2)$$

$$y = \tfrac{1}{5\,4\,0}\, r_0 t_0 (8k^2 + 11h^2 - 14hh' + 11h'^2)$$

also sehr einfach. Für das ebene Dreieck werden sie gleich Null, und der Lehrsatz des vor. Art. verwandelt sich somit in denjenigen, den die Elementargeometrie zur Construction des Schwerpunkts des ebenen Dreiecks giebt.

Für die Kugel werden x und y, wenn man die Dreiecksseiten a, b, c durch die Gleichungen

$$h^2 = c^2 - k^2$$
$$2hh' = -a^2 + b^2 + c^2 - 2k^2$$
$$h'^2 = b^2 - k^2$$

einführt, und den Kugelhalbmesser r nennt,

$$x = \frac{1}{20r^2}(c^2 - b^2)$$
$$y = \frac{1}{540r^2}(7a^2 + 4b^2 + 4c^2)$$

die in diesem Falle bei der Construction, die der Lehrsatz angiebt, anzuwenden sind. Die Entfernung des Schwerpunkts von der Kugeloberfläche wird =

$$\frac{1}{72r}\{a^2 + b^2 + c^2\}$$

welches eine symmetrische Function ist, wie es nicht anders sein kann. Es ist einleuchtend, dass für jede Oberfläche auch der allgemeine Ausdruck dieser Entfernung, nemlich

$$\tfrac{1}{3}\tfrac{1}{6}\{Rk^2 + Sk(h + h') + T(h^2 - hh' + h'^2)\}$$

für jedes Dreieck besonders, welchen Winkel desselben man auch für A annimmt, denselben numerischen Werth annehmen muss.

Man kann hier nicht behaupten, dass die vorstehenden, für die Ebene und die Kugel statt findenden Ausdrücke auch für die auf der Ebene oder Kugel abwickelbaren Oberflächen Geltung haben, denn die ursprünglichen, allgemeinen Ausdrücke für x und y sind nicht Functionen der Krümmungsmaasse, sondern vielmehr überhaupt Functionen der Krümmungshalbmesser, und ihre vorstehenden, für die Ebene und die Kugel abgekürzten, Ausdrücke können daher für die bez. abwickelbaren Oberflächen nicht statt finden.

Man kann aber aus dem Vorhergehenden eine Anzahl interessanter Sätze ableiten, die sich auf den Schwerpunkt und dessen Projection der

auf den einfachsten Oberflächen, als: Kugel, Cylinder, Kegel, u. s. w. verzeichneten Dreiecke beziehen. Ich lasse diese indess, da sie meinem Thema fremd sind, hier weg.

Es giebt noch einen sehr ausgedehnten Fall, in welchem die zuletzt angeführten, einfachen Ausdrücke für x und y auch Anwendung finden, und dieser tritt ein, wenn für die betreffende Oberfläche, entweder überall, oder wenigstens in dem Theile derselben, auf welchem das Dreieck liegt, $R - T$ und S kleine Grössen von wenigstens der ersten Ordnung sind. Denn wenn dieses statt findet, so gehören die Glieder, mit welchen sie multiplicirt sind, einer höheren Ordnung an als die vorstehenden, und können daher in Bezug auf diese übergangen werden.

Ich führe schliesslich hier noch an, dass man in der Anwendung, die hier von dem Vorhergehenden gemacht werden soll, ohne den Grad der Genauigkeit im Geringsten zu verletzen, immer die vorstehenden, einfachen Ausdrücke anwenden kann. Es wird dieses sogleich erklärt werden.

§ 2. Ableitung eines sehr einfachen Ausdrucks für die Hinführung der Winkel des allgemeinen sphäroidischen Dreiecks auf die eines ebenen, oder eines sphärischen, von denselben Seiten.

15.

In der mehrmals angezogenen Abhandlung »Geodätische Untersuchungen« habe ich mit Zugrundelegung der allgemeinen Gaussischen Theorie, der ich in ihren Hauptmomenten gefolgt bin, schon die in der Ueberschrift genannte Aufgabe in Bezug auf das auf unbestimmter Oberfläche liegende Dreieck bis auf Grössen sechster Ordnung gelöst, und mich dabei an die von Gauss selbst in seiner, bis auf Grössen vierter Ordnung gehenden, Auflösung angewandten Krümmungsmaasse gehalten. Später habe ich bemerkt, dass man die ausgedehntere Auflösung durch Einführung gewisser anderer Krümmungsmaasse, die bei Gauss nicht vorkommen, neben jenen auf eine nicht geahndete Einfachheit zurückführen kann, und besondere Veranlassung gehabt, mein Resultat in den Berichten der Königl. S. Gesellschaft der Wissenschaften*) zu ver-

*) Sitzung vom 8. Mai d. J.

öffentlichen. Hier werde ich die Ableitung dieses Resultats geben, wobei der Inhalt des vor. § benutzt werden muss.

16.

Die Anwendung der ungekürzten Ausdrücke von x und y würde der Einfachheit des Endresultats schaden, aber dieses ist an sich nicht nothwendig, man kann bei ihrer Anwendung auf die Lösung der vorbenannten Aufgabe immer die Glieder übergehen, die mit $R - T$ und S multiplicirt sind, ohne der Genauigkeit des Resultats den mindesten Abbruch zu thun. In den im Art. 14 angeführten Fällen wird der nach dieser Abkürzung eingeführte Punkt der Dreiecksfläche immer noch die normale Projection des Schwerpunkts derselben sein, oder mit hinreichender Annäherung dafür gehalten werden können, in anderen Fällen wird demselben zwar nicht diese Bedeutung beigelegt werden können, aber er wird immer ein unzweideutig bestimmter Punkt der Dreiecksfläche sein, und dieses gnügt vollständig. Bezeichnet man mit α das Krümmungsmaass im Dreieckspunkt A, und setzt, den abgekürzten Ausdrücken des Art. 14 entsprechend

$$x = \frac{\alpha}{20}(h^2 - h'^2)$$

$$y = \frac{\alpha}{540}(8k^2 + 11h^2 - 14hh' + 11h'^2)$$

so wird

$$\tfrac{1}{2}(h + h') + \tfrac{1}{2}x(h - h')$$

die Ordinate, und k die Abscisse des Punkts der Dreiecksseite a sein, in welchem letztere von der kürzesten, durch A gehenden Linie geschnitten wird, auf welcher der hier für die normale Projection des Schwerpunkts substituirte Punkt liegt, und die auf dieser Linie gemessene Entfernung dieses Punkts vom Winkelpunkt A des Dreiecks wird

$$\tfrac{2}{3}\sigma(1 - y)$$

zum allgemeinen Ausdruck haben, wenn σ statt λ geschrieben wird.

17.

Um den Ausdruck des Krümmungsmaasses in dem in Rede stehenden Punkt zu erhalten, müssen zuerst die eben angegebenen Substitu-

tionen in die allgemeinen Ausdrücke für $\sigma \sin\varphi$ und $\sigma\cos\varphi$ des Art. 118 der Abhandlung eingeführt werden, welche daher mit Uebergehung der Glieder der höheren Ordnungen, die für den gegenwärtigen Zweck nicht berücksichtigt zu werden brauchen, die folgende Form annehmen:

$$\sigma \sin\varphi = \tfrac{1}{3}(h+h') - \tfrac{1}{3}y(h+h') + \tfrac{1}{3}x(h-h') + \tfrac{1}{18}\eta k^2(h+h')$$
$$\sigma\cos\varphi = \tfrac{2}{3}k - \tfrac{2}{3}yk - \tfrac{1}{18}\eta k(h+h')^2$$

Die Substitution dieser Werthe in den Ausdruck (125) der Abhandlung für das Krümmungsmaass im Allgemeinen giebt, wenn das Krümmungsmaass für den hier in Betracht stehenden Punkt mit δ bezeichnet wird,

$$\begin{aligned}\delta = {} & \eta + \tfrac{2}{3}\theta k + \tfrac{1}{3}\theta'(h+h') + \tfrac{2}{9}\lambda k^2 + \tfrac{2}{9}\lambda' k(h+h') + \tfrac{1}{18}\lambda''(h+h')^2 \\ & + \tfrac{4}{81}\mu k^3 + \tfrac{2}{27}\mu' k^2(h+h') + \tfrac{1}{27}\mu'' k(h+h')^2 + \tfrac{1}{162}\mu'''(h+h')^3 \\ & - \tfrac{1}{18}\eta\theta k(h+h')^2 + \tfrac{1}{18}\eta\theta' k^2(h+h') \\ & - \tfrac{2}{3}y\theta k - \tfrac{1}{3}y\theta'(h+h') + \tfrac{1}{3}x\theta'(h-h')\end{aligned}$$

18.

Bezeichnen wir eine noch unbestimmte kleine Grösse zweiter Ordnung mit u, und denken uns die Dreiecksseite AB oder σ an ihrem Endpunkt B um die Linie $u\sigma$ verlängert. Theilen wir die Linie $\sigma(1+u)$ in drei gleiche Theile, und suchen die Ausdrücke für $\sigma\sin\varphi$ und $\sigma\cos\varphi$ in dem Drittheilungspunkt, welcher A am nächsten liegt. Da hier nur erfordert wird, $\frac{1}{3}\sigma(1+u)$ statt σ in die allgemeinen Ausdrücke zu setzen, so ergeben sich sofort für den bezeichneten Punkt

$$\sigma\sin\varphi = \tfrac{1}{3}h + \tfrac{1}{3}uh + \tfrac{1}{18}\eta k^2 h$$
$$\sigma\cos\varphi = \tfrac{1}{3}k + \tfrac{1}{3}uk - \tfrac{1}{9}\eta k h^2$$

und nennen wir das Krümmungsmaass in diesem Punkt γ_1, so giebt der oben angezogene Ausdruck (125)

$$\begin{aligned}\gamma_1 = {} & \eta + \tfrac{1}{3}\theta k + \tfrac{1}{3}\theta' h + \tfrac{1}{18}\lambda k^2 + \tfrac{1}{9}\lambda' kh + \tfrac{1}{18}\lambda'' h^2 \\ & + \tfrac{1}{162}\mu k^3 + \tfrac{1}{54}\mu' k^2 h + \tfrac{1}{54}\mu'' kh^2 + \tfrac{1}{162}\mu''' h^3 \\ & - \tfrac{1}{9}\eta\theta kh^2 + \tfrac{1}{18}\eta\theta' k^2 h + \tfrac{1}{3}u\theta k + \tfrac{1}{3}u\theta' h\end{aligned}$$

Bestimmt man auf analoge Weise auf der Dreiecksseite AC einen Punkt, indem die Verlängerung der ganzen Seite am Endpunkt C mit $u'\sigma$ bezeichnet wird, wo u' auch eine noch unbestimmte kleine Grösse

zweiter Ordnung ist, und nennt das Krümmungsmaass in diesem Punkt $\beta_,$, so bekommt man eben so wie vorher:

$$\begin{aligned}\beta_, = \eta &+ \tfrac{1}{3}\theta k + \tfrac{1}{3}\theta' h' + \tfrac{1}{18}\lambda k^2 + \tfrac{1}{3}\lambda' k h' + \tfrac{1}{18}\lambda'' h'^2 \\ &+ \tfrac{1}{180}\mu k^3 + \tfrac{1}{36}\mu' k^2 h' + \tfrac{1}{36}\mu'' k h'^2 + \tfrac{1}{180}\mu''' h'^3 \\ &- \tfrac{1}{9}\eta\theta k h'^2 + \tfrac{1}{18}\eta\theta' k^2 h' + \tfrac{1}{3}u'\theta k + \tfrac{1}{3}u'\theta' h'\end{aligned}$$

19.

Neben diesen drei neuen Krümmungsmaassen sollen die in den Winkelpunkten des Dreiecks statt findenden beibehalten, und wie früher mit α, β, γ bezeichnet werden. Ihre früher gegebenen Ausdrücke will ich zur leichteren Uebersicht hier anführen.

$$\begin{aligned}\alpha &= \eta \\ \beta &= \eta + \theta k + \theta' h + \tfrac{1}{2}\lambda k^2 + \lambda' k h + \tfrac{1}{2}\lambda'' h^2 \\ &\quad + \tfrac{1}{6}\mu k^3 + \tfrac{1}{2}\mu' k^2 h + \tfrac{1}{2}\mu'' k h^2 + \tfrac{1}{6}\mu''' h^3 \\ &\quad - \tfrac{1}{3}\eta\theta k h^2 + \tfrac{1}{6}\eta\theta' k^2 h \\ \gamma &= \eta + \theta k + \theta' h' + \tfrac{1}{2}\lambda k^2 + \lambda' k h' + \tfrac{1}{2}\lambda'' h'^2 \\ &\quad + \tfrac{1}{6}\mu k^3 + \tfrac{1}{2}\mu' k^2 h' + \tfrac{1}{2}\mu'' k h'^2 + \tfrac{1}{6}\mu''' h'^3 \\ &\quad - \tfrac{1}{3}\eta\theta k h'^2 + \tfrac{1}{6}\eta\theta' k^2 h'\end{aligned}$$

20.

Entwickelt man nun aus den Ausdrücken des vor. Art. die für θk und θ', so findet man

$$\begin{aligned}\theta k = &- \alpha - \beta\tfrac{h'}{h-h'} + \gamma\tfrac{h}{h-h'} - \tfrac{1}{2}\lambda k^2 + \tfrac{1}{2}\lambda'' hh' \\ &- \tfrac{1}{6}\mu k^3 + \tfrac{1}{2}\mu'' k hh' + \tfrac{1}{6}\mu''' hh'(h+h') \\ &- \tfrac{1}{3}\eta\theta k hh'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta' = &\beta\tfrac{1}{h-h'} - \gamma\tfrac{1}{h-h'} - \lambda' k - \tfrac{1}{2}\lambda''(h+h') \\ &- \tfrac{1}{2}\mu' k^2 - \tfrac{1}{2}\mu'' k(h+h') - \tfrac{1}{6}\mu'''(h^2+hh'+h'^2) \\ &+ \tfrac{1}{3}\eta\theta k(h+h') - \tfrac{1}{6}\eta\theta' k^2\end{aligned}$$

durch deren Benutzung die Ausdrücke der drei neuen, oben eingeführten, Krümmungsmaasse die folgenden Gleichungen geben:

$$
\begin{aligned}
0 = &- \lambda k^2 - 2\lambda' k h' - \lambda'' h'^2 \\
&- \tfrac{4}{5}\mu k^3 - \tfrac{4}{3}\mu' k^2 h' - \tfrac{4}{3}\mu'' k h'^2 - \tfrac{4}{5}\mu''' h'^3 + 3A \\
0 = &- \lambda k^2 - 2\lambda' k h - \lambda'' h^2 \\
&- \tfrac{4}{5}\mu k^3 - \tfrac{4}{3}\mu' k^2 h - \tfrac{4}{3}\mu'' k h^2 - \tfrac{4}{5}\mu''' h^3 + 3B \\
0 = &- \lambda k^2 - \lambda' k(h + h') - \lambda''(h^2 - hh' + h'^2) \\
&- \tfrac{4}{5}\mu k^3 - \tfrac{4}{6}\mu' k^2(h + h') - \tfrac{1}{6}\mu'' k(7h^2 - 4hh' + 7h'^2) \\
&- \tfrac{1}{16}\mu'''(8h^3 - 3h^2 h' - 3hh'^2 + 8h'^3) + 3C - \tfrac{1}{2}D
\end{aligned}
$$

in welchen zur Abkürzung

$$
\begin{aligned}
A &= 2\alpha + \gamma - 3\beta_{,} - u'(\alpha - \gamma) \\
B &= 2\alpha + \beta - 3\gamma_{,} - u(\alpha - \beta) \\
C &= \alpha + \beta + \gamma - 3\delta + 2y\alpha - (y - x)\beta - (y + x)\gamma \\
D &= \alpha^2(h - h')^2 + \alpha\beta h'(h - h') - \alpha\gamma h(h - h')
\end{aligned}
$$

gesetzt worden sind.

21.

Aus den eben erhaltenen Gleichungen kann man drei Coefficienten bestimmen, wofür man beliebige auswählen kann. Man kann z. B. jeden der Coefficienten λ, λ', λ'' in Function von μ, μ', μ'', μ''', oder λ, λ', μ in Function von λ'', μ', μ'', μ''' darstellen, und dieses Verfahren auf mannigfaltige Weise abändern. Da nun in dem Ausdruck von δA, wie die oft angezogene Abhandlung zeigt, alle sieben Coefficienten

$$\lambda,\ \lambda',\ \lambda'',\ \mu,\ \mu',\ \mu'',\ \mu'''$$

vorkommen, so scheint es, dass man durch die im vor. Art. erhaltenen Gleichungen nur irgend drei dieser eliminiren könnte, allein es verhält sich anders; man kann durch diese drei Gleichungen alle sieben Coefficienten aus dem Ausdruck für δA eliminiren, und auf sehr einfache Weise dieses Ziel erreichen.

Man multiplicire die beiden ersten der drei auf Null gestellten Gleichungen des vor. Art. mit der Zahl 3, die dritte mit der Zahl 6, und addire die Producte. Hiedurch erhält man, ohne irgend welche Reductionen anzuwenden, sogleich

$$
\begin{aligned}
0 = &- 12\lambda k - 12\lambda' k(h+h') - 3\lambda''(3h^2 - 2hh' + 3h'^2) \\
&- 6\mu k^3 - 9\mu' k^2(h+h') - \mu'' k(11h^2 - 4hh' + 11h'^2) \\
&- \mu'''(4h^3 - h^2h' - hh'^2 + 4h'^3) \\
&+ 9A + 9B + 18C - 3D
\end{aligned}
$$

welche Gleichung, wie man gleich sehen wird, den beabsichtigten Zweck erfüllt. Um dieses noch deutlicher hervor zu heben, soll sie in der folgenden Form aufgestellt werden:

$$
\begin{aligned}
0 = &- \frac{\Delta}{120}\{4\lambda k + 4\lambda' k(h+h') + \lambda''(3h^2 - 2hh' + 3h'^2)\} \\
&- \frac{\Delta}{360}\{6\mu k^3 + 9\mu' k^2(h+h') + \mu'' k(11h^2 - 4hh' + 11h'^2) \\
&\qquad + \mu'''(4h^3 - h^2h' - hh'^2 + 4h'^3)\} \\
&+ \frac{\Delta}{40}\{A + B + 2C - \tfrac{1}{3}D\}
\end{aligned}
$$

wo Δ die Fläche des Dreiecks bezeichnet.

22.

Hiemit sind die Vorbereitungen zur Umwandelung des Ausdrucks für δA ausgeführt, und es muss dieser jetzt vorgenommen werden. Wenden wir uns zum zweiten Ausdruck für δA, der im Art. 127 der Abhandlung gegeben worden ist, und in welchem die Coefficienten θ und θ' schon eliminirt sind. Lassen wir vorläufig die sich auf die Kugel beziehenden Glieder weg, wodurch bewirkt wird, dass δA sich auf die Reduction der Winkel des sphäroidischen Dreiecks auf die des ebenen bezieht, so wird der angezogene Ausdruck der folgende:

$$
\begin{aligned}
\delta A = &- \frac{\Delta}{12}\{2\alpha + \beta + \gamma\} \\
&- \frac{\Delta\alpha^2}{1080}\{3k^2 - 4h^2 + 11hh' - 4h'^2\} \\
&- \frac{\Delta\alpha\beta}{2160}\{9k^2 - 3h^2 + 13hh' - h'^2\} \\
&- \frac{\Delta\alpha\gamma}{2160}\{9k^2 - h^2 + 13hh' - 3h'^2\} \\
&+ \frac{\Delta}{120}\{4\lambda k^2 + 4\lambda' k(h+h') + \lambda''(3h^2 - 2hh' + 3h'^2)\} \\
&+ \frac{\Delta}{360}\{6\mu k^3 + 9\mu' k^2(h+h') + \mu'' k(11h^2 - 4hh' + 11h'^2) \\
&\qquad + \mu'''(4h^3 - h^2h' - hh'^2 + 4h'^3)\}\ *)
\end{aligned}
$$

*) Führt man in den Ausdruck (11) des Art. 26 der »Disquisitiones generales circa superficies curvas« die hier angewandten Bezeichnungen ein, so wird dieser

und man erkennt sogleich, dass in diesem Ausdruck dieselbe Function der λ und μ vorkommt, als in der Gleichung, die im vor. Art. erhalten wurde. Addirt man daher diese, so erhält man sogleich

$$\begin{aligned}
\delta A = &- \tfrac{\Delta}{12}\{2\alpha + \beta + \gamma\} \\
&+ \tfrac{\Delta}{40}\{A + B + 2C - \tfrac{1}{3}D\} \\
&- \tfrac{\Delta\alpha^2}{1080}\{3k^2 - 4h^2 + 11hh' - 4h'^2\} \\
&- \tfrac{\Delta\alpha\beta}{2160}\{9k^2 - 3h^2 + 13hh' - h'^2\} \\
&- \tfrac{\Delta\alpha\gamma}{2160}\{9k^2 - h^2 + 13hh' - 3h'^2\}
\end{aligned}$$

in welchem alle λ und μ verschwunden sind. Durch Hülfe der drei Gleichungen des vorvor. Art. sind also sieben Coefficienten in dem Ausdruck für δA eliminirt worden. Durch die Substitution der im Art. 20 gegebenen Ausdrücke für A, B, C, D bringt man den vorstehenden Ausdruck auf die folgende Form

$$\begin{aligned}
\delta A = &- 3\tfrac{\Delta}{40}\{2\delta + \beta_{,} + \gamma_{,}\} \\
&- \tfrac{\Delta}{120}\{2\alpha + \beta + \gamma\} \\
&- \tfrac{\Delta\alpha^2}{1080}\{3k^2 + 5h^2 - 7hh' + 5h'^2\} \\
&- \tfrac{\Delta\alpha\beta}{2160}\{9k^2 - 3h^2 + 31hh' - 19h'^2\} \\
&- \tfrac{\Delta\alpha\gamma}{2160}\{9k^2 - 19h^2 + 31hh' - 3h'^2\} \\
&+ \tfrac{\Delta}{20}\{2y\alpha - (y - x)\beta - (y + x)\gamma\} \\
&- \tfrac{\Delta}{40}\{u(\alpha - \beta) + u'(\alpha - \gamma)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta A = &- \tfrac{\Delta}{12}\{2\alpha + \beta + \gamma\} \\
&- \tfrac{\Delta\alpha^2}{360}\{4k^2 - 2h^2 + 8hh' - 2h'^2\} \\
&+ \tfrac{\Delta}{120}\{4\lambda k^2 + 4\lambda' k(h + h') + \lambda''(3h^2 - 2hh' + 3h'^2)\}
\end{aligned}$$

mit dem obigen Ausdruck bis auf Grössen fünfter Ordnung, die von Gauss nicht berücksichtigt worden sind, identisch. Dieselbe Identität findet auch zwischen den analogen Ausdrücken für δB und δC meiner oft angezogenen Abhandlung, und den Ausdrücken (12) und (13) der »Disquisitiones etc.« statt.

die durch Einführung der im Art. 16 gegebenen Ausdrücke für x und y in die folgende übergeht:

$$\begin{aligned}
\delta A = &- 3\,\frac{\Delta}{40}\,\{2\delta + \beta_{,} + \gamma_{,}\} \\
&- \frac{\Delta}{120}\,\{2\alpha + \beta + \gamma\} \\
&- \frac{\Delta\alpha^2}{5400}\,\{7k^2 + 14h^2 - 21hh' + 14h'^2\} \\
&- \frac{\Delta\alpha\beta}{10800}\,\{53k^2 - 31h^2 + 141hh' - 57h'^2\} \\
&- \frac{\Delta\alpha\gamma}{10800}\,\{53k^2 - 57h^2 + 141hh' - 31h'^2\} \\
&- \frac{\Delta}{40}\,\{u(\alpha - \beta) + u'(\alpha - \gamma)\}
\end{aligned}$$

23.

Ehe wir weiter gehen, sollen in dem zuletzt erhaltenen Ausdruck die Dreiecksseiten a, b, c durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}
h^2 &= c^2 - k^2 \\
2hh' &= -a^2 + b^2 + c^2 - 2k^2 \\
h'^2 &= b^2 - k^2
\end{aligned}$$

eingeführt werden. Man erhält dadurch

$$\begin{aligned}
\delta A = &- 3\,\frac{\Delta}{40}\,\{2\delta + \beta_{,} + \gamma_{,}\} \\
&- \frac{\Delta}{120}\,\{2\alpha + \beta + \gamma\} \\
&- \frac{\Delta\alpha^2}{10800}\,\{21a^2 + 7b^2 + 7c^2\} \\
&+ \frac{\Delta\alpha\beta}{21600}\,\{141a^2 - 27b^2 - 79c^2\} \\
&+ \frac{\Delta\alpha\gamma}{21600}\,\{141a^2 - 79b^2 - 27c^2\} \\
&- \frac{\Delta}{40}\,\{u(\alpha - \beta) + u'(\alpha - \gamma)\}
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck kann durch zweckmässige Bestimmung der beiden, bisher unbestimmt gelassenen Grössen u und u' bedeutend vereinfacht werden, und zwar kann dieses auf mehr wie Eine Art bewirkt werden. Setzt man

$$u = -\frac{\alpha}{540}\{141a^2 - 27b^2 - 79c^2\}$$

$$u' = -\frac{\alpha}{540}\{141a^2 - 79b^2 - 27c^2\}$$

so verschwinden die mit $\alpha\beta$ und $\alpha\gamma$ multiplicirten Glieder, und man bekommt

$$\delta A = -3\frac{\Delta}{40}\{2\delta + \beta, + \gamma,\}$$
$$-\frac{\Delta}{120}\{2\alpha + \beta + \gamma\}$$
$$+\frac{\Delta\alpha^2}{180}\{2a^2 - b^2 - c^2\}$$

welches der Ausdruck ist, den ich schon in den Berichten der Königl. S. Gesellschaft der Wissenschaften veröffentlicht habe.

Setzt man, um einen anderen einfachen Ausdruck zu erhalten,

$$u = -\frac{\alpha}{540}\{21a^2 + 33b^2 - 19c^2\}$$

$$u' = -\frac{\alpha}{540}\{21a^2 - 19b^2 + 33c^2\}$$

so verschwindet das mit α^2 multiplicirte Glied, und man erhält

$$\delta A = -3\frac{\Delta}{40}\{2\delta + \beta, + \gamma,\}$$
$$-\frac{\Delta}{120}\{2\alpha + \beta + \gamma\}$$
$$+\frac{\Delta\alpha(\beta+\gamma)}{360}\{2a^2 - b^2 - c^2\}$$

Setzt man hingegen

$$u = -\frac{\alpha}{540}\{81a^2 + 3b^2 - 49c^2\}$$

$$u' = -\frac{\alpha}{540}\{81a^2 - 49b^2 + 3c^2\}$$

so wird

$$\delta A = -3\frac{\Delta}{40}\{2\delta + \beta, + \gamma,\}$$
$$-\frac{\Delta}{720}F\{2\alpha + \beta + \gamma\}\ .$$

wo

$$F = 6 - \alpha(2a^2 - b^2 - c^2)$$

welches der dritte und einfachste Ausdruck ist.*)

*) Ich lasse nicht unbemerkt, dass man diese Ausdrücke auch auf andere Weise erhalten kann, werde aber von den darauf bezüglichen Entwickelungen hier absehen.

Alle diese Ausdrücke sind bis auf Grössen sechster Ordnung richtig. Wendet man sie auf die Kugel an, so geben sie übereinstimmend

$$\delta A = -\tfrac{1}{3}\Delta\left\{1 - \tfrac{1}{60r^2}(2a^2 - b^2 - c^2)\right\}$$

welches ein bekannter Ausdruck ist.

24.

Die bis jetzt für δA erhaltenen Ausdrücke beziehen sich, wie vorbemerkt wurde, auf die Hinführung der Winkel des sphäroidischen Dreiecks auf die eines ebenen von denselben Seiten. Will man dagegen, dass die Winkel des sphäroidischen Dreiecks auf die eines sphärischen von denselben Seiten hingeführt werden sollen, so müssen den obigen Ausdrücken für δA, der Abhandlung zufolge, die folgenden Glieder hinzugefügt werden:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\Delta}{8r^2} - \tfrac{\Delta\alpha}{360r^2}\left\{a^2 + 2b^2 + 2c^2\right\}\\
&- \tfrac{\Delta\beta}{360r^2}\left\{2a^2 + b^2 + 2c^2\right\}\\
&- \tfrac{\Delta\gamma}{360r^2}\left\{2a^2 + 2b^2 + c^2\right\}\\
&+ \tfrac{\Delta}{360r^2}\left\{a^2 + 7b^2 + 7c^2\right\}
\end{aligned}$$

in welchen r den Halbmesser der Kugel bezeichnet, auf welcher man sich das sphärische Dreieck verzeichnet denkt.

Wir können jetzt für die weiter unten folgende Anwendung unserer Ausdrücke eine Vorbereitung treffen, ohne ihnen den Charakter der Allgemeinheit zu rauben. Wie auch die Oberfläche beschaffen sein mag, auf welcher das sphäroidische Dreieck liegt; immer kann man den Krümmungsmaassen die folgende Form geben:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \tfrac{1+p}{n^2}\ ,\quad \delta = \tfrac{1+p'}{n^2}\\
\beta &= \tfrac{1+q}{n^2}\ ,\quad \beta_{,} = \tfrac{1+q'}{n^2}\\
\gamma &= \tfrac{1+r}{n^2}\ ,\quad \gamma_{,} = \tfrac{1+r'}{n^2}
\end{aligned}$$

wo n irgend einen passenden Parameter der Oberfläche bezeichnet, und p, q, r, p', q', r' aus der Gleichung der Oberfläche zu ermitteln sind.

Da ferner der Kugelhalbmesser willkührlich ist, so kann man in den obigen Zusatzgliedern $r = n$ machen. Führt man diese Substitutionen sowohl im ersten Ausdruck für δA des Art. 23, wie in den obigen Zusatzgliedern aus, und addirt die letzteren, so bekommt man für die Reduction der sphäroidischen Winkel auf die sphärischen den Ausdruck

$$\begin{aligned}
\delta A = &- 3\tfrac{\Delta}{40n^2}\{2p' + q' + r'\} \\
&- \tfrac{\Delta}{120n^2}\{2p + q + r\} \\
&+ \tfrac{\Delta p}{10800n^4}\{69a^2 - 127b^2 - 127c^2\} - \tfrac{\Delta p^2}{10800n^4}\{21a^2 + 7b^2 + 7c^2\} \\
&+ \tfrac{\Delta q}{21600n^4}\{21a^2 - 87b^2 - 199c^2\} + \tfrac{\Delta pq}{21600n^4}\{141a^2 - 27b^2 - 79c^2\} \\
&+ \tfrac{\Delta r}{21600n^4}\{21a^2 - 199b^2 - 87c^2\} + \tfrac{\Delta pr}{21600n^4}\{141a^2 - 79b^2 - 27c^2\} \\
&+ \tfrac{\Delta}{40n^2}\{u(q-p) + u'(r-p)\}
\end{aligned}$$

welcher Ausdruck auch immer bis auf Grössen sechster Ordnung richtig ist, und wobei bemerkt werden kann, dass für alle Oberflächen, für welche p, q, r kleine Grössen von wenigstens der ersten Ordnung sind, die Glieder der zweiten Columne wegfallen, da sie in diesen Fällen von der sechsten oder einer höheren Ordnung werden.

25.

Den Ausdruck für δA des vor. Art. kann man auch durch angemessene Bestimmung der Grössen u und u' zusammenziehen. Setzt man

$$\begin{aligned}
u &= -\tfrac{1+p}{540n^2}\{21a^2 - 87b^2 - 199c^2\} \\
u' &= -\tfrac{1+p}{540n^2}\{21a^2 - 199b^2 - 87c^2\}
\end{aligned}$$

so bekommt man

$$\begin{aligned}
\delta A = &- 3\tfrac{\Delta}{40n^2}\{2p' + q' + r'\} - \tfrac{\Delta p^2}{72n^4}\{b^2 + c^2\} \\
&- \tfrac{\Delta}{120n^2}\{2p + q + r\} + \tfrac{\Delta pq}{360n^4}\{2a^2 + b^2 + 2c^2\} \\
&+ \tfrac{\Delta p}{120n^4}\{a^2 - 3b^2 - 3c^2\} + \tfrac{\Delta pr}{360n^4}\{2a^2 + 2b^2 + c^2\}
\end{aligned}$$

Setzt man hingegen

$$u = \frac{1+p}{540n^2}\{69a^2 - 183b^2 - 71c^2\}$$

$$u' = \frac{1+p}{540n^2}\{69a^2 - 71b^2 - 183c^2\}$$

so erhält man

$$\delta A = -3\frac{\Delta}{40n^2}\{2p' + q' + r'\} - \frac{\Delta p^2}{360n^4}\{3a^2 - 4b^2 - 4c^2\}$$
$$- \frac{\Delta}{120n^2}\{2p + q + r\} + \frac{\Delta pq}{720n^4}\{7a^2 - 7b^2 - 5c^2\}$$
$$+ \frac{\Delta(q+r)}{240n^4}\{a^2 - 3b^2 - 3c^2\} + \frac{\Delta pr}{720n^4}\{7a^2 - 5b^2 - 7c^2\}$$

Setzt man endlich

$$u = 2\frac{1+p}{135n^2}\{3a^2 - 6b^2 + 8c^2\}$$

$$u' = 2\frac{1+p}{135n^2}\{3a^2 + 8b^2 - 6c^2\}$$

so ergiebt sich

$$\delta A = -3\frac{\Delta}{40n^2}\{2p' + q' + r'\} - \frac{\Delta^2 p^2}{720n^4}\{3a^2 + b^2 + c^2\}$$
$$- \frac{\Delta}{480n^2}F\{2p + q + r\} + \frac{\Delta pq}{1440n^4}\{11a^2 - 5b^2 - c^2\}$$
$$+ \frac{\Delta pr}{1440n^4}\{11a^2 - b^2 - 5c^2\}$$

wo

$$F = 4 - \frac{4}{n^2}(a^2 - 3b^2 - 3c^2)$$

ist; dieser Ausdruck lässt in allen seinen Theilen an Einfachheit Nichts zu wünschen übrig. Er ist sowohl wie die Vorhergehenden für jede Oberfläche bis auf Grössen sechster Ordnung richtig. Es giebt Klassen von Oberflächen, für welche p, q, r, p', q', r' kleine Grössen von wenigstens der ersten Ordnung sind, für welche daher die Glieder der zweiten Columne wegfallen, auch kann man die Einheiten immer so wählen, dass $n = 1$ wird; in diesen Fällen werden die zuletzt entwickelten Ausdrücke

$$u = \frac{2}{135}\{3a^2 - 6b^2 + 8c^2\}$$
$$u' = \frac{2}{135}\{3a^2 + 8b^2 - 6c^2\}$$
$$F = 4 - a^2 + 3b^2 + 3c^2$$

$$\delta A = -3\frac{\Delta}{40}\{2p' + q' + r'\}$$
$$-\frac{\Delta}{480}F\{2p + q + r\}$$

so einfach wie man sie sich wünschen kann.

Zur Vollständigkeit füge ich noch die durch die Dreiecksseiten ausgedrückten Ausdrücke für x und y hinzu:

$$x = \tfrac{1}{240}\{c^2 - b^2\}$$
$$y = \tfrac{1}{5760}\{7a^2 + 4b^2 + 4c^2\}$$

die in der Anwendung gebraucht werden. Zur Berechnung von q' und r' sind nemlich u und u', und zur Berechnung von p' beides x und y erforderlich, wie schon aus dem Vorhergehenden hervorgeht.

26.

Alle im Vorhergehenden für δA erhaltenen Ausdrücke lassen sich durch Vertauschung der darin enthaltenen Grössen zur Erlangung von δB und δC anwenden. Um δB zu erhalten müssen allenthalben a und b, so wie α und β oder p und q mit einander vertauscht werden, und in Bezug auf δC sind a und c, so wie α und γ oder p und r mit einander zu vertauschen. Da die Krümmungsmaasse $\beta_{,}$ und $\gamma_{,}$ oder q' und r' für δB und δC wesentlich andere Werthe annehmen wie für δA, so sind sie nach den beschriebenen Vertauschungen der Grössen, von welchen sie abhängen, für δB und δC besonders, von Neuem zu berechnen.

Für alle Oberflächen, für welche das Krümmungsmaass δ oder p' entweder völlig, oder doch mit hinreichender Genauigkeit dem Schwerpunkt entspricht, bleiben δ und p' von den beschriebenen Vertauschungen unberührt, während hingegen für die Oberflächen, in welchen die Hauptkrümmungshalbmesser in den Winkelpunkten A, B, C, oder wenigstens in Einem oder zwei derselben, so sehr verschieden sind, dass δ nicht dem Schwerpunkt angehörig betrachtet werden kann, ist nach der Vertauschung der Buchstaben in den betreffenden Formeln auch δ neu zu berechnen.

Es ist übrigens nicht angemessen, die eben beschriebenen Vertauschungen in den Formeln vorzunehmen, weit besser und einfacher verfährt man, wenn man zur Erlangung von δB und δC die Bezeichnungen

der Dreiecksstücke mit einander vertauscht. Es können hierauf die vorstehenden, für δA ausdrücklich entwickelten, Formeln selbstverständlich unverändert auf die Erlangung von δB und δC angewandt werden.

27.

Die Ausdrücke der Abhandlung für die Fläche Δ des sphäroidischen Dreiecks bleiben von den neuen, hier eingeführten, Krümmungsmaassen unberührt, wogegen diese letzteren auf die Form des Ausdrucks der Summe der Winkel Einfluss äussern. Man kann diesen Ausdruck schon durch das Vorhergehende erhalten. Die Summe der Winkel des sphärischen Dreiecks ist einestheils

$$= A + B + C + \delta A + \delta B + \delta C$$

und anderntheils

$$= 180^0 + \frac{\Delta'}{n^2}$$

wenn Δ' den Flächeninhalt des sphärischen Dreiecks bezeichnet. Aber aus dem Art 129 der Abhandlung folgt, dass

$$\begin{aligned}\Delta' = \Delta &- \frac{\Delta p}{120n^2}\{a^2 + 2b^2 + 2c^2\} \\ &- \frac{\Delta q}{120n^2}\{2a^2 + b^2 + 2c^2\} \\ &- \frac{\Delta r}{120n^2}\{2a^2 + 2b^2 + c^2\}\end{aligned}$$

Substituirt man sowohl diesen Ausdruck, wie die aus dem Vorhergehenden zu entnehmenden Ausdrücke für δA, δB, δC in die Gleichung

$$A + B + C = 180^0 + \frac{\Delta'}{n^2} - (\delta A + \delta B + \delta C)$$

so ergiebt sich der Ausdruck für die Summe der Winkel des sphäroidischen Dreiecks durch die hier eingeführten Krümmungsmaasse ausgedrückt. Man erkennt, dass in diesem Ausdruck alle im Vorhergehenden vorkommenden Krümmungsmaasse enthalten sein werden.

28.

Ich unterlasse die Entwickelung des im vor. Art. angedeuteten Ausdrucks auszuführen, nicht nur weil jeder, welcher ihn kennen zu

lernen wünscht, sich denselben leicht entwickeln kann, sondern vielmehr deshalb, weil sich ein anderer Ausdruck für die Summe dieser Winkel geben lässt, welcher wenigstens für das Revolutionsellipsoid auf einen sehr einfachen Ausdruck hinführt. Um diesen zu erhalten, nehme ich den Ausdruck vor, welchen ich im Art. 122 der Abhandlung abgeleitet habe, nemlich

$$\begin{aligned}
A+B+C = 180^0 &+ \tfrac{\Delta}{3}\{\alpha+\beta+\gamma\}\\
&+ \tfrac{\Delta\alpha^2}{90}\{k^2-3h^2+7hh'-3h'^2\}\\
&- \tfrac{\Delta\alpha\beta}{180}\{k^2-2h^2+7hh'-4h'^2\}\\
&- \tfrac{\Delta\alpha\gamma}{180}\{k^2-4h^2+7hh'-2h'^2\}\\
&- \tfrac{\Delta}{12}\{\lambda k^2+\lambda' k(h+h')+\lambda''(h^2-hh'+h'^2)\}\ *)\\
&- \tfrac{\Delta}{180}\{8\mu k^3+12\mu' k^2(h+h')+6\mu'' k(3h^2-2hh'+3h'^2)\\
&\qquad +\mu'''(7h^3-3h^2h'-3hh'^2+7h'^3)\}
\end{aligned}$$

Aber im Art. 20 fanden wir, dass

$$\begin{aligned}
&\lambda k^2+\lambda' k(h+h')+\lambda''(h^2-hh'+h'^2) =\\
&-\tfrac{5}{9}\mu k^3-\tfrac{5}{6}\mu' k^2(h+h')-\tfrac{1}{6}\mu'' k(7h^2-4hh'+7h'^2)\\
&-\tfrac{1}{18}\mu'''(8h^3-3h^2h'-3hh'^2+8h'^3)+3C-\tfrac{1}{2}D
\end{aligned}$$

Die Substitution des Werths der linken Seite dieser Gleichung giebt sogleich

$$\begin{aligned}
A+B+C = 180^0 &+ \tfrac{\Delta}{3}\{\alpha+\beta+\gamma\}\\
&+ \tfrac{\Delta\alpha^2}{90}\{k^2-3h^2+7hh'-3h'^2\}\\
&- \tfrac{\Delta\alpha\beta}{180}\{k^2-2h^2+7hh'-4h'^2\}\\
&- \tfrac{\Delta\alpha\gamma}{180}\{k^2-4h^2+7hh'-2h'^2\}\\
&+ \tfrac{\Delta}{1080}\{2\mu k^3+3\mu' k^2(h+h')-3\mu'' k(h^2-4hh'+h'^2)\\
&\qquad -\mu'''(2h^3-3h^2h'-3hh'^2+2h'^3)\}\\
&- \tfrac{\Delta}{4}\{C-\tfrac{1}{6}D\}
\end{aligned}$$

*) Durch Schreib- oder Druckfehler steht in der Abhandlung $+hh'$ statt $-hh'$ im Coefficienten von λ''.

oder nachdem C und D durch die im Vorhergehenden dafür gegebenen Ausdrücke entfernt worden sind,

$$\begin{aligned} A+B+C = 180^0 &+ \frac{\Delta}{12}\{\alpha+\beta+\gamma+9\delta\} \\ &+ \frac{\Delta\alpha^2}{540}\{2k^2-h^2+4hh'-h'^2\} \\ &- \frac{\Delta\alpha\beta}{540}\{k^2-2h^2+2hh'+h'^2\} \\ &- \frac{\Delta\alpha\gamma}{540}\{k^2+h^2+2hh'-2h'^2\} \\ &+ \frac{\Delta}{1080}\{2\mu k^3+3\mu' k^2(h+h')-3\mu'' k(h^2-4hh'+h'^2) \\ &\qquad -\mu'''(2h^3-3h^2h'-3hh'^2+2h'^3)\} \end{aligned}$$

Führt man endlich auch die Dreiecksseiten, und die durch die folgenden Gleichungen bestimmten Functionen

$$\begin{aligned} M &= \mu\sin^3 B + 3\mu'\sin^2 B\cos B + 3\mu''\sin B\cos^2 B + \mu'''\cos^3 B \\ M' &= \mu'\sin^2 B + 2\mu''\sin B\cos B + \mu'''\cos^2 B \\ M'' &= \mu''\sin B + \mu'''\cos B \\ M''' &= \mu''' \end{aligned}$$

ein, in deren Ausdrücken B den der Seite b gegenüber liegenden Dreieckswinkel bezeichnet, so ergiebt sich nach einer leicht auszuführenden Reduction:

$$\begin{aligned} A+B+C = 180^0 &+ \frac{\Delta}{12}\{\alpha+\beta+\gamma+9\delta\} \\ &- \frac{\Delta a^2}{540}\{2a^2-b^2-c^2\} \\ &+ \frac{\Delta\alpha\beta}{540}\{a^2-2b^2+c^2\} \\ &+ \frac{\Delta\alpha\gamma}{540}\{a^2+b^2-2c^2\} \\ &+ \frac{\Delta}{1080}\{2Mc^3-3M'ac^2-3M''a^2c+2M'''a^3\} \end{aligned}$$

welcher Ausdruck auch bis auf Grössen sechster Ordnung richtig ist, und bei welchem ich hier stehen bleiben werde, da er in seiner Anwendung auf das Revolutionsellipsoid auf sehr einfache und genaue Ausdrücke führt.

§ 3. Anwendung der vorhergehenden Theorie auf das Revolutionsellipsoid.

29

Die Krümmungsmaasse des Revolutionsellipsoids sind Functionen der reducirten Breiten der betreffenden Punkte der Oberfläche, da aber die weiter unten folgenden Formeln einfacher werden, wenn man darin die Ergänzungen der reducirten Breiten zu 90° einführt, so sollen diese hier sogleich angewandt, und mit $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, etc. bezeichnet werden. Es wird nun zufolge des Art. 135 der Abhandlung bis auf Grössen sechster Ordnung irgend ein Krümmungsmaass, z. B. α, durch den folgenden Ausdruck gegeben:

$$\alpha = \frac{1}{n^2}\{1 - (e^2 + \tfrac{1}{2}e^4)\cos 2\bar{\alpha} + \tfrac{1}{4}e^4(3\cos^2 2\bar{\alpha} - 1)\}$$

wenn n die grosse Halbachse des Ellipsoids und e die Excentricität desselben bezeichnen. Die oben im Art. 24 eingeführten Functionen p, q, etc. bekommen daher die folgenden Ausdrücke:

$$p = -(e^2 + \tfrac{1}{2}e^4)\cos 2\bar{\alpha} + \tfrac{1}{4}e^4(3\cos^2 2\bar{\alpha} - 1)\}$$
$$q = -(e^2 + \tfrac{1}{2}e^4)\cos 2\bar{\beta} + \tfrac{1}{4}e^4(3\cos^2 2\bar{\beta} - 1)\}$$
etc. etc.

und der vorletzte Ausdruck für δA des Art. 25 wird, wenn man

$$F = 4 - \frac{1}{n^2}(a^2 - 3b^2 - 3c^2)$$

setzt, sofort

$$\delta A = 3\frac{\triangle(e^2+\frac{1}{2}e^4)}{40n^2}\{2\cos 2\bar{\delta} + \cos 2\bar{\beta}_{,} + \cos 2\bar{\gamma}_{,}\}$$
$$+ \frac{\triangle(e^2+\frac{1}{2}e^4)}{480n^2}F\{2\cos 2\bar{\alpha} + \cos 2\bar{\beta} + \cos 2\bar{\gamma}\}$$
$$- \frac{\triangle e^4}{160n^2}\left\{\begin{matrix}9(2\cos^2 2\bar{\delta} + \cos^2 2\bar{\beta}_{,} + \cos^2 2\bar{\gamma}_{,}) \\ +(2\cos^2 2\bar{\alpha} + \cos^2 2\bar{\beta} + \cos^2 2\bar{\gamma}_{,}) - 4\frac{1}{3}^0\end{matrix}\right\}$$

welcher Ausdruck bis auf Grössen achter Ordnung richtig ist.

Da hier p, q, etc. kleine Grössen zweiter Ordnung sind, so fallen die a. a. O. mit p^2, pq, pr multiplicirten Glieder weg, und da in jedem

Punkt des Revolutionsellipsoids die Hauptkrümmungshalbmesser wenigstens nur um eine Grösse zweiter Ordnung von einander verschieden sind, so bezieht sich hier $\bar{\delta}$ auf die normale Projection des Schwerpunkts des Dreiecks, und bleibt daher bei der Anwendung des vorstehenden Ausdrucks auf die Berechnung von δB und δC unverändert.

Ich mache ausserdem darauf aufmerksam, dass wenn man die Dreiecksfläche Δ in Secunden, und die Quadrate der Dreiecksseiten in Theilen des Kreisradius ausdrückt, $n = 1$ gesetzt werden muss. Der obige Ausdruck wird nach Einführung dieser Bedingungen

$$F = 4 - a^2 + 3(b^2 + c^2)$$

$$\delta A = 3\,\frac{\Delta(e^2+\frac{1}{2}e^4)}{40}\{2\cos 2\bar{\delta} + \cos 2\bar{\beta}_{,} + \cos 2\bar{\gamma}_{,}\}$$
$$+ \frac{\Delta(e^2+\frac{1}{2}e^4)}{480} F\{2\cos 2\bar{\alpha} + \cos 2\bar{\beta} + \cos 2\bar{\gamma}\}$$
$$- \frac{\Delta e^4}{160}\left\{\begin{matrix} 9\,(2\cos^2 2\bar{\delta} + \cos^2 2\bar{\beta}_{,} + \cos^2 2\bar{\gamma}_{,}) \\ +\,(2\cos^2 2\bar{\alpha} + \cos^2 2\bar{\beta} + \cos^2 2\bar{\gamma}) - {}^{4}_{3}{}^{0} \end{matrix}\right\}$$

und giebt ohne Weiteres δA in Secunden ausgedrückt. Statt Δ kann man immer ohne Bedenken die Fläche Δ' des sphärischen Dreiecks anwenden, und diese immer, wenn sie nicht ohnehin bekannt ist, durch den strengen Ausdruck

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{4}\Delta' = \sqrt{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}s\,\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(s-a)\,\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(s-b)\,\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(s-c)}$$

wo $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ ist, mit Leichtigkeit und Genauigkeit berechnen. (S. Geod. Unt. Art. 81.)

30.

Für die Summe der Winkel des sphäroidischen Dreiecks auf dem Revolutionsellipsoid brauchen wir unter andern die Ausdrücke

$$M = -16\,e^2 \sin\bar{\alpha}\cos\bar{\alpha}\cos\chi$$
$$M' = -{}^{16}_{3}\,e^2 \sin\bar{\alpha}\cos\bar{\alpha}\{\cos(\chi+B) + 2\cos\chi\cos B\}$$
$$M'' = -{}^{16}_{3}\,e^2 \sin\bar{\alpha}\cos\bar{\alpha}\{\cos\chi + 2\cos B\cos(\chi+B)\}$$
$$M''' = -16\,e^2 \sin\bar{\alpha}\cos\bar{\alpha}\cos(\chi+B)$$

die man nebst den folgenden Hülfsgleichungen

$$2ac\cos B = a^2 - b^2 + c^2$$
$$a\sin B = b\sin A$$
$$a\cos B = c - b\cos A$$
$$a\cos(\chi + B) = c\cos\chi - b\cos\chi'$$

wo $\chi' = \chi - A$ ist, im Art. 135 der Abhandlung vorfindet. Die Substitution dieser Ausdrücke in den letzten Ausdruck des Art. 28 giebt hierauf, wenn man fortfährt $n = 1$ zu setzen,

$$\begin{aligned}
A + B + C = {} & 180^0 + \Delta \\
& - \tfrac{\Delta(e^2 + \frac{1}{2}e^4)}{12}\{\cos 2\bar{\alpha} + \cos 2\bar{\beta} + \cos 2\gamma + 9\cos 2\bar{\delta}\} \\
& + \tfrac{\Delta e^4}{16}\{\cos^2 2\alpha + \cos^2 2\beta + \cos^2 2\bar{\gamma} + 9\cos^2 2\delta - 4\} \\
& + \tfrac{\Delta e^2}{540}\{2a^2 - b^2 - c^2\}\cos 2\bar{\alpha} \\
& - \tfrac{\Delta e^2}{540}\{a^2 - 2b^2 + c^2\}\cos 2\bar{\beta} \\
& - \tfrac{\Delta e^2}{540}\{a^2 + b^2 - 2c^2\}\cos 2\bar{\gamma} \\
& + 2\tfrac{\Delta e^2}{135}\{(a^2 - 2b^2 + c^2)c\cos\chi + (a^2 + b^2 - 2c^2)b\cos\chi'\}\sin\bar{\alpha}\cos\alpha
\end{aligned}$$

auch bis auf Grössen achter Ordnung richtig. Zu bemerken ist, dass hier χ und χ' die Azimuthe der Dreiecksseiten c und b im Dreiecks-punkt A sind.

31.

Wendet man die im Art. 27 enthaltene Relation zwischen der Fläche des sphäroidischen und der des sphärischen Dreiecks auf das Revolutionsellipsoid an, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}
\Delta = \Delta' & - \tfrac{\Delta e^2}{120}\{2s' - a^2\}\cos 2\bar{\alpha} \\
& - \tfrac{\Delta e^2}{120}\{2s' - b^2\}\cos 2\bar{\beta} \\
& - \tfrac{\Delta e^2}{120}\{2s' - c^2\}\cos 2\bar{\gamma}
\end{aligned}$$

wo

$$s' = a^2 + b^2 + c^2$$

ist, und die Anwendung dieser Gleichung auf die des vor. Art. giebt

$$\begin{aligned}
\delta A + \delta B + \delta C = {} & \frac{\triangle(e^2+\frac{1}{2}e^4)}{12}\{\cos 2\bar{\alpha} + \cos 2\bar{\beta} + \cos 2\bar{\gamma} + 9\cos 2\bar{\delta}\} \\
& - \frac{\triangle e^4}{16}\{\cos^2 2\bar{\alpha} + \cos^2 2\bar{\beta} + \cos^2 2\bar{\gamma} + 9\cos^2 2\bar{\delta} - 4\} \\
& + \frac{\triangle e^2}{216}\{4s' - 3a^2\}\cos 2\bar{\alpha} \\
& + \frac{\triangle e^2}{216}\{4s' - 3b^2\}\cos 2\bar{\beta} \\
& + \frac{\triangle e^2}{216}\{4s' - 3c^2\}\cos 2\bar{\gamma} \\
& - 2\frac{\triangle e^2}{135}\{(s'-3b^2)c\cos\chi + (s'-3c^2)b\cos\chi'\}\sin\bar{\alpha}\cos\bar{\alpha}
\end{aligned}$$

welcher Ausdruck denselben Grad der Genauigkeit besitzt, als der des vor. Art.

32.

Wenn man will kann man, wie ich früher gezeigt habe, aus diesen Ausdrücken die Azimuthe mit Leichtigkeit eliminiren. Da sie hier nur im Gliede höchster Ordnung vorkommen, so reichen die folgenden Gleichungen dazu aus:

$$\begin{aligned}
c\cos\chi\sin\bar{\alpha} &= \cos\bar{\alpha} - \cos\bar{\beta} \\
b\cos\chi'\sin\bar{\alpha} &= \cos\bar{\alpha} - \cos\bar{\gamma}
\end{aligned}$$

und die Elimination giebt das letzte Glied der Ausdrücke des vorvor. Art. =

$$2\frac{\triangle e^2}{135}\{(3a^2 - s')\cos^2\bar{\alpha} + (3b^2 - s')\cos\bar{\alpha}\cos\bar{\beta} + (3c^2 - s')\cos\bar{\alpha}\cos\bar{\gamma}\}$$

Da aber die Dreiecksseiten als kleine Grössen der ersten Ordnung betrachtet werden, so sind die Unterschiede

$$\cos\bar{\alpha} - \cos\bar{\beta} \quad , \quad \cos\bar{\alpha} - \cos\bar{\gamma}$$

gewiss auch kleine Grössen von wenigstens der ersten Ordnung, stellen wir daher die Function

$$P(\cos\bar{\alpha} - \cos\beta)^2 + Q(\cos\bar{\alpha} - \cos\bar{\gamma})^2$$

auf, so ist diese gewiss mindestens von der $(m+2)^{\text{ten}}$ Ordnung, wenn P und Q von der m^{ten} Ordnung sind. Seien

$$P = \tfrac{1}{2}(3b^2 - s') \quad , \quad Q = \tfrac{1}{2}(3c^2 - s')$$

so können wir dem Vorhergehenden zufolge setzen:

$$0 = -\tfrac{1}{2}(3a^2 - s')\cos^2\bar{\alpha} + \tfrac{1}{2}(3b^2 - s')\cos^2\bar{\beta} + \tfrac{1}{2}(3c^2 - s')\cos^2\bar{\gamma}$$
$$-(3b^2 - s')\cos\bar{\alpha}\cos\bar{\beta} - (3c^2 - s')\cos\bar{\alpha}\cos\bar{\gamma}$$

Zwar ist diese Function nicht strenge gleich Null, sondern gleich einer Grösse von mindestens der vierten Ordnung, sie wird also, wenn sie mit Δe^2 multiplicirt wird, zu einer Grösse von mindestens der achten Ordnung, und zählt daher zu den Grössen, die hier überhaupt übergangen werden.

Addirt man nun die eben erhaltene Gleichung zu der innerhalb der Klammern befindlichen Function des vorstehenden Ausdrucks des letzten Gliedes in $A + B + C$, so wird dieses letzte Glied =

$$\tfrac{\Delta e^2}{135}\{(3a^2 - s')\cos^2\bar{\alpha} + (3b^2 - s')\cos^2\bar{\beta} + (3c^2 - s')\cos^2\bar{\gamma}\}$$
$$= \tfrac{\Delta e^2}{270}\{(3a^2 - s')\cos 2\bar{\alpha} + (3b^2 - s')\cos 2\bar{\beta} + (3c^2 - s')\cos 2\gamma\}$$

und der ganze Ausdruck für die Summe der Winkel nimmt die folgende Form an:

$$A + B + C = 180^0 + \Delta$$
$$-\tfrac{\Delta(e^2 + \frac{1}{2}e^4)}{12}\{\cos 2\bar{\alpha} + \cos 2\bar{\beta} + \cos 2\bar{\gamma} + 9\cos 2\bar{\delta}\}$$
$$+\tfrac{\Delta e^4}{16}\{\cos^2 2\bar{\alpha} + \cos^2 2\bar{\beta} + \cos^2 2\bar{\gamma} + 9\cos^2 2\bar{\delta} - 4\}$$
$$+\tfrac{\Delta e^2}{180}\{3a^2 - s'\}\cos 2\bar{\alpha}$$
$$+\tfrac{\Delta e^2}{180}\{3b^2 - s'\}\cos 2\bar{\beta}$$
$$+\tfrac{\Delta e^2}{180}\{3c^2 - s'\}\cos 2\bar{\gamma}$$

Aus diesem Ausdruck erhält man auf dieselbe Weise wie im vor. Art.

$$\delta A + \delta B + \delta C = \frac{\Delta(e^2+\frac{1}{2}e^4)}{12}\{\cos 2\bar{\alpha} + \cos 2\bar{\beta} + \cos 2\bar{\gamma} + 9\cos 2\bar{\delta}\}$$
$$- \frac{\Delta e^4}{16}\{\cos^2 2\bar{\alpha} + \cos^2 2\bar{\beta} + \cos^2 2\bar{\gamma} + 9\cos^2 2\bar{\delta} - 4\}$$
$$+ \frac{\Delta e^2}{360}\{8s' - 9a^2\}\cos 2\bar{\alpha}$$
$$+ \frac{\Delta e^2}{360}\{8s' - 9b^2\}\cos 2\bar{\beta}$$
$$+ \frac{\Delta e^2}{360}\{8s' - 9c^2\}\cos 2\gamma$$

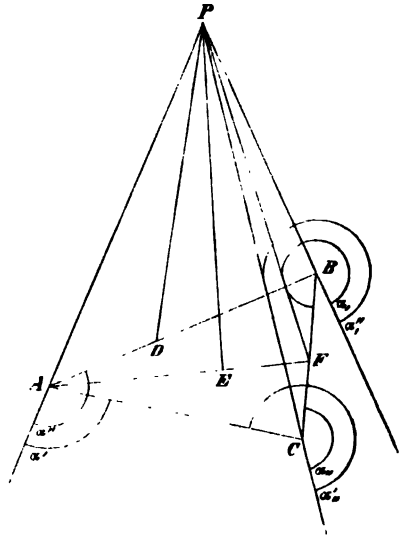
Alle diese Ausdrücke sind bis auf Grössen achter Ordnung richtig, die letzten sind überdies symmetrisch.

Ich bemerke hiezu, dass hier, gleich wie in allen vorhergehenden Ausdrücken unbedenklich Δ' statt Δ gesetzt werden darf, da der Unterschied zwischen diesen beiden Flächen immer sehr klein ist.

Diese Ausdrücke für die Summe $\delta A + \delta B + \delta C$ sind in der Anwendung zur Controle von Nutzen, nachdem die Werthe von δA, δB, δC, jeder für sich berechnet worden sind.

33.

Die reducirten Breiten, also auch ihre Ergänzungen zu 90°, $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$, die den Eckpunkten A, B, C des Dreiecks angehören, werden hier als gegebene Grössen betrachtet, aus welchen $\bar{\beta}_1$, $\bar{\gamma}_1$, $\bar{\delta}$ zu berechnen sind. Betrachten wir zuerst ein sphärisches Dreieck, und dessen Beziehungen zu einem, auf der Oberfläche der Kugel, als Pol betrachteten Punkt.



In der vorstehenden Figur sei P der Pol und ABC das Dreieck, um welches es sich handelt. Die Bögen PA, PD, PB, etc. sind also die Polardistanzen der Punkte A, D, B, etc., die Bedeutung der mit α', α'', $\alpha_{,}$, etc. bezeichneten Azimuthe ist auch ohne Weiteres aus der Figur ersichtlich. Diese Bezeichnung der Azimuthe ist dieselbe, die ich im Art. 76 der Abhandlung angewandt habe, und in derselben Bezeichnung würden PA, PB, PC bez. $90^0 - \beta$, $90^0 - \beta'$, $90^0 - \beta''$, so wie BC, AC, AB bez. σ, σ', σ'' zu benennen sein. Hier will ich indess für einen Augenblick

$$PA = \bar{\alpha} \ , \ PD = \bar{\gamma}_{,} \ , \quad PB = \bar{\beta}$$
$$AD = \mu \ , \ DB = \nu \ , \ PDB = w \ , \ AB = c$$

setzen, worauf die sphärische Trigonometrie

$$\cos\bar{\alpha} = \cos\bar{\gamma}_{,}\cos\mu - \sin\bar{\gamma}_{,}\sin\mu\cos w$$
$$\cos\bar{\beta} = \cos\bar{\gamma}_{,}\cos\nu + \sin\bar{\gamma}_{,}\sin\nu\cos w$$

giebt. Wegen $c = \mu + \nu$ folgt hieraus

$$\cos\bar{\gamma}_{,} = \frac{\cos\bar{\alpha}\sin\nu + \cos\bar{\beta}\sin\mu}{\sin c}$$

Dieser Ausdruck verliert mehr und mehr seine Anwendbarkeit, so wie sich der Punkt D dem Pole nähert, und also der Bogen $\bar{\gamma}_{,}$ klein wird, allein man kann ihn auf bekannte Art so umformen, dass er in allen Fällen brauchbar wird. Man findet aus demselben

$$\sin\tfrac{1}{2}\bar{\gamma}_{,} = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(\bar{\alpha}+\mu)\sin\frac{1}{2}(\bar{\alpha}-\mu)\sin\nu + \sin\frac{1}{2}(\bar{\beta}+\nu)\sin\frac{1}{2}(\bar{\beta}-\nu)\sin\mu}{\sin c}}$$

und

$$\cos\tfrac{1}{2}\bar{\gamma}_{,} = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(\bar{\alpha}+\mu)\cos\frac{1}{2}(\bar{\alpha}-\mu)\sin\nu + \cos\frac{1}{2}(\bar{\beta}+\nu)\cos\frac{1}{2}(\bar{\beta}-\nu)\sin\mu}{\sin c}}$$

aus welchen man

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\bar{\gamma}_{,} = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(\bar{\alpha}+\mu)\sin\frac{1}{2}(\bar{\alpha}-\mu)\sin\nu + \sin\frac{1}{2}(\bar{\beta}+\nu)\sin\frac{1}{2}(\bar{\beta}-\nu)\sin\mu}{\cos\frac{1}{2}(\bar{\alpha}+\mu)\cos\frac{1}{2}(\bar{\alpha}-\mu)\sin\nu + \cos\frac{1}{2}(\beta+\nu)\cos\frac{1}{2}(\bar{\beta}-\nu)\sin\mu}}$$

erhält; der erste oder der zweite dieser drei Ausdrücke wird immer hinreichende Genauigkeit gewähren.

34.

Die Ausdrücke des vor. Art. zur Erlangung von $\bar{\gamma}_{,}$ sind von den Azimuthen an den Dreiecksecken unabhängig, allein man kann sie auch von diesen abhängig machen, und dadurch vereinfachen. Das Dreieck $A\,P\,D$ der Figur des vor. Art. giebt sogleich

$$\cos\bar{\gamma}_{,} = \cos\bar{\alpha}\cos\mu - \sin\bar{\alpha}\sin\mu\cos\alpha''$$

oder nach bekannter Umformung

$$\sin\tfrac{1}{2}\bar{\gamma}_{,} = \sqrt{\sin^2\tfrac{1}{2}(\bar{\alpha}-\mu) + \sin\mu\sin\bar{\alpha}\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha''}$$

oder

$$\cos\tfrac{1}{2}\bar{\gamma}_{,} = \sqrt{\cos^2\tfrac{1}{2}(\bar{\alpha}+\mu) + \sin\mu\sin\bar{\alpha}\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha''}$$

oder

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\bar{\gamma}_{,} = \sqrt{\frac{\sin^2\tfrac{1}{2}(\bar{\alpha}-\mu) + \sin\mu\sin\bar{\alpha}\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha''}{\cos^2\tfrac{1}{2}(\bar{\alpha}+\mu) + \sin\mu\sin\bar{\alpha}\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha''}}$$

Auf dieselbe Weise kann man auch den Punkt B statt A zuziehen. Man erhält damit

$$\sin\tfrac{1}{2}\bar{\gamma}_{,} = \sqrt{\sin^2\tfrac{1}{2}(\bar{\beta}-\nu) + \sin\nu\sin\bar{\beta}\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha_{,}''}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\bar{\gamma}_{,} = \sqrt{\cos^2\tfrac{1}{2}(\bar{\beta}+\nu) + \sin\nu\sin\bar{\beta}\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha_{,}''}$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\bar{\gamma}_{,} = \sqrt{\frac{\sin^2\tfrac{1}{2}(\bar{\beta}-\nu) + \sin\nu\sin\bar{\beta}\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha_{,}''}{\cos^2\tfrac{1}{2}(\bar{\beta}+\nu) + \sin\nu\sin\bar{\beta}\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha_{,}''}}$$

Diese Ausdrücke sind einfacher wie die des vor. Art.

35.

Betrachten wir nun auf dem Revolutionsellipsoid ausser dem Pol P irgend zwei beliebige Punkte A und B, die durch eine geodätische Linie mit einander verbunden sind. Im ersten Abschnitt der Abhandlung ist bewiesen worden, dass im ellipsoidischen Dreieck $A\,P\,B$ die Relationen der sphärischen Trigonometrie statt finden, wenn man unter den Seiten $A\,P$ und $B\,P$ die Ergänzungen der reducirten Breiten zu 90^0, und unter den Winkeln an A und B die ellipsoidischen, oder geodätischen Azimuthe der Endpunkte der Linie $A\,B$, bez. ihre Ergänzungen zu 180^0, oder ihre Ueberschüsse über 180^0 versteht. Für $A\,B$ selbst muss die

reducirte geodätische Linie, d. i. die Linie substituirt werden, die ich a. a. O. mit χ oder $\varphi'' - \varphi'$ bezeichnet habe.

Wenn man nur das Quadrat der Excentricität berücksichtigt, womit man hier vollständig ausreicht, so lässt sich der Ausdruck des Art. 13 der Abhandlung für φ'' leicht in den folgenden umformen:

$$\chi = \sigma + \tfrac{1}{4} e^2 \sigma \{1 - \cos k \cos k' - \sin k \sin k' \cos (l - l')\}$$

in welchem σ überhaupt eine geodätische Linie, k und k' die Ergänzungen zu 90^0 der reducirten Breiten ihrer Endpunkte, und l und l' die Azimuthe an diesen Endpunkten bedeuten. Man kann diesen Ausdruck leicht in den folgenden umwandeln:

$$\chi = \sigma + \tfrac{1}{2} e^2 \sigma \{\sin^2 \tfrac{1}{2} (k + k') - \sin k \sin k' \cos^2 \tfrac{1}{2} (l - l')\}$$

in welcher Form er um deswillen zur Anwendung geeigneter ist als der vorhergehende, weil man in vielen Fällen das letzte Glied desselben übergehen kann. Wenn nemlich die betreffende geodätische Linie dem Pole nicht allzu nahe liegt, so wird $\frac{1}{2} (l - l')$ nahe $= 90^0$ oder $= 270^0$, und der Cosinus dieses Bogens also sehr klein; dasselbe Glied wird überdies in der Nähe des Poles dadurch verkleinert, dass $\sin k$ und $\sin k'$ dort klein sind. Oftmals kann man in Bezug auf die gegenwärtige Aufgabe diese ganze Reduction übergehen und $\chi = \sigma$ setzen, jedenfalls kann man in dem Werthe derselben eine Anzahl Secunden, und manchmal eine Minute und mehr, vorgeben.

Ich füge noch hinzu, dass wenn die geodätische Linie ein Meridianbogen ist, strenge

$$\chi = \pm (k - k')$$

wird (s. Abhandlg. Art. 34), wo von dem doppelten Zeichen dasjenige zu wählen ist, welches χ positiv macht.

36.

Bei der Anwendung des Vorhergehenden auf unsere Aufgabe sollen wieder die Dreiecksseiten wie früher mit a, b, c, und die reducirten Seiten, oder die betreffenden Werthe von χ mit a', b', c' bezeichnet werden. Die Ergänzungen der reducirten Breiten zu 90^0 sollen wieder $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, etc. heissen, und die Azimuthe die Bezeichnung bekommen, die

ihnen in der Figur des Art. 33 gegeben worden ist. Dieses vorausgesetzt, findet man nun sogleich aus dem vor. Art.

$$a' = a + \tfrac{1}{2}e^2 a\{\sin^2\tfrac{1}{2}(\bar\beta+\bar\gamma) - \sin\bar\beta\,\sin\bar\gamma\,\cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha_{,}-\alpha_{,,})\}$$
$$b' = b + \tfrac{1}{2}e^2 b\{\sin^2\tfrac{1}{2}(\bar\alpha+\bar\gamma) - \sin\bar\alpha\,\sin\bar\gamma\,\cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha_{,,}'-\alpha')\}$$
$$c' = c + \tfrac{1}{2}e^2 c\{\sin^2\tfrac{1}{2}(\bar\alpha+\bar\beta) - \sin\bar\alpha\,\sin\bar\beta\,\cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha_{,}''-\alpha'')\}$$

Strenge genommen müssten die Theilungspunkte der Dreiecksseiten, die oben eingeführt worden sind, jeder für sich, eben so behandelt werden, allein die Reductionen der Bögen oder Seitentheile, die ihnen angehören, sind den Reductionen der ganzen Dreiecksseiten so nahe proportional, dass der Unterschied davon gar nicht beachtet zu werden verdient.

Ich nehme hier an, dass sowohl a, b, c wie a', b', c' in Secunden, oder überhaupt in Bogentheilen ausgedrückt werden.

37.

Gehen wir zur Berechnung der Ergänzungen der reducirten Breiten ohne Anwendung der Azimuthe über, so sind zuerst die Werthe der Producte $c'u$ und $b'u'$ zu berechnen. Da die letzten der im Art. 25 erhaltenen Werthe von u und u' diejenigen sind, die hier angewandt werden müssen, und darin p übergangen werden darf, so bekommt man sogleich

$$c'u = \tfrac{2c'}{135}\{3a^2 + (b^2+c^2) - 7(b^2-c^2)\}$$
$$b'u' = \tfrac{2b'}{135}\{3a^2 + (b^2+c^2) + 7(b^2-c^2)\}$$

in welche man auch b und c statt b' und c' setzen darf. Es wird hier, gleichwie im Folgenden, vorausgesetzt, dass a^2, b^2, c^2 in Theilen des Kreisradius ausgedrückt werden. Setzt man hierauf

$$\mu = \tfrac{1}{3}(c'+c'u) \quad , \quad \nu = c' - \mu$$
$$\mu' = \tfrac{1}{3}(b'+b'u') \quad , \quad \nu' = b' - \mu'$$

so erhält man $\bar\gamma_{,}$ und $\bar\beta_{,}$ aus den folgenden Gleichungen

$$\sin\tfrac{1}{2}\bar\gamma_{,} = \sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}(\bar\alpha+\mu)\sin\tfrac{1}{2}(\bar\alpha-\mu)\sin\nu + \sin\tfrac{1}{2}(\bar\beta+\nu)\sin\tfrac{1}{2}(\bar\beta-\nu)\sin\mu}{\sin c'}}$$
$$\sin\tfrac{1}{2}\bar\beta_{,} = \sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}(\bar\alpha+\mu')\sin\tfrac{1}{2}(\bar\alpha-\mu')\sin\nu' + \sin\tfrac{1}{2}(\gamma+\nu')\sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\nu')\sin\mu'}{\sin c'}}$$

Um $\bar\delta$ zu erhalten sind zuerst

$$a'x = \frac{a'}{20}(c^2 - b^2)$$

$$\mu'' = \tfrac{1}{2}(a' - a'x) \ , \ \nu'' = \tfrac{1}{2}(a' + a'x) = a' - \mu''$$

zu berechnen. Nachdem hierauf die Ergänzung der reducirten Breite des Punkts F der Figur des Art. 33 mit η, und die Linie AF mit λ bezeichnet worden sind*), ergeben sich

$$\sin\tfrac{1}{2}\eta = \sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}(\overline{\beta}+\mu'')\sin\tfrac{1}{2}(\overline{\beta}-\mu'')\sin\nu'' + \sin\tfrac{1}{2}(\overline{\gamma}+\nu'')\sin\tfrac{1}{2}(\overline{\gamma}-\nu'')\sin\mu''}{\sin a'}}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\lambda = \sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}(c'+\mu'')\sin\tfrac{1}{2}(c'-\mu'')\sin\nu'' + \sin\tfrac{1}{2}(b'+\nu'')\sin\tfrac{1}{2}(b'-\nu'')\sin\mu''}{\sin a'}}$$

Rechnet man hierauf

$$\lambda y = \frac{\lambda}{540}\{7a^2 + 4(b^2 + c^2)\}$$

und

$$\mu''' = \tfrac{1}{2}(\lambda - \lambda y) \ , \ \nu''' = \lambda - \mu'''$$

so wird

$$\sin\tfrac{1}{2}\delta = \sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}(\overline{\alpha}+\mu''')\sin\tfrac{1}{2}(\overline{\alpha}-\mu''')\sin\nu''' + \sin\tfrac{1}{2}(\eta+\nu''')\sin\tfrac{1}{2}(\eta-\nu''')\sin\mu'''}{\sin\lambda}}$$

womit alle Krümmungsmaasse gegeben sind, welche die Berechnung von δA erfordert. Für δB und δC kommen noch die hinzu, die an die Stelle von $\overline{\gamma}$, und $\overline{\beta}$, durch Vertauschung der Bezeichnung der Dreiecksstücke treten, und durch die obigen unveränderten Ausdrücke für $\overline{\gamma}$, und $\overline{\beta}$, erhalten werden.

38.

Will man das Verfahren des vor. Art. nicht anwenden, sondern statt dessen dasjenige, welches im Art. 34 im Allgemeinen dargestellt wurde, so ist wie folgt zu verfahren.

Die Hülfsgrössen μ. μ', μ'', μ''' und ν, ν', ν'', ν''' bleiben dieselben wie im vor. Art., aber es werden hier entweder nur die ersten vier, oder die zweiten vier derselben gebraucht. Man bekommt jetzt $\overline{\gamma}$, und $\overline{\beta}$, entweder durch die folgenden Gleichungen

*) Ich bemerke, dass diese, λ genannte, Linie auf dem Revolutionsellipsoid die reducirte Länge der kürzesten Linie ist, die im Art. 12 auch mit λ bezeichnet wurde.

$$\sin\tfrac{1}{2}\bar{\gamma}_{,} = \sqrt{\sin^2\tfrac{1}{2}(\bar{\alpha}-\mu) + \sin\mu\,\sin\bar{\alpha}\,\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha''}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\bar{\beta}_{,} = \sqrt{\sin^2\tfrac{1}{2}(\bar{\alpha}-\mu') + \sin\mu'\,\sin\bar{\alpha}\,\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha'}$$

oder durch die folgenden

$$\sin\tfrac{1}{2}\bar{\gamma}_{,} = \sqrt{\sin^2\tfrac{1}{2}(\bar{\beta}-\nu) + \sin\nu\,\sin\bar{\beta}\,\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha_{,}''}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\bar{\beta}_{,} = \sqrt{\sin^2\tfrac{1}{2}(\bar{\gamma}-\nu') + \sin\nu'\,\sin\bar{\gamma}\,\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha_{,}'}$$

je nachdem man die μ oder die ν anwenden will, welches in der Regel gleichgültig ist. Es können Fälle eintreten, wo es vortheilhafter ist, statt der vorhergehenden die folgenden Gleichungen anzuwenden. Entweder

$$\cos\tfrac{1}{2}\bar{\gamma}_{,} = \sqrt{\cos^2\tfrac{1}{2}(\bar{\alpha}+\mu) + \sin\mu\,\sin\bar{\alpha}\,\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha''}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\bar{\beta}_{,} = \sqrt{\cos^2\tfrac{1}{2}(\bar{\alpha}+\mu') + \sin\mu'\,\sin\bar{\alpha}\,\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha'}$$

oder

$$\cos\tfrac{1}{2}\bar{\gamma}_{,} = \sqrt{\cos^2\tfrac{1}{2}(\bar{\beta}+\nu) + \sin\nu\,\sin\bar{\beta}\,\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha_{,}''}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\bar{\beta}_{,} = \sqrt{\cos^2\tfrac{1}{2}(\bar{\gamma}+\nu') + \sin\nu'\,\sin\bar{\gamma}\,\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha_{,}'}$$

Es folgt unter andern aus diesen Gleichungen:

Wenn $\alpha'' = 0$, oder $= 180^0$, so ist $\bar{\gamma}_{,} = \bar{\alpha} \pm \mu$

» $\alpha' = 0$, » $= 180^0$, » $\bar{\beta}_{,} = \bar{\alpha} \pm \mu'$

» $\alpha_{,}'' = 0$, » $= 180^0$, » $\bar{\gamma}_{,} = \bar{\beta} \pm \nu$

» $\alpha_{,}' = 0$, » $= 180^0$, » $\bar{\beta}_{,} = \bar{\gamma} \pm \nu'$

Das Krümmungsmaass δ kann jetzt auf vier verschiedene Arten berechnet werden, von welchen ich aber nur zwei hier angeben werde.

Entweder, man rechne p und q aus den folgenden Gleichungen

$$\cos p\,\sin q = \sin\mu''\cos(\alpha_{,} - \alpha_{,}'')$$

$$\cos p\,\cos q = \cos\mu''$$

$$\sin p = \sin\mu''\sin(\alpha_{,} - \alpha_{,}'')$$

und hierauf λ, oder den Bogen AF, und w, oder den Winkel FAB der Figur des Art. 33 aus den folgenden

$$\sin\lambda \sin w = \sin p$$
$$\sin\lambda \cos w = \cos p \sin(c' - q)$$
$$\cos\lambda = \cos p \cos(c' - q)$$

statt welcher man auch, wenn das Dreieck nicht zu gross ist, die folgenden

$$\lambda \sin(w + \tfrac{1}{2}(\alpha_{,} - \alpha_{,}'')) = (c' + \mu'') \sin \tfrac{1}{2}(\alpha_{,} - \alpha_{,}'')$$
$$\lambda \cos(w + \tfrac{1}{2}(\alpha_{,} - \alpha_{,}'')) = (c' - \mu'') \cos \tfrac{1}{2}(\alpha_{,} - \alpha_{,}'')$$

anwenden kann; hierauf wird

$$\sin \tfrac{1}{2}\bar{\delta} = \sqrt{\sin^2 \tfrac{1}{2}(\bar{\alpha} - \mu''') + \sin\mu''' \sin\bar{\alpha} \cos^2 \tfrac{1}{2}(\alpha'' - w)}$$

oder geeigneten Falles

$$\cos \tfrac{1}{2}\bar{\delta} = \sqrt{\cos^2 \tfrac{1}{2}(\bar{\alpha} + \mu''') + \sin\mu''' \sin\bar{\alpha} \sin^2 \tfrac{1}{2}(\alpha'' - w)}$$

Oder, man rechne p' und q' aus den folgenden

$$\cos p' \sin q' = \sin \nu'' \cos(\alpha_{,}' - \alpha_{,})$$
$$\cos p' \cos q' = \cos \nu''$$
$$\sin p' = \sin \nu'' \sin(\alpha_{,}' - \alpha_{,})$$

und λ und w', oder den Winkel FAC der Figur, aus den folgenden

$$\sin\lambda \sin w' = \sin p'$$
$$\sin\lambda \cos w' = \cos p' \sin(b' - q')$$
$$\cos\lambda = \cos p' \cos(b' - q')$$

statt welcher man, wenn das Dreieck nicht zu gross ist, die folgenden

$$\lambda \sin(w' + \tfrac{1}{2}(\alpha_{,}' - \alpha_{,})) = (b' + \nu'') \sin \tfrac{1}{2}(\alpha_{,}' - \alpha_{,})$$
$$\lambda \cos(w' + \tfrac{1}{2}(\alpha_{,}' - \alpha_{,})) = (b' - \nu'') \cos \tfrac{1}{2}(\alpha_{,}' - \alpha_{,})$$

anwenden kann; hierauf wird

$$\sin \tfrac{1}{2}\bar{\delta} = \sqrt{\sin^2 \tfrac{1}{2}(\bar{\alpha} - \mu''') + \sin\mu''' \sin\bar{\alpha} \cos^2 \tfrac{1}{2}(\alpha' + w')}$$

oder geeigneten Falles

$$\cos \tfrac{1}{2}\bar{\delta} = \sqrt{\cos^2 \tfrac{1}{2}(\bar{\alpha} + \mu''') + \sin\mu''' \sin\bar{\alpha} \sin^2 \tfrac{1}{2}(\alpha' + w')}$$

Aus den beiderseitigen Ausdrücken für $\bar{\delta}$ geht hervor, dass immer

$$\alpha'' - w = \alpha' + w'$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\bar{\gamma}_{,} = \sqrt{\sin^2\tfrac{1}{2}(\bar{\alpha}-\mu) + \sin\mu\,\sin\bar{\alpha}\,\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha''}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\bar{\beta}_{,} = \sqrt{\sin^2\tfrac{1}{2}(\bar{\alpha}-\mu') + \sin\mu'\,\sin\bar{\alpha}\,\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha'}$$

oder durch die folgenden

$$\sin\tfrac{1}{2}\bar{\gamma}_{,} = \sqrt{\sin^2\tfrac{1}{2}(\bar{\beta}-\nu) + \sin\nu\,\sin\bar{\beta}\,\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha_{,}''}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\bar{\beta}_{,} = \sqrt{\sin^2\tfrac{1}{2}(\bar{\gamma}-\nu') + \sin\nu'\,\sin\bar{\gamma}\,\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha_{,}'}$$

je nachdem man die μ oder die ν anwenden will, welches in der Regel gleichgültig ist. Es können Fälle eintreten, wo es vortheilhafter ist, statt der vorhergehenden die folgenden Gleichungen anzuwenden. Entweder

$$\cos\tfrac{1}{2}\bar{\gamma}_{,} = \sqrt{\cos^2\tfrac{1}{2}(\bar{\alpha}+\mu) + \sin\mu\,\sin\bar{\alpha}\,\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha''}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\bar{\beta}_{,} = \sqrt{\cos^2\tfrac{1}{2}(\bar{\alpha}+\mu') + \sin\mu'\,\sin\bar{\alpha}\,\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha'}$$

oder

$$\cos\tfrac{1}{2}\bar{\gamma}_{,} = \sqrt{\cos^2\tfrac{1}{2}(\bar{\beta}+\nu) + \sin\nu\,\sin\bar{\beta}\,\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha_{,}''}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\bar{\beta}_{,} = \sqrt{\cos^2\tfrac{1}{2}(\bar{\gamma}+\nu') + \sin\nu'\,\sin\bar{\gamma}\,\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha_{,}'}$$

Es folgt unter andern aus diesen Gleichungen:

Wenn $\alpha'' = 0$, oder $= 180^0$, so ist $\bar{\gamma}_{,} = \bar{\alpha} \pm \mu$

» $\alpha' = 0$, » $= 180^0$, » $\bar{\beta}_{,} = \bar{\alpha} \pm \mu'$

» $\alpha_{,}'' = 0$, » $= 180^0$, » $\bar{\gamma}_{,} = \bar{\beta} \pm \nu$

» $\alpha_{,}' = 0$, » $= 180^0$, » $\bar{\beta}_{,} = \bar{\gamma} \pm \nu'$

Das Krümmungsmaass δ kann jetzt auf vier verschiedene Arten berechnet werden, von welchen ich aber nur zwei hier angeben werde.

Entweder, man rechne p und q aus den folgenden Gleichungen

$$\cos p\,\sin q = \sin\mu''\cos(\alpha_{,} - \alpha_{,}'')$$

$$\cos p\,\cos q = \cos\mu''$$

$$\sin p = \sin\mu''\sin(\alpha_{,} - \alpha_{,}'')$$

und hierauf λ, oder den Bogen AF, und w, oder den Winkel FAB der Figur des Art. 33 aus den folgenden

$$\sin\lambda \sin w = \sin p$$
$$\sin\lambda \cos w = \cos p \sin(c' - q)$$
$$\cos\lambda = \cos p \cos(c' - q)$$

statt welcher man auch, wenn das Dreieck nicht zu gross ist, die folgenden

$$\lambda \sin(w + \tfrac{1}{2}(\alpha_{,} - \alpha_{,}'')) = (c' + \mu'') \sin \tfrac{1}{2}(\alpha_{,} - \alpha_{,}'')$$
$$\lambda \cos(w + \tfrac{1}{2}(\alpha_{,} - \alpha_{,}'')) = (c' - \mu'') \cos \tfrac{1}{2}(\alpha_{,} - \alpha_{,}'')$$

anwenden kann; hierauf wird

$$\sin \tfrac{1}{2}\bar{\delta} = \sqrt{\sin^2 \tfrac{1}{2}(\bar{\alpha} - \mu''') + \sin \mu''' \sin \bar{\alpha} \cos^2 \tfrac{1}{2}(\alpha'' - w)}$$

oder geeigneten Falles

$$\cos \tfrac{1}{2}\bar{\delta} = \sqrt{\cos^2 \tfrac{1}{2}(\bar{\alpha} + \mu''') + \sin \mu''' \sin \bar{\alpha} \sin^2 \tfrac{1}{2}(\alpha'' - w)}$$

Oder, man rechne p' und q' aus den folgenden

$$\cos p' \sin q' = \sin \nu'' \cos(\alpha_{,}' - \alpha_{,})$$
$$\cos p' \cos q' = \cos \nu''$$
$$\sin p' = \sin \nu'' \sin(\alpha_{,}' - \alpha_{,})$$

und λ und w', oder den Winkel FAC der Figur, aus den folgenden

$$\sin\lambda \sin w' = \sin p'$$
$$\sin\lambda \cos w' = \cos p' \sin(b' - q')$$
$$\cos\lambda = \cos p' \cos(b' - q')$$

statt welcher man, wenn das Dreieck nicht zu gross ist, die folgenden

$$\lambda \sin(w' + \tfrac{1}{2}(\alpha_{,}' - \alpha_{,})) = (b' + \nu'') \sin \tfrac{1}{2}(\alpha_{,}' - \alpha_{,})$$
$$\lambda \cos(w' + \tfrac{1}{2}(\alpha_{,}' - \alpha_{,})) = (b' - \nu'') \cos \tfrac{1}{2}(\alpha_{,}' - \alpha_{,})$$

anwenden kann; hierauf wird

$$\sin \tfrac{1}{2}\bar{\delta} = \sqrt{\sin^2 \tfrac{1}{2}(\bar{\alpha} - \mu''') + \sin \mu''' \sin \bar{\alpha} \cos^2 \tfrac{1}{2}(\alpha' + w')}$$

oder geeigneten Falles

$$\cos \tfrac{1}{2}\bar{\delta} = \sqrt{\cos^2 \tfrac{1}{2}(\bar{\alpha} + \mu''') + \sin \mu''' \sin \bar{\alpha} \sin^2 \tfrac{1}{2}(\alpha' + w')}$$

Aus den beiderseitigen Ausdrücken für $\bar{\delta}$ geht hervor, dass immer

$$\alpha'' - w = \alpha' + w'$$

sein muss, und dieses folgt auch schon aus der Figur, indem beide die Ergänzung zu 180° des Winkels FAP bezeichnen. Wenn man $\alpha'' - w = 0$, oder $= 180^0$ findet, so ist dieses das Zeichen, dass der Bogen AF oder $\bar{\delta}$ ein Meridianbogen ist, und in diesem Falle wird

$$\bar{\delta} = \bar{\alpha} \pm \mu'''$$

wo das obere Zeichen zu $\alpha'' - w = 0$, und das untere zu $\alpha'' - w = 180^0$ gehört.

Diese Ausdrücke sind kürzer als die des vor. Art. Der dort vorkommende Bogen η wird hier nicht gebraucht, wogegen aber die Azimuthe eintreten, die man gemeiniglich, wenigstens mit der hier erforderlichen, geringen Genauigkeit kennt. Sollte man die Azimuthe gar nicht kennen, so muss man die Ausdrücke des vor. Art. anwenden.

Ich lasse schliesslich nicht unerwähnt, dass man die obigen zweigliedrigen Formeln durch Einführung eines Hülfswinkels auf bekannte Weise zusammenziehen kann.

§ 4. Berechnung von Beispielen.

39.

Mit dem Vorhergehenden ist die Theorie, die ich in diesem Supplement zu entwickeln beabsichtigte, dargelegt, und ich könnte daher, wie es oftmals geschieht, hier schliessen, allein es ist noch eine wichtige Frage zu erörtern, die ich nicht meine übergehen, oder mit nichtssagenden Worten abfertigen zu dürfen. Es ist dieses die Frage, welche Genauigkeit die hier für das Revolutionsellipsoid entwickelte Formel gewährt, und die Vergleichung dieser Genauigkeit mit der Genauigkeit, die andere vorhandene und angepriesene Formeln gewähren. Schon in der oft angezogenen Abhandlung habe ich in Bezug auf die dort entwickelten Formeln eine solche Untersuchung ausgeführt, und werde in Bezug auf die hier entwickelte Formel diese auch vornehmen. Ich werde die Probedreiecke der Abhandlung vornehmen, sie um einige vermehren, und die strengen Resultate, die sie darbieten, sowohl mit den Resultaten der hier entwickelten Formel, wie mit der, die Weingarten angepriesen hat, vergleichen. Diese Probedreiecke, die für die Abhandlung mit Logarithmen von nur sieben Decimalen berechnet worden waren, habe ich jetzt, zur Erlangung einer grösseren Schärfe der Vergleichung mit Logairthmen von zehn Decimalen auf's Neue berechnet.

40.

Nehmen wir zuerst das Dreieck des Art. 141 der Abhandlung vor, welches auf dem Revolutionsellipsoid nahe in der Mitte zwischen dem Pol und dem Aequator liegt. Die Stücke dieses Dreiecks sind nach der neuen Berechnung die folgenden:

$\bar{\alpha} = 45^0\ 0'\ 0''$ $\quad \bar{\beta} = 58^0\ 23'\ 31''8066$, $\bar{\gamma} = 42^0\ 15'\ 37''4337$

$\alpha' = 108\ 0\ 0$ $\quad \alpha_{,} = 147\ 57\ 28.2010$, $\alpha_{,,} = 317\ 47\ 15.6526$

$\alpha'' = 30\ 0\ 0$ $\quad \alpha_{,}'' = 204\ 31\ 40.5363$, $\alpha_{,,}' = 270\ 9\ 36.0396$

$A = 78\ 0\ 0$ $\quad B = 56\ 34\ 12.3353$, $C = 47\ 37\ 39.6130$

$a = 20\ 2\ 24.4148$, $b = 17\ 0\ 0$, $c = 15\ 0\ 0$

$\lambda = 15\ 41\ 4.9168$, $\lambda' = 24\ 25\ 28.6062$, $\lambda'' = 8\ 44\ 23,6894$

Die Berechnung der Winkel des sphärischen Dreiecks, welches dieselben Seiten hat, gab:

$$A + \delta A = 77^0\ 59'\ 58''594$$
$$B + \delta B = 56\ 54\ 8.830$$
$$C + \delta C = 47\ 37\ 38.645$$
$$\Delta' = 2^0\ 11'\ 46''069$$

und durch die Vergleichung dieser Winkel mit den vorstehenden des sphäroidischen Dreiecks erhält man

$$\delta A = -1''406$$
$$\delta B = -3.505$$
$$\delta C = -0.968$$

die mit dem Resultat des Ausdrucks des Art. 29 zu vergleichen sind.

41.

Bei der Berechnung der Reductionen dieser Winkel durch den angeführten Ausdruck habe ich, um Nichts zu vergeben, alle im Vorhergehenden erklärten, kleinen Reductionen berücksichtigt, obgleich sich voraus sehen liess, dass diese den Resultaten nichts Merkliches hinzufügen können, und man ohne an der Genauigkeit etwas zu vergeben,

in diesen Rechnungen das Dreieck als ein sphärisches hätte betrachten können. Durch die Ausdrücke des Art. 36 ergeben sich die reducirten Seiten

$$a' = 20^0\ 4'\ 45''$$
$$b' = 17\ 1\ 34$$
$$c' = 15\ 1\ 51$$

und die Quadrate der Seiten werden

$$a^2 = \quad 0.12233$$
$$b^2 = \quad 0.08803$$
$$c^2 = \quad 0.06854$$
$$b^2 + c^2 = \quad 0.15657$$
$$b^2 - c^2 = + 0.01949$$

Aus den Ausdrücken der Artt. 37 u. 38 erhielt ich hierauf

$$\mu = 5^0\ 2'\ 20'' \ , \ \mu' = 3^0\ 43'\ 51''$$
$$\mu'' = 10\ 2\ 58 \ , \ \mu''' = 8\ 22\ 47$$
$$\lambda = 12^0\ 36'\ 16''$$
$$\bar{\delta} = 48\ 47\ 40$$

sowie für δA

$$\bar{\gamma}_{,} = 49^0\ 24'\ 56'' \ , \ \bar{\beta}_{,} = 43^0\ 29'\ 56''$$

Bei der Berechnung dieser Grössen habe ich zum Theil Logarithmen von fünf Decimalen angewandt, während der Verlauf der Rechnungen zeigte, dass ich allenthalben mit Logarithmen von vier Decimalen ausgereicht hätte. Man bekommt hierauf die folgenden Werthe der einzelnen Glieder von δA:

$$- 1''267$$
$$- 0.170$$
$$+ 0.029$$
$$\delta A = - 1''408$$

Nachdem hierauf die zu den Dreieckspunkten A und B gehörigen, im vor. Art. angeführten Dreiecksstücke mit einander vertauscht worden waren, wodurch die folgende Zusammenstellung entstand,

$\bar{\alpha} = 58^\circ\ 23'\ 32''$, $\bar{\beta} = 45^\circ\ 0'\ 0''$, $\bar{\gamma} = 42^\circ\ 15'\ 37''$

$\alpha' = 147\ 57\ 28$

$\alpha'' = 204\ 31\ 41$

$a' = 17^\circ\ 1'\ 34''$	,	$a^2 =$	0.08803
$b' = 20\ 4\ 45$	,	$b^2 =$	0.12233
$c' = 15\ 1\ 51$	,	$c^2 =$	0.06854
		$b^2 + c^2 =$	0.19087
		$b^2 - c^2 =$	+ 0.05379

ergaben sich

$\mu = 5^\circ\ 1'\ 0''$, $\mu' = 6^\circ\ 46'\ 29''$

$\bar{\gamma}_{,} = 53\ 51\ 14$, $\bar{\beta}_{,} = 52\ 43\ 40$

und hiemit

$$\begin{aligned} &- 3''131 \\ &- 0.398 \\ &+ 0.025 \\ \delta B = &- 3''504 \end{aligned}$$

Endlich durch Vertauschung der zu A und C gehörigen Dreiecksstücke

$\bar{\alpha} = 42^\circ\ 15'\ 37''$, $\bar{\beta} = 58^\circ\ 23'\ 32''$, $\bar{\gamma} = 45^\circ\ 0'\ 0''$

$\alpha'' = 317\ 47\ 16$

$\alpha' = 270\ 9\ 36$

$a' = 15^\circ\ 1'\ 51''$	,	$a^2 =$	0.06854
$b' = 17\ 1\ 34$	,	$b^2 =$	0.08803
$c' = 20\ 4\ 45$	,	$c^2 =$	0.12233
		$b^2 + c^2 =$	0.21036
		$b^2 - c^2 =$	− 0.03430

$\mu = 5^\circ\ 41'\ 25''$, $\mu' = 6^\circ\ 45'\ 29''$

$\bar{\gamma}_{,} = 42\ 35\ 4$, $\bar{\beta}_{,} = 47\ 26\ 30$

und hiemit

$$\begin{aligned} &- 0''869 \\ &- 0.130 \\ &+ 0.028 \\ \delta C = &- 0''971 \end{aligned}$$

Die Vergleichung dieser Werthe von δA, δB, δC mit den strenge berechneten Werthen des vor. Art. giebt die geringen Unterschiede

$$+ 0''002 \; ; \; - 0''001 \; ; \; + 0''.003$$

die als verschwindend betrachtet werden können.

42.

Nehmen wir jetzt das Dreieck des Art. 142 der Abhandlung vor, dessen eine Ecke im Pole liegt, und dessen Stücke nach der genaueren Neuberechnung desselben die folgenden sind:

$\bar{\alpha} = 0^0\ 0'\ 0''$,	$\bar{\beta} = 20^0\ 0'\ 0''$,	$\bar{\gamma} = 18^0\ 49'\ 14''3820$
$\alpha' = \ldots$	$\alpha_{,} = 120\ 0\ 0$,	$\alpha_{,,} = 246\ 39\ 19.8836$
$\alpha'' = \ldots$	$\alpha_{,}'' = 180\ 0\ 0$,	$\alpha_{,,}' = 180\ 0\ 0$
$A = 56\ 3\ 37.3067$,	$B = 60\ 0\ 0$,	$C = 66\ 39\ 19.8836$
$a = 18\ 0\ 0$,	$b = 18\ 49\ 6.4224$,	$c = 19\ 59\ 50.4749$
$\lambda = 56\ 3\ 37.3067$,	$\lambda' = 0\ 0\ 0$,	$\lambda'' = 0\ 0\ 0$

Das sphärische Dreieck von denselben Seiten bekommt die folgenden Winkel:

$$\begin{aligned} A + \delta A &= 56^0\ 3'\ 58''229 \\ B + \delta B &= 60\ 0\ 19.586 \\ C + \delta C &= 66\ 39\ 39.559 \\ \Delta' &= 2^0\ 43'\ 57''374 \end{aligned}$$

und folglich werden

$$\begin{aligned} \delta A &= +20''922 \\ \delta B &= +19.586 \\ \delta C &= +19.675 \end{aligned}$$

43.

Man erhält hier, wenn man wieder alle kleinen Correctionen berücksichtigt, obgleich es im Grunde überflüssig ist,

$$\begin{aligned} a' &= 18^0\ 0'\ 19'' \\ b' &= 20\ 0\ 0 \\ c' &= 18\ 49\ 14 \end{aligned}$$

$$a^2 = 0.09870$$
$$b^2 = 0.12181$$
$$c^2 = 0.10787$$

ferner

$$\mu = 6^0\ 18'\ 55''\ ,\ \mu' = 6^0\ 43'\ 42''$$
$$\mu'' = 9\ \ 0\ 32\ ,\ \mu''' = 11\ 29\ \ 3$$
$$\lambda = 17^0\ 16'\ 40''$$
$$\bar{\delta} = 11\ 29\ \ 3$$
$$\bar{\gamma}_{,} = 6^0\ 18'\ 55''\ ,\ \bar{\beta}_{,} = 6^0\ 43'\ 42''$$

Es sind hier, wie man sieht, $\bar{\delta} = \mu'''$, $\bar{\gamma}_{,} = \mu$, $\bar{\beta}_{,} = \mu'$, welches in der Natur der Sache liegt. Aus diesen Werthen folgt für δA

$$+\ 18''726$$
$$+\ \ 2.242$$
$$-\ \ 0.061$$
$$\delta A = +\ 20''907$$

Nach der Vertauschung der zu A und B gehörigen Dreiecksstücke fanden sich

$$\mu = 6^0\ \ 2'\ \ 9''\ ,\ \mu' = 6^0\ 44'\ 11''$$
$$\bar{\gamma}_{,} = 17\ \ 44\ \ 12\ \ ,\ \bar{\beta}_{,} = 13\ \ 15\ \ 49$$

und für δB

$$+\ 17''543$$
$$+\ \ 2.078$$
$$-\ \ 0.049$$
$$\delta B = +\ 19''572$$

Nach der Vertauschung der zu A und C gehörigen Dreiecksstücke bekommt man

$$\mu = 6^0\ 19'\ 58''\ ,\ \mu' = 6^0\ \ 2'\ 49''$$
$$\bar{\gamma}_{,} = 12\ \ 29\ \ 16\ \ ,\ \bar{\beta}_{,} = 17\ \ 18\ \ 20$$

und für δC

$$+\ 17''645$$
$$+\ \ 2.068$$
$$-\ \ 0.050$$
$$\delta C = +\ 19''663$$

Die Vergleichung dieser mit den strengen Werthen des vor. Art. giebt die Unterschiede

$$+ 0''015 \quad ; \quad + 0''014 \quad ; \quad + 0''012$$

die grösser sind als die des vorigen Beispiels. Aber theils sind die Reductionen der Winkel weit grösser wie im vor. Beispiel, und auch ist die Fläche des Dreiecks grösser.

44.

Um zu untersuchen, wie sich diese Umstände bei anderen in der Nähe des Poles liegenden Dreiecken verhalten, habe ich noch ein Dreieck von nahe derselben Fläche, welches auch in der Nähe des Poles liegt, berechnet, und dazu das folgende, gleichseitige, welches symmetrisch um den Pol liegt, gewählt.

$$\begin{aligned}
\bar{\alpha} &= \bar{\beta} = \bar{\gamma} = 11^\circ\ 0'\ 0'' \\
\alpha'' &= \alpha_{,} = \alpha_{,}' = 149\ 32\ 27.2899 \\
\alpha' &= \alpha_{,}'' = \alpha_{,,} = 210\ 27\ 32.7101 \\
A &= B = C = 60\ 55\ 5.4202 \\
a &= b = c = 19\ 1\ 20.6790 \\
\lambda &= \lambda' = \lambda'' = 120\ 0\ 0
\end{aligned}$$

Die Winkel des sphärischen Dreiecks sind hier =

$$60^\circ\ 55'\ 27''526$$

und folglich

$$\delta A = \delta B = \delta C = + 22''106$$
$$\Delta' = 2^\circ\ 46'\ 22''579$$

Hieraus findet man

$$\mu = \mu' = 6^\circ\ 23'\ 34''$$
$$\bar{\gamma}_{,} = \bar{\beta}_{,} = 6\ 21\ 54$$

und es ist selbstverständlich $\bar{\delta} = 0$. Hiemit erhält man

$$\begin{aligned}
&+ 19''808 \\
&+ 2.352 \\
&- 0.070 \\
\delta A = \delta B = \delta C = &+ 22''090
\end{aligned}$$

und den Unterschied mit dem strengen Werthe

$$+ 0''016$$

sehr nahe wie im vorigen Beispiel.

45.

Um hierin weiter zu gehen habe ich noch ein, ähnlich wie das vorige liegendes, aber kleineres Dreieck berechnet. Nemlich

$$\begin{aligned}
\bar{\alpha} = \bar{\beta} = \bar{\gamma} &= 9^0\ 15'\ 0'' \\
\alpha'' = \alpha_{,} = \alpha_{,}' &= 149\ 40\ 35.0040 \\
\alpha' = \alpha_{,}'' = \alpha_{,} &= 210\ 19\ 24.9960 \\
A = B = C &= 60\ 38\ 49.9920 \\
a = b = c &= 16\ 0\ 12.9450 \\
\lambda = \lambda' = \lambda'' &= 120\ 0\ 0
\end{aligned}$$

Die Winkel des sphärischen Dreiecks sind hier =

$$60^0\ 39'\ 5''596$$

folglich

$$\delta A = \delta B = \delta C = + 15''604$$
$$\Delta' = 1^0\ 57'\ 16''788$$

Man findet hier

$$\mu = \mu' = 5^0\ 21'\ 56''$$
$$\bar{\gamma}_{,} = \bar{\beta}_{,} = 5\ 20\ 54$$

und es ist wieder $\bar{\delta} = 0$. Hiemit ergiebt sich

$$\begin{aligned}
&+ 14''014 \\
&+ 1.635 \\
&- 0.051 \\
\delta A = \delta B = \delta C = &+ 15''598
\end{aligned}$$

und der Unterschied mit dem strengen Werthe wird

$$+ 0''006$$

bedeutend kleiner wie im vorigen Beispiel.

46.

Es soll jetzt das am Aequator liegende Dreieck des Art. 143 der Abhandlung vorgenommen, und auf dieselbe Weise behandelt werden. Die Stücke desselben sind nach der Neurechnung die folgenden:

$$\begin{aligned}
\alpha &= 74^0\ 45'\ 29''9682\ , & \bar{\beta}_{,} &= 90^0\ 0'\ 0''\ , & \bar{\gamma}_{,} &= 90^0\ 0'\ 0'' \\
\alpha' &= 33\ 18\ 53.2156\ , & \alpha_{,} &= 90\ 0\ 0\ , & \alpha_{,,} &= 270\ 0\ 0 \\
\alpha'' &= 326\ 41\ 6.7844\ , & \alpha_{,}'' &= 148\ 0\ 0\ , & \alpha_{,,}' &= 212\ 0\ 0 \\
A &= 66\ 37\ 46.4310\ , & B &= 58\ 0\ 0\ , & C &= 58\ 0\ 0 \\
a &= 19\ 32\ 31.4148\ , & b &= 18\ 0\ 0\ , & c &= 18\ 0\ 0 \\
\lambda &= 19\ 32\ 31.4148\ , & \lambda' &= \tfrac{1}{2}\lambda\ , & \lambda'' &= \tfrac{1}{2}\lambda
\end{aligned}$$

Die Winkel des sphärischen Dreiecks sind:

$$\begin{aligned}
A + \delta A &= 66^0\ 37'\ 26''016 \\
B + \delta B &= 57\ 59\ 38.949 \\
C + \delta C &= 57\ 59\ 38.949 \\
\Delta' &= 2^0\ 36'\ 43''914
\end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned}
\delta A &= -20''415 \\
\delta B = \delta C &= -21.051
\end{aligned}$$

Es werden jetzt, wenn wieder alle Correctionen berücksichtigt werden,

$$\begin{aligned}
a' &= 19^0\ 36'\ 26''\ , & a^2 &= 0.11633 \\
b' &= 18\ 3\ 33\ , & b^2 &= 0.09869 \\
c' &= 18\ 3\ 33\ , & c^2 &= 0.09869 \\
\mu = \mu' &= 6^0\ 4'\ 6'' \\
\mu'' &= 9\ 48\ 13\ , & \mu''' &= 10^0\ 7'\ 52'' \\
\lambda &= 15^0\ 16'\ 30'' \\
\bar{\delta} &= 84\ 53\ 22 \\
\bar{\gamma}_{,} = \bar{\beta}_{,} &= 79\ 51\ 20
\end{aligned}$$

und hiemit für δA

$$\begin{aligned}
&-18''157 \\
&-2.187 \\
&-0.062 \\
\delta A = &-20''406
\end{aligned}$$

Nach der Vertauschung der Dreiecksstücke bekam ich

$$\mu = 6^0\ 3'\ 15''$$
$$\bar{\gamma}_{,} = 84\ 52\ 20$$

und dass hier $\beta_{,} = 90^0\ 0'\ 0''$ werden muss, versteht sich von selbst. Ferner wird erhalten

$$\begin{array}{r} -18''667 \\ -\ 2.305 \\ -\ 0\ 068 \\ \hline \delta B = \delta C = -21''040 \end{array}$$

Die Unterschiede mit den strengen Werthen sind hier

$$-0''009\ ;\ -0''011$$

also kleiner wie bei den obigen, nahe eben so grossen Dreiecken, die in der Nähe des Poles liegen.

47.

Um auch in Erfahrung zu bringen, wie sich die Unterschiede bei anderen Aequatorealdreiecken verhalten, habe ich das folgende, entgegen gesetzt liegende, und etwas kleinere Dreieck berechnet:

$\bar{\alpha} = 90^0\ 0'\ 0''$	$\bar{\beta} = 80^0\ 39'\ 34''9648$	$\bar{\gamma} = 99^0\ 20'\ 25''0352$
$\alpha' = 38\ 55\ 0$	$\alpha_{,}'' = 0\ 0\ 0$	$\alpha_{,,}' = 180\ 0\ 0$
$\alpha'' = 141\ 5\ 0$	$\alpha_{,} = 320\ 27\ 32.4713$	$\alpha_{,,} = 219\ 32\ 27.5287$
$A = 102\ 10\ 0$	$B = 39\ 32\ 27.5287$	$C = 39\ 32\ 27.5287$
$a = 18\ 37\ 7.2527$	$b = 12\ 0\ 0$	$c = 12\ 0\ 0$
$\lambda = 0\ 0\ 0$	$\lambda' = 7\ 36\ 21.3455$	$\lambda'' = 7\ 36\ 21.3455$

Die Winkel des sphärischen Dreiecks sind hier

$$\begin{array}{rl} A + \delta A = & 102^0\ 9'\ 50''012 \\ B + \delta B = & 39\ 32\ 17.534 \\ C + \delta C = & 39\ 32\ 17.534 \\ \hline \Delta' = & 1^0\ 14'\ 25''080 \end{array}$$

folglich

$$\delta A = -9''988$$
$$\delta B = \delta C = -9.995$$

Man bekommt ferner hier für δA

$$\mu = \mu' = 4^0\ 2'\ 14''$$
$$\bar{\gamma}_{,} = 86\ 51\ 40\ ,\quad \bar{\beta}_{,} = 93^0\ 8'\ 20''$$

und selbstverständlich $\bar{\delta} = 90^0\ 0'\ 0''$. Ferner für δA

$$\begin{array}{r} -8''945 \\ -1.010 \\ -0.032 \\ \hline \delta A = -9''987 \end{array}$$

Nach der Vertauschung der Dreiecksstücke ergeben sich

$$\mu = 4^0\ 1'\ 35''\ ,\quad \mu' = 6^0\ 15'\ 31''$$
$$\bar{\gamma}_{,} = 83\ 46\ 30\ ,\quad \bar{\beta}_{,} = 86\ 55\ 10$$

und hiemit

$$\begin{array}{r} -8''905 \\ -1.055 \\ -0.033 \\ \hline \delta B = \delta C = -9''993 \end{array}$$

Die Unterschiede mit den strengen Werthen sind hier

$$-0''001\ ,\quad -0''002$$

also als verschwindend zu betrachten.

48.

Endlich will ich noch das Dreieck des Art. 144 der Abhandlung vornehmen, welches wie das erste nahe mitten zwischen dem Pole und dem Aequator liegt, aber etwas kleiner ist. Durch die Neurechnung habe ich die folgenden Stücke dieses Dreiecks erhalten:

$$\begin{array}{llll}
\bar{\alpha} = 40^\circ\ 0'\ 0'' & \bar{\beta} = 51^\circ\ 23'\ 57''3623 & \bar{\gamma} = 35^\circ\ 17'\ 49''8062 \\
\alpha'' = 40\ 0\ 0 & \alpha_{,}'' = 211\ 55\ 0.5499 & \alpha_{,,}' = 285\ 32\ 55.9681 \\
\alpha' = 120\ 0\ 0 & \alpha_{,} = 166\ 28\ 23.1396 & \alpha_{,,} = 341\ 33\ 25.8002 \\
A = 80\ 0\ 0 & B = 45\ 26\ 37.4103 & C = 56\ 0\ 29.8321 \\
a = 16\ 41\ 57.2605 & b = 12\ 0\ 0 & c = 14\ 0\ 0 \\
\lambda = 6\ 40\ 47.1966 & \lambda' = 18\ 9\ 25.7095 & \lambda'' = 11\ 28\ 38.5129
\end{array}$$

ferner

$$\begin{array}{rl}
A + \delta A = & 80^\circ\ 0'\ 1''454 \\
B + \delta B = & 45\ 26\ 37.685 \\
C + \delta C = & 56\ 0\ 31.753 \\
\hline
\Delta' = & 1^\circ\ 27'\ 10''892
\end{array}$$

folglich

$$\begin{aligned}
\delta A &= +\ 1''454 \\
\delta B &= +\ 0.275 \\
\delta C &= +\ 1.921
\end{aligned}$$

Es werden hier zuerst

$$\begin{array}{llll}
\mu = 4^\circ\ 42'\ 26'' & \mu' = 4^\circ\ 1'\ 11'' \\
\bar{\gamma}_{,} = 43\ 41\ 44 & \bar{\beta}_{,} = 38\ 7\ 26 \\
\mu'' = 8\ 21\ 22 & \mu''' = 6\ 41\ 56
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\lambda &= 10^\circ\ 4'\ 2'' \\
\bar{\delta} &= 42\ 0\ 16
\end{aligned}$$

und damit für δA

$$\begin{array}{rl}
 & +\ 1''293 \\
 & +\ 0.141 \\
 & +\ 0.018 \\
\hline
\delta A = & +\ 1''452
\end{array}$$

Nach der Vertauschung von A und B ergiebt sich

$$\begin{array}{llll}
\mu = 4^\circ\ 40'\ 53'' & \mu' = 5^\circ\ 36'\ 45'' \\
\bar{\gamma}_{,} = 47\ 48\ 20 & \bar{\beta}_{,} = 45\ 57\ 24
\end{array}$$

und hiemit für δB

$$\begin{array}{rl}
 & +\ 0''234 \\
 & +\ 0.020 \\
 & +\ 0.019 \\
\hline
\delta B = & +\ 0''273
\end{array}$$

Nach der Vertauschung von A und C erhält man

$$\mu = 5^0\ 34'\ 37'' \ , \quad \mu' = 4^0\ 2'\ 25''$$
$$\overline{\gamma}_{,} = 40\ 37\ 16 \ , \quad \overline{\beta}_{,} = 36\ 33\ 42$$

und hiemit für δC

$$\begin{array}{r} +\ 1''710 \\ +\ 0.195 \\ +\ 0.017 \\ \hline \delta C = +\ 1''922 \end{array}$$

Die Unterschiede mit den strengen Werthen werden hier

$$+\ 0''002\ ;\ +\ 0''002\ ;\ -\ 0''001$$

die wieder als verschwindend betrachtet werden können.

49.

Ich meine durch das Vorhergehende das Verhalten des hier entwickelten Ausdrucks zur Reduction der Winkel des sphäroidischen Dreiecks auf dem Revolutionsellipsoid auf die des sphärischen Dreiecks, und die Genauigkeit, die sie in den verschiedensten Fällen gewährt, zur Gnüge dargelegt zu haben. In Bezug auf die Transformation eines meiner früheren Ausdrücke, die Weingarten veröffentlicht hat, ist eine solche Darlegung unterlassen worden, und ich will mir daher erlauben sie hier nachzuholen, zumal irrige Ansichten darüber verbreitet worden sind.

Rechnet man dieselben vorhergehenden Reductionen so wie Weingarten es in dem, in der Einleitung erwähnten, Aufsatze in bestimmten Worten für geboten erachtet, so erhält man für das Dreieck des Art. 40

$$\delta A = -\ 1''413\ , \quad \delta B = -\ 3''503\ , \quad \delta C = -\ 0''978$$

deren Unterschiede von den strenge berechneten Werthen

$$+\ 0''007\ ;\ +\ 0''002\ ;\ +\ 0''010$$

sind, während diese im Art. 41 durch den hier entwickelten Ausdruck nur

$$+\ 0''002\ ;\ -\ 0''001\ ;\ +\ 0''003$$

betrugen.

Für das Dreieck des Art. 42 erhielt ich nach Weingarten

$$\delta A = +\ 20''851\ ;\ \delta B = +\ 19''518\ ;\ \delta C = +\ 19''609$$

mit den Unterschieden von den strengen Werthen

$$+ 0''071 \; ; \; + 0''068 \; ; \; + 0''066$$

während diese zufolge des Art. 43 in Bezug auf den hier entwickelten Ausdruck nur

$$+ 0''015 \; ; \; + 0''014 \; ; \; + 0''012$$

betrugen.

Für das Dreieck des Art. 44 erhielt ich nach Weingarten

$$\delta A = \delta B = \delta C = + 22''028$$

mit dem Unterschiede

$$+ 0''078$$

während der Unterschied, den mein Ausdruck giebt nur

$$+ 0''016$$

beträgt.

Für das Dreieck des Art. 45 ergab sich nach Weingarten

$$\delta A = \delta B = \delta C = + 15''566$$

mit dem Unterschiede

$$+ 0''038$$

während dort nach meinem Ausdruck dieser nur

$$+ 0''006$$

gefunden wurde

Für das Dreieck des Art. 46 erhielt ich nach Weingarten

$$\delta A = - 20''346 \; ; \; \delta B = \delta C = - 20''984$$

mit den Unterschieden

$$- 0''069 \; ; \; - 0''067$$

während diese a. a. O. nur

$$- 0''009 \; ; \; - 0''011$$

betrugen.

Für das Dreieck des Art. 47 ergab sich nach Weingarten

$$\delta A = - 9''961 \; ; \; \delta B = \delta C = - 9''963$$

mit den Unterschieden

$$- 0''027 \; ; \; - 0''032$$

während diese a. a. Orte nur

$$-0''001 \; ; \; -0''002$$

betrugen.

Für das Dreieck endlich des Art. 48 ergab sich nach Weingarten

$$\delta A = +1''446 \; ; \; \delta B = +0''269 \; ; \; \delta C = +1''914$$

mit den Unterschieden

$$+0''008 \; ; \; +0''006 \; ; \; +0''007$$

während diese a. a. Orte nur

$$+0''002 \; ; \; +0''002 \; ; \; -0''001$$

betrugen.

Diese Resultate sprechen von selbst, und es wäre überflüssig ihnen ein Wort hinzuzufügen. Nur in Bezug auf kleine Dreiecke will ich anmerken, dass die Unterschiede zwischen den Resultaten der strengen Rechnung und denen der Reductionsausdrücke kleiner, und mehr und mehr verschwindend werden, aber in diesen Fällen geben die Ausdrücke der oft angezogenen Abhandlung immer noch ein etwas genaueres Resultat als die Transformation derselben, welche der oft angeführte Verf. angewandt wissen will, und ihre Berechnung ist eben so einfach.

Anhang,

die Auflösung der zweiten Hauptaufgabe der oft angezogenen Abhandlung betreffend.

50.

Ich will in Bezug auf die genannte Aufgabe hier erstens die Bemerkung machen, dass man, wenn man will, statt der Gleichungen des Art. 57 der Abhandlung für die Berechnung von α', α'', χ auch die folgenden anwenden kann:

$$\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}\chi \sin\tfrac{1}{2}(\alpha'+\alpha'') &= \sin\tfrac{1}{2}(\omega)\cos\tfrac{1}{2}(\beta''+\beta') \\
\sin\tfrac{1}{2}\chi \cos\tfrac{1}{2}(\alpha'+\alpha'') &= \cos\tfrac{1}{2}(\omega)\sin\tfrac{1}{2}(\beta''-\beta') \\
\cos\tfrac{1}{2}\chi \sin\tfrac{1}{2}(\alpha'-\alpha'') &= \sin\tfrac{1}{2}(\omega)\sin\tfrac{1}{2}(\beta''+\beta') \\
\cos\tfrac{1}{2}\chi \cos\tfrac{1}{2}(\alpha'-\alpha'') &= \cos\tfrac{1}{2}(\omega)\cos\tfrac{1}{2}(\beta''-\beta')
\end{aligned}$$

Eine zweite Bemerkung besteht in Folgendem. Wenn man sogleich in der ersten Annäherung ein möglichst genaues Resultat erhalten will, so sind die in der Abhandlung entwickelten Vorbereitungsrechnungen die genauesten, und zugleich die einfachsten, da man sich bei deren Ausführung Logarithmen von einer kleinen Anzahl von Decimalen bedienen darf. Will man dagegen in der ersten Annäherung etwas von der Genauigkeit vergeben, die man auf die eben bezeichnete Art erhält, so kann man die Vorbereitungsrechnungen abkürzen, und wenn die Dreiecke nicht grösser, oder nicht viel grösser sind, wie die, welche im Vorhergehenden betrachtet wurden, schon dadurch hinreichend genaue Werthe von (α') und (χ) erhalten, dass man sie aus den gegebenen Stücken der Aufgabe ohne Weiteres durch die Formeln der sphärischen Trigonometrie berechnet Die in der Abhandlung gegebenen Differentialausdrücke reichen alsdann noch völlig aus um die in der ersten Annäherung übrig gebliebenen Fehler vollständig zu berichtigen. Auf diese Art habe ich in den im Vorhergehenden benutzten Dreiecken die betreffenden Stücke berechnet.

Es muss drittens einer Nachahmung meiner Auflösung der hier in Rede stehenden Aufgabe erwähnt werden, die in den Astr. Nachr. Nr. 1699 — 1700 abgedruckt worden ist, und in welcher der Verf. derselben nicht nöthig gefunden hat, meiner Arbeit, welche er offenbar benutzt hat, zu erwähnen. Diese Nachahmung leidet an grosser Weitläuftigkeit, und besitzt überdies mehrere Mängel, man kann in vielen Fällen nur höchst ungenaue Resultate damit erhalten wie ich schon an einem andern Orte nachgewiesen habe; sie ist daher zur Anwendung nicht geeignet.

ELEKTRISCHE UNTERSUCHUNGEN

VON

W. G. HANKEL.

ACHTE ABHANDLUNG.

ÜBER DIE THERMOELEKTRISCHEN EIGENSCHAFTEN DES TOPASES.

Die von mir in den letzten Jahren über die thermoelektrischen Erregungen der Krystalle ausgeführten Untersuchungen liefern den Beweis, dass wir es in diesen Erscheinungen mit einem viel allgemeineren Phänomene zu thun haben, als seither angenommen wurde; es treten nämlich die thermoelektrischen Erregungen nicht blos bei der geringen Zahl von Krystallen, welche dem sogenannten Hemimorphismus unterworfen sind (wenn gleich dieser einen ganz besonderen Einfluss darauf ausübt), sondern auch bei zahlreichen Krystallen auf, zu deren wesentlichen Eigenschaften eine hemimorphische Bildung nicht gehört.

Für die hier folgende Abhandlung wähle ich die Beobachtungen am Topase aus, weil die elektrischen Verhältnisse bei diesem Minerale durch den Umstand, dass seine Krystalle stets eine Säulenform besitzen, sich im Ganzen einfach gestalten, und weil bei ihm auch allseitig ziemlich vollkommen ausgebildete einfache Individuen vorkommen.

I. Historisches.

Als Canton im Jahre 1760 mehrere von einem Juwelier Nicolaus Crisp entliehene Edelsteine auf ihr thermoelektrisches Verhalten prüfte, gelang es ihm, eine Erregung von Elektricität durch Temperaturveränderung am brasilianischen Topase zu beobachten. *)

Den Versuch einer genaueren Erforschung der elektrischen Vertheilung am Topase unternahm jedoch erst Hauy; und zwar bediente er sich zu seinen Untersuchungen isolirter, mittelst eines Hütchens auf

*) Priestley, Geschichte und gegenwärtiger Zustand der Elektricität; deutsche Uebersetzung von Krünitz S. 205.

einer Spitze schwebender und in horizontaler Ebene leicht beweglicher Nadeln, die er entweder in ihrem gewöhnlichen Zustande liess oder mit schwacher positiver oder negativer Elektricität lud. Indess ist Hauy's Ausspruch über die Lage der elektrischen Pole noch sehr unsicher. In der ersten Auflage seines *Traité de minéralogie* von 1801 Bd. II. S. 504 bezeichnet er unter den physikalischen Eigenschaften für die brasilianischen und sibirischen Topase die elektrische Vertheilung durch die Worte: „vitrée d'un côté et résineuse de l'autre." An den sächsischen Topasen war es ihm damals noch nicht gelungen, elektrische Erregungen durch Temperaturveränderungen wahrzunehmen.*) In der zweiten Auflage seines *Traité* von 1822 wird seine Angabe noch unbestimmter. Bd. II. S. 132 sagt er blos: „Electrique par la chaleur en deux points opposés. Quelques cristaux seulement ont besoin d'être isolés pour manifester cette propriété."**) Unter diesen letzteren Krystallen versteht Hauy, wie man aus S. 154 desselben Bandes seines *Traité* ersieht, die sächsischen Topase, bei denen es ihm endlich auch gelungen war, elektrische Erscheinungen, wenn auch oft in sehr schwachem Grade, wahrzunehmen. Nur über einen ihm von Langsdorf geschenkten brasilianischen Topas findet sich S. 154 die bestimmte Angabe: „J'ai remarqué que ses deux extrémités étaient l'une et l'autre à l'état résineux, tandis que la partie intermediaire donnait des signes d'électricité vitrée."***)

---

*) Er sagt Bd. II. S. 514 bei einer vergleichenden Zusammenstellung der brasilianischen, sibirischen und sächsischen Topase, nachdem er die Uebereinstimmung in den Winkeln hervorgehoben hat: «Le même accord règne entre tous les autres caractères. Il en faut excepter celui de l'électricité par la chaleur, qui manque à la topaze de Saxe. Mais cette propriété, déjà très-faible dans certaines topazes du Brésil, pourrait bien n'être ici qu'une modification accidentelle qui ne tînt pas au fond de la substance.

**) Die Aufstellung dieser Bedingung beruht auf ungenauer Beobachtung.

***) Hauy fährt dann fort: Ce fait a beaucoup de rapport avec celui, que présentent certains aimans qui renferment une succession de pôles contraires, auxquels on a donné le nom de points conséquens. Je développerai l'explication de ce phénomène lorsque je traiterai de la vertu magnétique. Je dirai seulement ici que je ne sache pas que l'on ait encore remarqué de ces sortes des points dans les corps électriques; et c'est un trait de ressemblance de plus entre les phénomènes produits par le magnetisme et ceux que présentent les corps qui s'électrisent par la chaleur et dans lesquels la loi des densités électriques a une si parfaite analogie avec celle, que suivent les densités magnetiques dans un barreau aimanté.

In der ersten Ausgabe des *Traité* sind auf Taf. 44 Fig. 37 — 42 alle Topaskrystalle an beiden Enden der Hauptaxe mit denselben Flächen als vollständige Krystalle abgebildet worden, obwohl sämmtliche damals vorliegende Exemplare nur an einem Ende ausgebildet waren; indess spricht Hauy in einer Anmerkung Bd. II. S. 507 die Vermuthung aus, wie die thermoelektrische Erregung es wahrscheinlich mache, dass, wenn später vollständig ausgebildete Krystalle gefunden werden sollten, ihre beiden Enden ebenso wie beim Turmalin eine verschiedene Ausbildung zeigen würden.*) Und in der That war es ihm seines Dafürhaltens nach bis zum Erscheinen der zweiten Ausgabe seines *Traité* auch gelungen, vollständig ausgebildete brasilianische Krystalle zu erhalten, die seiner Voraussicht entsprechend an beiden Enden der Hauptaxe eine verschiedene Ausbildung zeigten.**)

Auch beim Pyknit, den Hauy***) infolge der Uebereinstimmung der Winkel an einem von Altenberg in Sachsen stammenden Krystalle dieses Minerales mit den Winkeln am Topase zu der Gattung des Topases stellte, gelang es ihm seiner Angabe nach****) die thermoelektrische Erregung, die er früher vergeblich gesucht hatte, zu beobachten, als er Krystalle nahm, welche eine mehr glasartige Structur als die gewöhnlichen Pyknite darboten. Dagegen lieferten seine Prüfungen des Pyrophysalits stets nur negative Resultate.*****)

P. Erman konnte zu seinen in den *Abhandlungen der Berliner Akademie* vom Jahre 1829 S. 57 — 60 (*physik. Abhandlung*) mitgetheilten Untersuchungen über die thermoelektrischen Eigenschaften des

---

*) On pourra trouver dans la suite des topazes complètes, et il sera curieux d'examiner si la propriété de s'électriser par la chaleur y est jointe comme dans la tourmaline et la magnésie boratée, à des différences entre les formes des deux parties dans lesquelles résident les centres d'actions des électricités contraires, et si les crystaux dépourvus de cette même propriété conservent l'analogie des formes ordinaires.

**) Drei solche Krystalle sind Bd. II. Taf. 49 Fig. 132—134 abgebildet (s. den Abschnitt II. dieser Abhandlung über die Krystallisationsverhältnisse des Topases); dagegen finden sich die in der ersten Ausgabe als vollständig gezeichneten Krystalle in der zweiten nur an dem einen Ende ausgebildet dargestellt.

***) Sur la réunion de la pycnite avec la topaze, par Hauy (Journal des Mines XXIII. 39.

****) Mir ist nicht möglich gewesen, an den mir vorliegenden stänglichten Massen von Pyknit elektrische Erregungen wahrzunehmen.

*****) Traité de minéral. (2. Ausg.) Bd. II. S. 153.

Topases in dem Bohnenberger'schen Elektrometer bereits ein empfindlicheres Prüfungsmittel als Hauy in den auf Spitzen beweglichen elektrisirten Nadeln anwenden; dessenungeachtet boten ihm diese Untersuchungen mannichfache Schwierigkeiten dar, und namentlich wollte es nicht gelingen, ein Zerfallen der Hauptaxe des Topases in zwei entgegengesetzt polarische Hälften aufzufinden. Beide Enden gaben ihm in früheren Versuchen beim Erkalten entweder gar keine oder eine identische Elektricität, oft von gleicher Stärke und fast immer negativer Art, so dass er beinahe der Vermuthung Raum gegeben hätte, man habe es bei diesen Erscheinungen nicht mit einem thermisch bedingten, elektrisch polaren Gegensatze, sondern vielleicht blos mit einer zufällig durch Berührung oder Reibung erzeugten homogenen Erregung des ganzen Krystalles zu thun. Erst nachdem Erman in Besitz mehrerer „ziemlich guter Krystalle aus Brasilien" gekommen war, glaubte er sich zur Aufstellung des Satzes berechtigt, dass der brasilianische Topas allerdings durch Temperaturänderung, unabhängig von jeder Reibung oder Berührung des Heterogenen, polarisch erregt werde, dass aber die Art der Vertheilung eine ganz eigenthümliche, von den bisher bekannten Analogien total abweichende sei, indem die eine Thätigkeit, namentlich die $-E$, in der Axe und den Parallelen mit ihr herrsche, während die andere $(+E)$ ihre Richtung senkrecht auf die Axe habe und ihr Sitz überall an der perimetrischen Oberfläche aller Seitenflächen sei. *)

Erman verfuhr bei seinen Untersuchungen auf die Weise, dass er auf den das Goldblättchen tragenden Stift eines Bohnenberger'schen Elektrometers einen möglichst kleinen Metallteller schraubte, und auf diesen den erwärmten Topas stellte. Lag der Krystall mit einer seiner Seitenflächen auf dem Teller, so erhielt Erman eine positive Reaction, sobald er eines der zwei Enden des Krystalles ableitend berührte; aber keine Reaction bei Berührung irgend einer der prismatischen Seiten-

*) Es ist auffallend, dass P. Erman der von Hauy bei dem einen Topaskrystalle beobachteten und sehr bestimmt hervorgehobenen Vertheilung (s. oben S. 360), welche mit seiner Angabe vollkommen übereinstimmt, nicht gedenkt. Aus dem Umstande, dass Erman seine Krystalle auf beide Enden stellen konnte, geht übrigens, da er brasilianische Topase benutzte, klar hervor, dass er keine vollständigen Individuen, sondern nur von Durchgängen begrenzte Bruchstücke, oder solche, die höchstens an dem einen Ende eine unvollständig ausgebildete Endfläche (s. darüber später) besassen, untersucht hat.

flächen. Stellte er den Topas aufrecht auf das Elektrometer, so erhielt er keinen Ausschlag durch die Ableitung des nach oben stehenden anderen Endes, wohl aber einen negativen bei jeder ableitenden Berührung der Seitenflächen, gleich viel welcher.*) Erman fährt dann fort: „Zwar ist es einige Male auch vorgekommen, dass einige Seitenflächen eine etwas stärkere Intensität bedingten, als die anderen; aber dies schien mir bei genauerer Prüfung seinen Grund zu haben in einer zufällig grösseren Breite dieser Flächen und der entsprechenden grösseren Menge der ableitenden Berührungspunkte; auch könnte immerhin eine etwas grössere Leitungsfähigkeit an einer Stelle des Krystalles zufällig vorwalten.“ Erman setzt nämlich voraus, dass die Entladung einer Stelle die früher durch sie gebundene entgegengesetzte Elektricität frei mache, ihr erlaube nach aussen zu wirken und sich dem Elektrometer mitzutheilen.**)

Während Erman den brasilianischen Topas durch Temperaturveränderung sehr stark elektrisch erregbar fand, beobachtete er bei sibirischen Krystallen kaum Spuren von Elektricität, die bei den sächsischen sogar ganz ausblieben.***)

Bei den von mir vor 1840 mit dem Topase angestellten, und in meiner Habilitationsschrift****) mitgetheilten Untersuchungen stand mir nur eine geringe Anzahl von Krystallen zu Gebote.

Mehrere sächsische nur an dem einen Ende ausgebildete, am anderen aber von der Durchgangsfläche begrenzte Topaskrystalle vom

*) Die obigen Angaben Erman's sind nicht genau.

**) Das oben beschriebene, von Erman angewandte Verfahren ist nicht geeignet, die Vertheilung der Elektricität auf den einzelnen Flächen, Kanten und Ecken eines Krystalles nachzuweisen. Der bei Annäherung eines Leiters an den Krystall im Elektrometer entstehende Ausschlag ist nicht blos von der elektrischen Spannung desjenigen Punktes, welchem der Leiter bis zur Berührung genähert wird, sondern auch von der in dessen Umgebung herrschenden elektrischen Spannung abhängig; besitzt z. B. die berührte Stelle mässig starke negative Elektricität, während auf den umliegenden Flächen eine sehr intensive positive Spannung auftritt, so wird bei Annäherung des Leiters bis zur Berührung der negativen Stelle doch kein positiver, sondern vielmehr infolge der überwiegenden Vertheilungswirkung der Umgebung ein negativer Ausschlag im Elektrometer entstehen.

***) Es ist nicht wohl erklärlich, wie Erman bei den sächsischen Topasen die elektrische Erregung nicht wahrzunehmen vermocht hat, da es doch Hauy bei viel unvollkommenern Apparaten gelungen war.

****) Quaestionis de thermoelectricitate crystallorum pars altera. Halae 1840 S. 13 bis 19. Im Auszuge auch in Pogg. Annal. Bd. 50 S. 242—244.

Schneckenstein bei Gottesberg zeigten während des Erkaltens an ersterem Ende +, am zweiten Ende — + *E.**)

Ebenso verhielt sich ein gleichfalls vom Schneckenstein stammender zwar an beiden Enden, jedoch nicht in gleich vollkommener Weise ausgebildeter Krystall; derselbe trug nämlich am oberen Ende deutlich die Flächen von Pyramiden und horizontalen Prismen, während sich am unteren Ende eine matte, in Glanz und Glätte von einem Durchgange sehr abweichende Endfläche vorfand, an deren Rändern bei genauerer Betrachtung sehr kleine gegen die Axe geneigte Flächen wahrgenommen werden konnten.

Dagegen zeigten drei andere (ein sächsischer und zwei sibirische) ringsum ausgebildete, und zwar an beiden Enden der Hauptaxe deutliche und gegen diese Axe geneigte Flächen tragende Topaskrystalle beim Erkalten an beiden Enden der Hauptaxe positive, auf den Mitten der Seitenflächen (in mediis partibus) aber negative Elektricität. Da sämmtliche drei Krystalle, etwas näher an dem einen Ende, einen Sprung enthielten, und die beiden Theile, in welche jeder Krystall durch diesen Sprung geschieden wurde, verschieden gefärbt erschienen, so glaubte ich damals mit Rücksicht auf frühere an dem Zucker, der Weinsäure und dem weinsauren Natron-Kali (Seignette-Salz) gemachte Beobachtungen**) diese drei Topase nicht als einfache Krystalle, sondern als Zwillinge, die mit dem sonst gewöhnlich dem Gestein aufsitzenden Ende in der als Sprung erscheinenden Ebene verwachsen seien, auffassen zu müssen.

Durch spätere, über das elektrische Verhalten des Titanits, Bergkrystalls und Boracits angestellte Untersuchungen ward ich veranlasst, die Prüfung des Topases im Laufe der Jahre 1840 — 1841 nochmals vorzunehmen.***) Diese Untersuchungen bestätigten nun für die sibirischen****) und sächsischen nur an einem Ende ausgebildeten, am anderen

---

*) Der Kürze wegen werde ich im Folgenden stets nur die beim Erkalten auftretende elektrische Vertheilung angeben, weil die bei steigender Temperatur erscheinende gerade die entgegengesetzte ist. Wo also in dem Nachstehenden die elektrische Polarität ohne weiteren Zusatz (ob während des Erwärmens oder Erkaltens) genannt wird, ist stets die beim Erkalten auftretende zu verstehen.

**) De thermoelectricitate crystallorum, Halae 1839. S. 19.

***) Poggend. Annal. Bd. 56. S. 37 — 58.

****) Die beiden untersuchten sibirischen Krystalle stammten, wie ihr Aeusseres zeigte, vom Adun-Tschilon bei Nertschinsk.

aber von einem Durchgange begrenzten Topasbruchstücke einen nach der Richtung der Hauptaxe vorhandenen elektrischen Gegensatz oder wenn man will, eine mit der genannten Richtung parallele elektrische polare Axe. Ausserdem ergaben sich aber noch elektrische Vertheilungen auf den seitlichen Begrenzungen in der Weise, dass beim Erkalten in der Umgebung der beiden an den Endpunkten der Makrodiagonale befindlichen Seitenkanten negative, dagegen in der Umgebung der beiden anderen an den Endpunkten der Brachydiagonale gelegenen Seitenkanten positive Elektricität auftrat. Bezeichnen wir die Verbindungslinien zweier einander diametral gegenüberliegenden elektrischen Zonen (Pole) allgemein als elektrische Axe, so würden die genannten Topasbruchstücke ausser der zuvor erwähnten der Hauptaxe parallelen polaren Axe noch zwei andere in ihrer Richtung mit den Nebenaxen zusammenfallende nicht polare Axen besitzen, dergestalt, dass von diesen nicht polaren Axen die an beiden Enden negative mit der Makrodiagonale und die an beiden Enden positive Axe mit der Brachydiagonale zusammenfiele. Uebrigens schienen die Punkte der stärksten Erregung nicht immer gerade auf den Kanten selbst zu liegen.

Bei den sibirischen und sächsischen Topasen zeigt unter diesen drei Axen die polare mit der Hauptaxe parallele Axe bei weitem die grösste Stärke; wie namentlich daraus geschlossen wurde, dass die Krystalle, wenn sie mit der unteren von dem Durchgange gebildeten Fläche auf einer zur Erde abgeleiteten Metallplatte standen, sich fast überall positiv, wenn sie aber auf dem oberen Ende oder den daselbst befindlichen grossen Flächen des brachydiagonalen horizontalen Prismas lagen, sich fast überall negativ elektrisch zeigten.

Bei den brasilianischen Krystallbruchstücken, welche an dem einen Ende von Pyramidenflächen, an dem anderen aber von einer Durchgangsfläche begrenzt waren, trat dagegen die Polarität nach der Hauptaxe mehr zurück, während die Pole auf den Seitenflächen stark erschienen; dabei lagen die negativen Pole mehr nach dem oberen ausgebildeten, die positiven mehr nach dem unteren verbrochenen Ende hin. Auf Bruchstücken von brasilianischen Krystallen, welche an beiden Enden von glänzenden Durchgangsflächen begrenzt waren, schien die polare Axe ganz verschwunden, indem beide Durchgangsflächen beim Erkalten negative Elektricität zeigten; sie boten also die bereits von Hauy und Erman beobachtete Vertheilung dar, nur dass die beiden genannten

Physiker die negative Elektricität auf den makrodiagonalen Seitenkanten nicht wahrgenommen, oder (wie Erman, welcher Unterschiede bemerkte) nicht beachtet hatten.*) Den Unterschied im elektrischen Verhalten der sibirischen und brasilianischen Krystalle, also das starke Hervortreten der polaren Hauptaxe bei den ersteren, glaubte ich als eine Folge des Auftretens von brachydiagonalen Gestalten ansehen zu können.

Im Jahre 1843 veröffentlichten Riess und G. Rose in den *Abhandlungen der Berliner Akademie* (*physik. Abh.* S. 91—95) neue Untersuchungen über die Thermoelektricität des Topases. Wahrscheinlich sind die meisten der von ihnen untersuchten Topase brasilianische Krystalle gewesen, weil diese eine viel stärkere Elektricität entwickeln als die sibirischen und sächsischen.

Da nun Riess und G. Rose bei den verschiedenen Krystallen an den Enden der Hauptaxe bald negative, bald positive Polarität fanden, die Elektricität der Endspitzen überhaupt nur schwach erschien, und bei einem zersprengten brasilianischen Krystalle die beiden einander zugekehrten Bruchflächen sich negativ zeigten: so glaubten sie das Vorhandensein einer der Säulenaxe parallelen elektrischen Axe beim Topas überhaupt leugnen zu müssen. Auch die an den scharfen Kanten des Prismas (an den Enden der Makrodiagonale) auftretende negative Elektricität hielten sie für eine nur zufällige, und nahmen daher die elektrische Vertheilung als centralpolarisch an, d. h. der Topas sollte zwei gegen einander gekehrte der Brachydiagonale parallele elektrische Axen besitzen; die beiden negativen Pole der Axen würden in der Mitte der genannten Diagonale zusammenfallen, während die beiden positiven Pole derselben in den an den Enden dieser Diagonale befindlichen Seitenkanten lägen.

Nach Riess und G. Rose müsste ein vollständig ausgebildeter Topas (vierseitige Säule mit den vierflächigen Endigungen) beim Erkalten sich folgendermassen verhalten: „Beide Endigungen würden unelektrisch sein; die positive Elektricität würde auf den an den Enden der Brachydiagonale liegenden Seitenkanten nach ihrer ganzen Ausdehnung auf-

*) An beiden Seiten vollständig ausgebildete Krystalle standen mir damals nicht zu Gebote, und die vorgefasste Meinung, dass die früher untersuchten an beiden Enden mit geneigten Flächen versehenen Krystalle als eine Art Zwilling anzusehen seien, (s. S. 364) hinderte mich, die an ihnen gemachten Beobachtungen zu weiteren Schlussfolgerungen zu benutzen.

treten, von dort auf den Seitenflächen schnell abnehmen und gegen die an den Enden der Makrodiagonale liegenden Seitenkanten hin, wie auf diesen selbst verschwinden. Negative Elektricität dürfte auf der ganzen Oberfläche nicht zu finden sein."

Die vielfachen Abweichungen von dem soeben als normal aufgestellten Verhalten sollten nach Riess und G. Rose durch Verletzungen entstehen. „Verletzungen an den makrodiagonalen Seitenkanten werden nach obigem Schema ein Hervortreten von negativer Elektricität; Verletzungen der brachydiagonalen Seitenkanten ein stärkeres Auftreten von positiver Elektricität an den verletzten Stellen veranlassen. Die Endkanten selbst nehmen Elektricität von den ihnen zunächst liegenden elektrischen Stellen auf; die Endspitze, gewöhnlich abgestumpft, entwickelt selbst schwache negative Elektricität. Ist eine Bruchfläche da, so entwickelt diese in der langen Diagonale negative Elektricität, die wenn sie zuweilen auf der Fläche wegen zu grosser Nähe der brachydiagonalen Ecken nicht merklich ist, jedenfalls den elektrischen Zustand der nächsten Kanten verändert."

Ich habe bereits unmittelbar darauf, im 61. Bande von *Poggendorff's Annalen* S. 289 ff. gezeigt, dass die im Vorstehenden angeführten Ansichten von Riess und G. Rose der Gesammtheit der beobachteten Thatsachen nicht entsprechen; die nachstehende Mittheilung meiner neueren Untersuchungen wird dies noch weiter bestätigen; wobei ich aber bemerke, dass alle von Riess und G. Rose in ihrer Abhandlung speciell angeführten Beobachtungen richtig sind, dass jedoch ihre Untersuchungsmethode die Wahrnehmung schwächerer elektrischer Zonen nicht gestattete und hierdurch die vollständige Erkennung der elektrischen Erscheinungen am Topase unmöglich machte.

Bevor ich zu meinen neuen Untersuchungen über das elektrische Verhalten des Topases übergehe, wird es zweckmässig sein, in Bezug auf die krystallographischen Verhältnisse und die Oberflächenbeschaffenheit dieses Minerales Einiges vorauszuschicken.

II. Krystallisationsverhältnisse des Topases.

1. Grundgestalt.

Die Krystalle des Topases gehören zum rhombischen Systeme. Ueber die am zweckmässigsten als Grundgestalt zu wählende Pyramide sind die Mineralogen verschiedener Ansicht. N. v. Kokscharow, der

im Jahre 1845 in seinen *Materialien zur Mineralogie Russlands* (Bd. 2. S. 243) eine grosse Reihe höchst sorgfältiger Messungen von Winkeln am sibirischen Topase bekannt gemacht hat, wählt als Grundgestalt eine Pyramide von den Axenverhältnissen

$$a : b : c = 1{,}80487 : 1{,}89199 : 1$$

wo a die Hauptaxe, b die Makrodiagonale und c die Brachydiagonale bedeutet; und es scheint ihn ausser dem Umstande, dass jene Pyramide an den sibirischen Krystallen gewöhnlich vorkommt, noch besonders das an eben diesen Krystallen fast stets und zwar meistens in beträchtlicher Ausdehnung auftretende horizontale Prisma, welches die makrodiagonalen Seitenkanten jener Pyramide abgestumpft, zu der angeführten Annahme bewogen zu haben.

Dagegen findet sich die Pyramide von den obigen Dimensionen weniger (oder gar nicht?) bei den sächsischen und brasilianischen Topasen*), auf deren Endigungen gewöhnlich die Flächen einer stumpferen Pyramide mit halb so langer Hauptaxe auftreten. Da nun die Flächen dieser stumpferen Pyramide an den sibirischen Krystallen ebenso häufig sich zeigen, wie die Flächen der vorhin genannten spitzeren, so haben andere Mineralogen eben des allgemeineren Vorkommens wegen**) die bezeichnete stumpfere Pyramide, welche früher als Grundgestalt angenommen wurde, beibehalten, und ich glaube mich dieser letzteren Ansicht ohne Bedenken anschliessen zu können, weil durch die Annahme der stumpferen Pyramide als Grundgestalt die Beziehungen der verschiedenen Krystallenformen zu einander an Einfachheit nicht verlieren. Die Dimensionen der im Folgenden als Grundgestalt angenommenen Pyramide sind also:

$$a : b : c = 0{,}90243 : 1{,}89199 : 1.$$

Zur Berechnung dieser Verhältnisse der drei Axen sind benutzt worden: 1) der Winkel der beiden Flächen des Prismas ∞ P an den brachydiagonalen Kanten = 124° 17′, und 2) der Winkel zwischen den Flächen des brachydiagonalen horizontalen Prismas 2 P ∞ und der gegen die Axe senkrechten Durchgangsfläche 0 P = 136° 21′.***)

*) An den von mir untersuchten sächsischen und brasilianischen Krystallen habe ich sie wenigstens nicht beobachten können.

**) Naumann, Elemente der Mineralogie 6. Aufl. S. 329.

***) Aus den obigen von v. Kokscharow gefundenen Werthen ergiebt sich, wie man sogleich sieht, der Winkel der beiden über 0 P liegenden Flächen des brachy-

2. Krystallgestalten.

Wie beim Kalkspath und dem Bergkrystall eine genauere Untersuchung einen grossen Reichthum verschiedener Gestalten an diesen Mineralien nachgewiesen hat, ebenso ist auch durch die neueren Arbeiten über den Topas die Anzahl der an ihm zur Erscheinung kommenden einfachen Krystallformen sehr beträchtlich vermehrt worden.

Bis jetzt sind folgende Formen beobachtet worden:

1) Grundgestalt P.
2) Pyramiden der Hauptreihe: $\frac{1}{2}$P*), $\frac{1}{3}$P, 2P und 4P.
3) Brachydiagonale Pyramiden: $2\breve{P}\frac{1}{2}$; $\breve{P}2$, $\frac{1}{3}\breve{P}2$, $2\breve{P}2$, $\frac{1}{2}\breve{P}2$, $4\breve{P}2$; $\breve{P}3$ und $\frac{1}{3}\breve{P}3$.
4) Makrodiagonale Pyramiden: $\frac{1}{9}\bar{P}\frac{1}{4}$; $\frac{1}{15}\bar{P}\frac{1}{4}$; $\dot{P}2$, $\frac{1}{3}\bar{P}2$ (?)
5) Hauptprisma ∞P.
6) Brachydiagonale verticale Prismen: $\infty\breve{P}\frac{1}{2}$, $\infty\breve{P}2$, $\infty\breve{P}\frac{5}{2}$, $\infty\breve{P}3$, $\infty\breve{P}4$, $\infty\breve{P}5$ (?)
7) Brachydiagonale horizontale Prismen oder Brachydomen: $\breve{P}\infty$, $\frac{1}{3}\breve{P}\infty$, $2\breve{P}\infty$, $\frac{1}{7}{}^{6}\breve{P}\infty$, $3\breve{P}\infty$, $4\breve{P}\infty$ und $8\breve{P}\infty$.
8) Makrodiagonale horizontale Prismen oder Makrodomen: $\frac{1}{3}\bar{P}\infty$, $\bar{P}\infty$ und $2\bar{P}\infty$.
9) Flächenpaar senkrecht gegen die Hauptaxe 0P.
10) Flächenpaar senkrecht gegen die Makrodiagonale $\infty\breve{P}\infty$.**)

---

diagonalen horizontalen Prismas $2\breve{P}\infty = 92^{\circ}\ 42'$, was mit dem von ihm durch Messung erhaltenen Werthe von $92^{\circ}\ 42{,}5'$ sehr gut übereinstimmt. Die von v. Kupffer durch Messung für diesen Winkel gefundene Grösse $92^{\circ}\ 45'$ kann nicht dagegen angeführt werden, da nach v. Kupffer's eigner Angabe (Preisschrift über genaue Messung der Winkel an Krystallen S. 78) das zu diesen Messungen verwandte Instrument nur von 3 zu 3 Minuten angab, und die einzelnen Messungen jenes Winkels unter einander um 6 Minuten differiren.

*) Die Gestalt $\frac{1}{2}$P ist von mir an den im folgenden IV. Abschnitte unter E behandelten Topasen von Mughla in Kleinasien beobachtet worden. Obwohl die Flächen derselben nicht gut spiegelten, gelang doch ihre Bestimmung mittelst des Reflexionsgoniometers so weit, dass über ihre Bezeichnung kein Zweifel blieb. Der Winkel zwischen einer Fläche dieser Gestalt und der ihr entsprechenden Fläche von ∞P wurde zu $116^{\circ}\ 45^{m}$, und der Winkel zwischen zwei in einer makrodiagonalen Polkante sich schneidenden Flächen derselben zu $133^{\circ}\ 27^{m}$ gefunden.

**) Im 2. Bande der zweiten Auflage seines *Traité* bildet Hauy Fig. 132 und 141 auch die Gestalt $\infty\bar{P}\infty$, und zwar in ersterer Figur in sehr grosser Ausdehnung ab. Mir ist an den vielen Krystallen, die ich untersucht habe, dieses makrodiagonale Flächenpaar nicht vorgekommen und auch v. Kokscharow scheint es nirgends beobachtet zu haben.

Ausserdem sind noch einige Flächen beobachtet worden, die aber theils wegen ihrer Kleinheit, theils wegen des Mangels an Glanz nicht bestimmt werden konnten, so dass die Gesammtzahl aller bis jetzt beobachteten einfachen Krystallgestalten ungefähr 40 beträgt.

Die Häufigkeit des Auftretens der einzelnen Gestalten ist ebenso wie die Ausdehnung ihrer Flächen sehr verschieden; sie wechseln besonders mit den Fundorten.

Auffallend in der vorhergehenden Zusammenstellung ist das sehr bedeutende Vorwalten der brachydiagonalen Gestalten gegenüber den makrodiagonalen. Dieses Vorwalten erstreckt sich aber nicht blos auf die Anzahl der Gestalten, sondern, wie wir später bei der speciellen Beschreibung der einzelnen Krystalle sehen werden, auch auf die Häufigkeit des Vorkommens und selbst die Grösse der Flächen. Während zahlreiche Krystallcombinationen (und zwar sind dies die gewöhnlichen) vorkommen, welche gar keine makrodiagonalen Pyramiden und Prismen tragen, dürfte eine Combination ohne eine brachydiagonale Gestalt kaum bekannt sein.

3. Durchgänge.

Die Krystalle des Topases sind parallel ihrer Basis (0 P) vollkommen spaltbar; doch finden sich auch noch Spuren von anderen Durchgängen.

4. Optische Axen.

Die optischen Axen des Topases liegen im brachydiagonalen Hauptschnitte: doch sind in den verschiedenen Varietäten die von ihnen eingeschlossenen Winkel nicht gleich gross.*)

5. Hemimorphismus.

Oben S. 361 ist angeführt worden, wie Hauy durch die Eigenschaft des Topases, infolge von Temperaturveränderungen elektrisch zu werden zu der Vermuthung geführt wurde, dass der Topas ebenso wie der mit gleicher Eigenschaft begabte Turmalin an beiden Enden verschiedene

*) Eine genauere Bestimmung der Winkel zwischen den optischen Axen bei den im Nachfolgenden auf ihr elektrisches Verhalten untersuchten Krystallindividuen, so grosses Interesse sie auch vielleicht dargeboten haben könnte, liess sich nicht ausführen, weil ein Zerschneiden der mir freundlichst geliehenen möglichst vollkommenen Krystalle zu Prismen oder Platten nicht thunlich war.

Bildungen zeigen werde, wenn später an beiden Enden ausgebildete Krystalle gefunden werden sollten; und wie er, nachdem er in den Besitz vollständig ausgebildeter brasilianischer Krystalle gelangt war, an den beiden Enden der Hauptaxe verschiedene Ausbildungen (Hemimorphismus) zu erkennen glaubte.

Die drei in der zweiten Auflage seines *Traité de minéral.* 2. Bd. Taf. 49, Fig. 132—134 abgebildeten Krystalle enthalten folgende Combinationen:

der erste: $\infty \breve{P} 3$, $\infty \bar{P} \infty$, $2 \breve{P} \infty$ und $\breve{P} \infty$; jedoch $\breve{P} \infty$ nur am oberen, nicht am unteren Ende;

der zweite: ∞P, $\infty \breve{P} 2$, P, $2 \breve{P} \infty$ und $2 \bar{P} \infty$; jedoch $2 \breve{P} \infty$ nur am oberen, nicht am unteren Ende;

der dritte: ∞P, $\infty \breve{P} 2$, P, $2 \breve{P} \infty$ und $\frac{1}{2} \breve{P} 2$; jedoch $\frac{1}{2} \breve{P} 2$ nur am oberen, nicht am unteren Ende.

Es sind also an jedem Krystalle andere Flächen, die nach Hauy hemimorphisch auftreten sollen.

Diesen von Hauy angeführten Beispielen, in denen Flächen an dem einen Ende, nicht aber an dem anderen sichtbar sind, könnte ich aus den von mir untersuchten, später zu beschreibenden Krystallen noch mehrere beifügen (z. B. den schönen Krystall vom Ilmengebirge No. 27, der nur an dem einen Ende die Flächen von $4 \breve{P} \infty$*) trägt, oder den Krystall No. 1 vom Schneckenstein, an welchem dieselbe Gestalt an dem einen Ende nur mit einer einzigen Fläche auftritt u. s. w.). Dessenungeachtet glaube ich aber nicht, dass wir in den angeführten Topaskrystallen einen wirklichen Hemimorphismus, wie solcher beim Turmalin sich zeigt, vor uns haben. Es sind bei manchen Topasen durch die übermässige Ausdehnung gewisser Flächen andere am Hervortreten verhindert worden, eine Erscheinung, die auch bei anderen Mineralien zahlreich sich findet, ohne dass man daraus auf eine hemimorphische Ausbildung zu schliessen berechtigt ist. Auch beim Topas würde Hauy dies nicht gethan haben, wenn er nicht infolge der thermoelektrischen Erregung, die anfänglich von ihm als in der Axe polar (vitrée d'un côté et résineuse de l'autre**) angenommen wurde, den Topas als analog dem Turmalin betrachtet hätte.

*) Ich bemerke, dass diese Gestalt nicht zu denen gehört, die von Hauy als hemimorphisch angegeben werden.

**) S. oben S. 360.

Uebrigens gestatten die von Hauy gegebenen Abbildungen der Krystalle (Fig. 132 bis 134) keine strenge Beurtheilung, da er dieselben nicht in der wirklichen Ausdehnung ihrer Flächen, sondern nur schematisch dargestellt hat. Auch dürfte wohl zu beachten sein, dass gerade beim brasilianischen Topase die Flächen nicht scharf ausgebildet sind, sondern häufig durch Krümmungen in einander verlaufen.

Wollten wir derartiges Fehlen von Flächen an dem einen Ende der Hauptaxe, wie die mir vorliegenden Krystalle es zeigen, als Hemimorphismus auffassen, so würde z. B. auch nach der Makrodiagonale ebenso gut ein Hemimorphismus anzunehmen sein, indem ich im Folgenden Beispiele bringen werde*), wo an der einen makrodiagonalen Seitenkante die Flächen des Prismas $\infty\breve{P}3$ und die eine Fläche von $\infty\breve{P}\infty$ auftreten, während sie an der gegenüberliegenden Kante nicht wahrnehmbar sind.**) Es können und werden solche Unsymmetrien mit den elektrischen Verhältnissen (Intensität und Ausdehnung der elektrischen Zonen) in Beziehung stehen; auf einen Hemimorphismus, wie wir solchen beim Turmalin haben, weisen sie aber nicht hin, und bedingen auch nicht, wie bei diesem, entgegengesetzte Polarität an den verschieden gestalteten Enden der betreffenden Axe.

Die im Vorstehenden von mir ausgesprochene Ansicht wird noch dadurch unterstützt, dass unter den mir vorliegenden an beiden Enden ausgebildeten Krystallen gerade die schönsten und vollkommensten (mit Ausnahme des zuvor S. 371 erwähnten Krystalles No. 27 vom Ilmengebirge) keine hemimorphische Gestaltung nach der verticalen Axe zeigen. Auch N. v. Kokscharow hebt von einem aus dem Borschtschowotschnoi-Gebirgszuge stammenden vollkommen farblosen und durchsichtigen Topaskrystalle von ungefähr 2½ Centimeter Länge und 1¼ Centimeter Breite im grössten Durchmesser als besonders merkwürdig hervor, dass derselbe an beiden Enden vollkommen und ganz symmetrisch ausgebildet sei.***)

*) Krystall No. 1, No. 4, No. 5.

**) Analoge scheinbar hemimorphische Bildungen werde ich später an den Enden der Brachydiagonale des Schwerspaths nachweisen.

***) Materialien u. s. w. 2. Bd. S. 230. Der betreffende Krystall ist begrenzt von den Flächen $0P$, $\frac{1}{3}P$, P, $2P$, ∞P, $\infty\breve{P}2$, $\infty\breve{P}3$, $\infty\breve{P}\infty$, $2\breve{P}\infty$ und $4\breve{P}\infty$. Unter diesen Gestalten findet sich zwar keine von denjenigen, welche Hauy als hemimorphisch verzeichnet hat, wohl aber die von mir nur an dem einen Ende eines Krystalles aus dem Ilmengebirge beobachtete Gestalt $4\breve{P}\infty$.

Man könnte aber geneigt sein, eine andere verschiedene Ausbildung der beiden Enden als Beweis für den Hemimorphismus des Topases anzusehen. Bereits 1840 habe ich in meiner Habilitationsschrift auf das Vorkommen von Topaskrystallen aufmerksam gemacht, welche an dem einen Ende gegen die Axe geneigte Flächen, am anderen dagegen eine gegen die Axe senkrechte, oft auch am Rande mit sehr kleinen geneigten Facetten versehene Fläche tragen, die durch ihre drusige oder narbige Beschaffenheit in aller Bestimmtheit kund gibt, dass sie kein Durchgang, sondern eine infolge der Krystallisation entstandene Fläche ist. Die damals untersuchten beiden Krystalle waren sächsische; gegenwärtig liegen ausser sächsischen auch zwei sibirische und zahlreiche brasilianische Krystalle von gleicher Form mir vor. Aber auch diese Bildung kann ich als eine hemimorphische nicht anerkennen; sie ist nur ein Zeichen von mangelnder Energie der Krystallisationskraft; jene drusige Endfläche verdankt, ähnlich wie die matte senkrecht gegen die Hauptaxe gerichtete Fläche einiger wenigen Bergkrystalle*), zahlreichen Spitzen, welche in eine Ebene fallen, ihre Entstehung. Dass diese Ansicht die richtige ist, ergibt sich aus der genaueren Betrachtung der brasilianischen Topase, die nicht nur auf der gegen die Axe senkrechten Fläche des unteren Endes, sondern häufig auch auf den gegen die Axe geneigten Flächen des oberen Endes die Bildung zahlreicher dünner der Axe parallelen Krystallfasern oder Blätter und ihre Vereinigung zu einem Gesammtindividuum darthun. Vielleicht weist auch die matte Beschaffenheit der Endfläche am oberen Ende der sächsischen und gewisser sibirischen Krystalle auf eine solche Zusammensetzung der Topaskrystalle überhaupt hin.

N. v. Kokscharow stellt sich die Entstehung dieser unvollkommenen Fläche am unteren Ende anders vor. Er sagt**): „Es wird nicht überflüssig sein, hier einiger Eigenthümlichkeiten zu gedenken, welche dem grössten Theile der Topaskrystalle aus der Gegend des Flusses Urulga eigen sind***), nämlich: viele Krystalle, die an ihrem oberen Ende vollkommen ausgebildet sind, und mehrere Flächen zeigen, bieten dagegen an ihrem unteren Ende eine einzige, mehr oder weniger

*) Bd. 13 dieser Abhandl. S. 336.

**) Materialien u. s. w. 3. Bd. S. 211.

***) „Aehnliche Eigenthümlichkeiten habe ich auch an einem Topaskrystalle aus Brasilien beobachtet."

drusenartige Oberfläche dar, welche man auf den ersten Blick für eine wirkliche Krystallfläche, d. h. für die nicht ganz gut ausgebildete 0 P halten könnte. Es erscheint jedoch sogleich sehr auffallend: weshalb die Krystallisationskraft, die am oberen Ende des Krystalles mit so grosser Regelmässigkeit gewirkt hat, den unteren Theil desselben so plötzlich verlassen hat. Man erklärt sich die Sache gewöhnlich ganz einfach, dass die Topase in einer Höhle entstanden sind, woher das obere Ende derselben in leeren Zwischenräumen keinen Hindernissen zur vollkommenen Ausbildung begegnete, während das untere Ende der Felsart zugewandt war und daher nicht mit derselben Regelmässigkeit auskrystallisirt werden konnte.*) Eine etwas gründlichere Untersuchung zeigt indessen, dass eine solche Erklärung unpassend ist. Die oben erwähnte Eigenthümlichkeit der Topaskrystalle hängt von ganz anderen, zum Theil geologischen Ursachen ab, nämlich: die Topaskrystalle wurden noch in den Bergen in zwei, drei oder mehrere Theile in der Richtung ihrer vollkommensten Spaltbarkeit gebrochen, wahrscheinlich infolge der geologischen Dislocationen, die in den Bergen fast in demselben Augenblick oder nach der Bildung der Topaskrystalle statt gefunden hatten. Oft blieben die gebrochenen Theile fast auf ihrem Platz und der Krystall erhielt in diesem Falle mehr oder weniger breite Risse. Nun ist es sichtbar, dass das erste auf diese Art entstandene Bruchstück an seinem oberen Ende alle Zuspitzungsflächen beibehalten muss, während es an seinem unteren Ende durch eine Spaltungsfläche begrenzt wird; die folgenden Bruchstücke müssen an ihren beiden Enden von Spaltungsflächen begrenzt werden, und endlich das letzte Bruchstück muss an seinem oberen Ende (mit welchem es mit der Felsart verwachsen war,) eine unregelmässige, wurzelförmige Oberfläche zeigen. Wenn jetzt in die Risse der gebrochenen Topaskrystalle die Auflösung des Topasstoffes eindringt, so bedecken sich alle entblössten Spaltungsflächen mit einer krystallinischen Topaskruste. Also die untere Fläche des grössten Theiles der Topaskrystalle, die ein drusenartiges Ansehen hat, und die

*) „Eine solche Erklärung findet schon gleich darin folgenden Widerspruch: wenn das untere Ende des Krystalles Hindernissen seitens der Felsart bei seiner Bildung begegnete, so konnte es auch keine Regelmässigkeit empfangen, während dasselbe an den Exemplaren, von denen hier die Rede geht, wenn nicht ganz, doch noch immer regelmässig genug ist."

man mit einer Krystallfläche leicht verwechseln kann, ist ein ganz fremdes Element für das Individuum und nichts anderes als die oben erwähnte Kruste.*) Den Grund der eben gegebenen Erklärung habe ich an einem Exemplare aus der Sammlung meines verehrten Freundes P. v. Kotschubey gefunden. Dies Exemplar besteht aus einem Granitstück, auf welchem sich ein Topaskrystall befindet, der in der Richtung seiner vollkommensten Spaltbarkeit in drei Theile gebrochen ist, und dessen entblöste Spaltungsflächen mit einer krystallinischen Topaskruste bedeckt sind."

Wenn auch die von N. v. Kokscharow im Vorstehenden angegebene Entstehungsweise der fraglichen Fläche möglich ist, und vielleicht in einzelnen Fällen, wie dem letztgenannten, eingetreten sein sollte, so ist sie doch nicht die allgemeine, wie sich aus der Beschaffenheit dieser drusigen Fläche mit voller Bestimmtheit ergibt; es erscheint diese Fläche durch zahlreiche Krystallköpfe gebildet. Ferner dürfte auch die sehr gewöhnliche Erscheinung, dass die bezeichnete drusige Endfläche noch von kleinen Pyramidenflächen umgeben ist, der Allgemeinheit der von v. Kokscharow angenommenen Bildungsweise nicht entsprechen.**) Uebrigens ist eine verschiedene Stärke der Krystallisationskraft an den entgegengesetzten Enden der Axen nichts Ungewöhnliches, und ich habe in meinen Untersuchungen über die thermoelektrischen Eigenschaften des Bergkrystalles wiederholt darauf hingewiesen. Gewöhnlich zeigt das eine Ende der Bergkrystalle wegen seiner vollkommeneren Ausbildung eine stärkere elektrische Erregung, und ein gleiches Verhalten werden wir auch später bei ringsum ausgebildeten Topasen antreffen; die Krystalle vermögen gewissermassen erst aus einem unvollkommeneren Grundbau sich zu voller Entfaltung zu erheben.

6. Beschaffenheit der Flächen.

Die Flächen mancher Krystallformen des Topases zeigen in Rücksicht auf Glanz und Glätte ziemlich constant dasselbe Verhalten, während

---

*) „Zu dieser Kategorie von Krystallen gehören auch die von P. v. Kotschubey beschriebenen Combinationen (∞P, $\infty\breve{P}2$ und oP) eines Topaskrystalles vom Flusse Urulga."

**) Man müsste annehmen, dass alle diese Topase dicht über der Spitze des unteren Endes abgebrochen wären.

auf den Flächen anderer Gestalten diese Eigenschaften in verschiedenen Graden auftreten.

Die Flächen der verticalen Prismen ∞P und $\infty \breve{P}2$ sind glänzend und gewöhnlich parallel der Hauptaxe gestreift; doch werden die Flächen $\infty \breve{P}2$ von den Flächen ∞P an Stärke des Glanzes übertroffen. Die Flächen $\infty \breve{P}3$ zeigen öfter einen eigenthümlichen, durch eine an der Oberfläche scheinbar blätterige oder faserige Structur erzeugten fast perlmutterartigen Glanz.

Bei den brasilianischen Krystallen erscheinen die verticalen Flächen durch abwechselndes Auftreten der beiden Prismen ∞P und $\infty \breve{P}2$ häufig gerundet.

Die Flächen der Brachydomen sind meistens glänzend; doch kommen auch Fälle vor, wo dieselben fast matt und rauh erscheinen; im Allgemeinen dürfte der Glanz mit der Annäherung an die Endfläche, d. h. mit dem Stumpferwerden des oberen Winkels des Prismas abnehmen.

Die Flächen der Makrodomen zeigen sich theils glänzend, theils matt. Sind die Flächen von $2\bar{P}\infty$ parallel ihren Combinationskanten mit $2P$ gestreift, so verstärken sich die Streifen nach dem oberen Ende hin und gehen nach beiden Seiten bogenförmig in die Flächen von P über. Oefter werden diese Streifungen so tief und unregelmässig, dass die Flächen $2\bar{P}\infty$ ein ganz unebenes Aussehen erhalten.

Die Flächen der Pyramiden sind gewöhnlich glänzend; ihr Glanz scheint ebenso, wie bei den horizontalen Prismen mit der Annäherung zur Endfläche abzunehmen, so dass die Flächen von $\frac{2}{3}P$ horizontal gestreift und bisweilen rauh erscheinen. Auch sind die Pyramidenflächen öfter schwach gekrümmt, weshalb die Durchschnittskanten gekrümmte Linien bilden, wie dies auch für die Durchschnittskanten der horizontalen Prismen $2\breve{P}\infty$ und $\frac{1}{2}\breve{P}\infty$ schon von v. Kokscharow*) angegeben worden ist. Bei den brasilianischen Krystallen verlaufen die Flächen oft stark gekrümmt in einander, oder zeigen mehr oder weniger tiefe Rinnen und Furchen.

Die Endfläche $0P$ ist fast stets matt, und man darf in den Fällen, wo sie glänzend erscheint, wohl fragen, ob sie nicht erst durch Ablösen eines dünnen Blättchens ihren Glanz erhalten hat.

---

*) v. Kokscharow, Materialien u. s. w. Bd. 2. S. 344 ff.

III. Verfahren bei der Untersuchung der Thermoelektricität des Topases und Darstellung der erhaltenen Resultate.

Das Verfahren bei der Untersuchung der Thermoelektricität des Topases glich anfänglich dem beim Bergkrystall angewandten und in Bd. 13 dieser Abhandlungen S. 342 ff. beschriebenen. Die Topaskrystalle wurden auf dem in der eben erwähnten Abhandlung Taf. I. Fig. 1 abgebildeten, kleinen eisernen Ofen bis auf die zu prüfende Fläche, Kante oder Ecke in Eisenfeilicht (oder bei hinreichender Kleinheit in Platinsand) eingehüllt, mit einer messingenen Haube bedeckt und dann erhitzt, bis ein daneben in dem Eisenfeilicht stehendes Thermometer 140 bis 150° (bei Krystallen, wo ein Zerspringen zu befürchten war, auch nur 110° bis 120°) zeigte. Nach dem Auslöschen der in dem kleinen Ofen befindlichen Lampe wurden sie der Abkühlung überlassen, bei ungefähr 95° die messingene Haube abgenommen und die von der vorhergegangenen Erhitzung herrührende Elektricität durch Bestreichen mit einer Alkoholflamme entfernt. Die genauere Prüfung der elektrischen Beschaffenheit auf den verschiedenen Punkten der freien Theile begann erst, nachdem das Thermometer bis auf 40 oder 30° gesunken war; während des weiteren Sinkens des Thermometers von 30° auf 20° traten wegen der Langsamkeit der Abkühlung keine beträchtlichen Aenderungen in der Stärke der Elektricitäten mehr hervor, so dass in nicht zu langen Zwischenzeiten ausgeführte Messungen, soweit es zu vorliegendem Zwecke nöthig erschien, vergleichbar waren.

In der zuvor beschriebenen Weise ist ein grosser Theil der Untersuchungen über die Elektricität der erkaltenden Topase ausgeführt; bei den übrigen ist jedoch ein etwas abgeändertes Verfahren in Ausführung gebracht worden.

Zunächst wurde das Eisenfeilicht, weil es nach längerem Gebrauche durch zu starke Oxydation keine vollkommene Ableitung mehr gewährte, durch Kupferfeilicht ersetzt, welches ausserdem noch den Vortheil darbot, die Krystallflächen weniger zu beschmutzen.

Vor Allem musste aber der grosse Zeitverlust, welchen die bei jedem einzelnen Versuche nach einander erforderliche Erhitzung und Abkühlung auf dem kleinen Ofen nothwendig zur Folge hatte, beseitigt werden, weil sonst die Untersuchung so zahlreicher Krystalle, wie sie beim Topas und ebenso später beim Schwerspath nöthig wurde, fast

unausführbar gewesen sein würde. Zu diesem Ende liess ich eine grössere Anzahl rundlicher Schalen, sowie cylindrischer und parallelepipedischer Gefässe der verschiedensten Grössen und Dimensionen aus dünnem Kupferblech anfertigen, füllte sie mit Kupferfeilicht, und hüllte in dieses den Krystall bis auf die zu untersuchende Stelle ein. Diese Schalen wurden dann in einen kleinen kupfernen Trockenofen von 0,19^{m} Länge, 0,14^{m} Breite und 0,12^{m} Höhe, und zwar auf einen im Innern desselben angebrachten durchlöcherten Boden gesetzt, und der Ofen durch eine unterhalb befindliche Gasflamme erhitzt. Ein im Innern des Ofens angebrachter Quecksilberregulator hielt die Temperatur, welche durch ein in die Luft des eingeschlossenen Raumes eintauchendes Thermometer gemessen wurde, so weit es nöthig war, constant. Die Temperatur im Innenraume wurde gewöhnlich bis 110° oder auch 120° C. erhöht. Hatten die Schalen eine genügende Zeit in dem heissen Raume gestanden, und infolge dessen ihr Inhalt nahezu die Temperatur desselben erreicht, so wurden sie, je nach Bedürfniss, einzeln herausgenommen, und nachdem die freien Krystallflächen oder Kanten oder Ecken durch Bestreichen mit einer Spiritusflamme von aller Elektricität gesäubert waren, behufs der Abkühlung auf eine kalte zur Erde abgeleitete Eisenmasse gestellt. Nach längerer oder kürzerer Dauer dieser Abkühlung wurde eine solche Schale in das auf dem oben erwähnten kleinen eisernen Ofen (der jetzt nur als Untersatz diente,) aufgehäufte Kupferfeilicht etwas eingedrückt, und dann die freie Oberfläche des Krystalles in der nachher zu erläuternden Weise auf ihr elektrisches Verhalten untersucht.

Das eben beschriebene Verfahren bietet ausser der Ersparniss an Zeit und vor Allem der gleichmässigeren Durchwärmung der Krystalle auch noch weitere Vortheile, indem erstens die langsame Erwärmung im Luftraume die Gefahr des Zerspringens der Krystalle vermindert, (wie denn auch von den sehr vielen wiederholt in dem kleinen Gasofen erhitzten Topas-, Schwerspath- und Aragonitkrystallen bis jetzt nur ein einziger sehr grosser brasilianischer Topas, und zwar beim ersten Erwärmen, wahrscheinlich infolge der verschiedenen Ausdehnung einer an der einen Seitenfläche ansitzenden fremdartigen Schicht zersprungen ist,) und indem zweitens die Beweglichkeit der kupfernen Schalen auf dem Kupferfeilicht des eisernen Ofens die Füglichkeit gewährt, durch angemessene Drehung derselben die zu untersuchenden Flächen, Kanten

oder Ecken stets in die für die Beobachtung der Annäherung der Drahtspitze geeignetste Beleuchtung und Lage zu bringen, was bei dem früheren Verfahren, wo der Krystall in dem auf dem Ofen liegenden Eisenfeilicht fest stand, nicht möglich war.

Dagegen waren bei dem neueren Verfahren die Perioden der Abkühlung, in welchen die Krystalle untersucht wurden, nicht mehr wie früher genau dieselben, indem sofort nach Prüfung eines Krystalles ein anderer zuvor zur Abkühlung hingestellter der Untersuchung unterworfen wurde, der je nach den Umständen in seiner Erkaltung mehr oder weniger weit vorgeschritten war; es sind also die nach dem neuen Verfahren auf verschiedenen Flächen eines und desselben Krystalles ausgeführten Messungen weniger vergleichbar als die durch das frühere erhaltenen, während selbstverständlich die auf einer und derselben Fläche bei derselben Abkühlung gemachten Beobachtungen ihre frühere Vergleichbarkeit behalten.*)

Die Messung der Elektricität geschah beim Topas in gleicher Weise wie früher beim Bergkrystalle und Boracit durch Annäherung der Spitze eines mit dem Goldblättchen meines Elektrometers in Verbindung stehenden Platindrahtes mittelst der Bd. 13 S. 344 dieser Abhandlungen beschriebenen, und auf der zugehörigen Tafel I. Fig. 1 abgebildeten Hebelvorrichtung, deren Schlitten aber nicht wie bei der früheren aus Holz, sondern aus Messing construirt waren. Ausserdem erhielt dieselbe noch den Bd. 13 S. 346 schon angedeuteten Zusatz. Bei der früher benutzten Einrichtung stiess der dem Krystalle genäherte Platindraht V, wenn er durch den Hebel LL' aufwärts bewegt wurde, an einen feststehenden Platindraht U, um sich und das Elektrometer zu entladen. Es blieb aber selbstverständlich, wenn die Spitze des ersteren Platindrahtes nur 1 bis 2 Linien von der Oberfläche des Krystalles entfernt wurde, durch die Vertheilungswirkung seitens des Krystalles stets noch eine gewisse Elektricitätsmenge in dem Drahte gebunden; der Ausschlag im Elektrometer beim Annähern der Drahtspitze an den Krystall war daher auch von dem Wege, welchen die Spitze des beweglichen Platindrahtes durchlief, abhängig. Es wurden nun bei den Ver-

*) Auf Krystallen von verschiedener Grösse nach dem ersten Verfahren ausgeführte Messungen waren ebenfalls nicht streng vergleichbar, weil auch bei gleichen Thermometerangaben doch die Abkühlungsverhältnisse sich verschieden gestalteten.

suchen am Bergkrystalle diese Hubhöhen durch Verstellen des oberen Drahtes dem Augenscheine nach möglichst gleichgemacht, was für die damaligen Beobachtungen, wo gewöhnlich alle zu vergleichenden Punkte in einer Ebene lagen, ausreichte. Bei der Untersuchung des Topases trat aber, weil die zu prüfenden Stellen öfter nicht in einer Ebene lagen, und zum Theil auch für die Beurtheilung der auftretenden elektrischen Vorgänge eine genauere Messung erfordert wurde, die Nothwendigkeit ein, die zuvor bezeichnete Hubhöhe bei allen Beobachtungen gleich zu machen, ohne erst eine besondere Einstellung nöthig zu haben.

Die hiezu erforderliche Verbesserung liess sich an dem Bd. 13, Taf. I. Fig. 1 abgebildeten Apparate leicht anbringen, und ist in der dieser Abhandlung beigegebenen Tafel IV, Fig. 65 abgebildet.

Anstatt nämlich den zur Ableitung dienenden Platindraht UX (der Fig. 1, Taf. I in Bd. 13) von der feststehenden Säule Z tragen zu lassen, wurde neben dem Hebel LL', (s. Taf. IV, Fig. 65) mit ihm parallel ein zweiter ebenso langer Hebel ll' angebracht, dessen Drehungsaxe hh' genau in der Verlängerung der Drehungsaxe HH' des ersten Hebels lag. In einem gleichen Abstande wie LH war eine der LR gleiche hohle Röhre lr befestigt, in welcher sich der Messingstäb q verschieben und durch die Schraube r feststellen liess. Das obere Ende dieses Stabes trug einen dreiseitigen Querstab vv', der in ihm verschiebbar war und durch die Schraube s festgeklemmt werden konnte. Vom hinteren Ende v' dieses Querstabes lief oberhalb parallel mit ihm eine straffe Messingfeder ww' aus, die an ihrem vorderen (linken, d. h. über dem kleinen Ofen befindlichen) Ende w einen rechtwinklig gegen sie gestellten horizontalen Platindraht uw trug, gegen welchen der obere horizontale Theil des beweglichen Platindrahtes V bei seinem Aufwärtsgehen sich anlegen sollte. Die Feder wurde gegen das vordere Ende des dreiseitigen messingenen Querstabes durch eine Schraube x gezogen.

Das hintere (rechte) Ende des zweiten Hebels l' war horizontal zwei Mal rechtwinklig und etwas nach oben gebogen $l'l''$, sodass es oberhalb des hinteren Endes L' des ersten Hebels LL' zwischen die Schenkel des Bügels N trat, und da die linke Seite schwerer war, sich gegen die Spitze der Stellschraube N' anlegte. Gegen die untere Seite des hinteren Endes des zweiten Hebels legte sich dann das hintere Ende L' des ersten Hebels. Eine Umdrehung der Schraube N' änderte also die Lage der rechten Enden beider Hebel, und daher auch der an

gleichen Armen auf der linken Seite befestigten beiden Platindrähte in gleicher Weise.

Es wurde nun zunächst durch die Schraube x der an der Feder ww' befindliche Platindraht uw bis zur Berührung mit dem oberen Theile des am ersten Hebel sitzenden Platindrahtes V gebracht, und dann die Schraube x eine gewisse Anzahl Umdrehungen (gewöhnlich 8) zurückgedreht, sodass also, wenn die rechten Enden beider Hebel unter der Schraube N' in Berührung lagen, der obere ableitende Platindraht u von dem unteren abzuleitenden V einen jenen 8 Umdrehungen entsprechenden Abstand hatte. Wurde sodann der linke Arm L des ersten Hebels LL' durch Niederdrücken der an seinem rechten Ende befindlichen Verlängerung L'' gehoben, so bewegte sich anfangs der linke Arm dieses ersten Hebels LL' und der an ihm befestigte Platindraht V allein aufwärts; erst wenn der eben genannte Platindraht V gegen den oberhalb befindlichen zweiten Platindraht u anstiess, setzte er durch diesen Draht auch den zweiten Hebel ll' in Bewegung. Wurde darauf das linke Ende des ersten Hebels LL' wieder niedergelassen, so sank das entsprechende Ende des zweiten Hebels gleichfalls; die beiden Platindrähte trennten sich aber, und der untere Platindraht V wurde isolirt, sobald das rechte Ende des zweiten Hebels ll' sich an die Schraube N' anlegte, während der erste Hebel LL', und mit ihm der an ihm befindliche Platindraht V noch weiter sinken konnte, bis das rechte Ende L' sich an die untere Seite des zweiten Hebels ll' anlegte.*)

Der Abstand von der Krystallfläche, bei welchem der untere Platindraht sich von dem oberen trennte, blieb also (bei unveränderter Stellung der Schraube x) derselbe, wenn die Schraube N' so gestellt war, dass die untere Spitze des Platindrahtes V in ihrer tiefsten Lage die Fläche fast berührte. Die Begrenzung des gemeinschaftlichen Aufwärtsgehens beider Hebel geschah durch die Schraube K'; die Grösse dieser gemeinschaftlichen Bewegung ist übrigens für die im genäherten Platin-

*) Durch den Umstand, dass die Isolirung des Drahtes V in der Nähe der Krystallfläche eintritt, können, wie weiterhin erörtert werden wird, unter gewissen Bedingungen Irrthümer entstehen. Indess ist ein kurzer isolirter Hub bei Untersuchung schwach elektrischer Krystalle, bei denen er glücklicherweise keine Irrungen über die Beschaffenheit der Polarität einer Stelle hervorzurufen vermag, nothwendig, da öfter mit einem höheren Hube merkliche Vertheilungswirkungen seitens der Umgebungen verbunden sind.

drahte erzeugte und am Elektrometer gemessene elektrische Vertheilung völlig gleichgültig, weil letztere blos von dem Wege abhängt, welchen der erste Hebel LL' allein ohne den zweiten ll' zurücklegt; ein zu hoher Hub beider Hebel ist jedoch für das sanfte Niederlassen unzweckmässig. Die Schraube M' im Bügel M ist zum Niederdrücken oder Loslassen des Hebels LL' bestimmt.

Als Messapparat für die Intensität der elektrischen Vertheilung diente ebenso wie bei den früheren Untersuchungen mein Elektrometer, dessen Goldblättchen mit dem Platindrahte V des ersten Hebels LL' durch einen sehr dünnen Draht W in leitende Verbindung gebracht war; seine Empfindlichkeit war ungefähr dieselbe, wie bei den Beobachtungen am Bergkrystalle.*)

Ich mache hier auf eine Fehlerquelle aufmerksam, die bei dem ersten oben S. 377 beschriebenen Verfahren, wenn die elektrischen Erregungen der Krystalle nur sehr schwach sind, störend einwirken kann. S. 377 wurde erwähnt, dass die Temperaturen an einem neben dem Krystalle in das Eisenfeilicht eingesetzten Thermometer abgelesen wurden. Durch die an diesem Thermometer aufsteigende warme Luft wird nun die Glasröhre schwach elektrisch und wirkt durch Vertheilung auf den sich senkenden Platindraht; der hierdurch bewirkte Ausschlag im Elektrometer kann auch in ziemlich grossem Abstande der Glasröhre bei der zuvor bezeichneten Empfindlichkeit desselben noch 0,1 bis 0,2 Skth. betragen. Handelt es sich also um die Messung sehr schwacher elektrischer Spannungen auf dem Krystalle, so ist es nothwendig, das Thermometer vor dem Beginn der Beobachtungen zu entfernen. Tritt auf der den beweglichen Platindraht V tragenden Glasröhre TS aus gleicher Ursache eine Elektrisirung ein, so hat dieselbe auf die Veränderung des elektrischen Zustandes im Platindrahte keinen Einfluss, da der Draht zu ihr stets in derselben Stellung verbleibt.

Die Krystalle wurden gewöhnlich geprüft, indem sie in Eisen- oder Kupferfeilicht eingehüllt waren, 1. bis auf eine der Endflächen; 2. bis auf eine der Pyramidenflächen (oder auch falls die Endfläche fehlte, öfter bis auf sämmtliche Pyramidenflächen an dem einen Ende); 3. bis auf eine der Seitenflächen und 4. bis auf eine der Seiten- oder Pol- oder Randkanten. Diese Arten der Einhüllung und Prüfung der allein

*) S. Bd. 13 dieser Abhandlungen S. 343.

freigelassenen Theile sind im Folgenden stets zu verstehen, wenn von einer Untersuchung 1. der Endflächen, 2. der Pyramidenflächen, 3. der Seitenflächen und 4. der Seiten- oder Pol- oder Randkanten die Rede ist.

Auf den beigefügten Tafeln sind die im Nachstehenden beschriebenen und untersuchten Krystalle zum allergrössten Theile abgebildet worden, und zwar ist dies je nach den Umständen in zwei verschiedenen Weisen geschehen. Die Krystalle sind erstens in ihrer natürlichen Grösse in zwei Projectionen gezeichnet, bei denen die Hauptaxe in der Ebene der Zeichnung, die Makrodiagonale aber senkrecht gegen diese Ebene genommen ist.*) Zweitens sind die Netze der Krystalle entweder in natürlichen oder zwei- oder vierfach linear vergrösserten Dimensionen**) dargestellt, und ist dabei das Netz stets in einer makrodiagonalen Kante aufgeschnitten vorausgesetzt. Ausserdem war es einige Male nothwendig, sämmtliche Kanten, oder auch nur eine derselben durch einfache Linien darzustellen.

Ich werde die verticalen Prismenflächen nach dem Quadranten, in welchem sie liegen, in vier Gruppen theilen, und als Quadrant oder kürzer Fläche 1 bezeichnen alle zwischen einer links gelegenen makrodiagonalen und einer rechts gelegenen brachydiagonalen Seitenkante befindlichen Prismenflächen; als Quadrant oder Fläche 2 alle Flächen zwischen der eben erwähnten brachydiagonalen und der zunächst rechts gelegenen makrodiagonalen Seitenkante u. s. f. Die zu jeder Gruppe von Prismenflächen gehörigen Pyramidenflächen werden in entsprechender Weise nach dem Quadranten, in welchem sie liegen, benannt. Zur Bezeichnung der Seitenkanten dienen die Zahlen der beiden Flächen, durch deren Durchschnitt sie entstehen; es sind also die Kanten (4. 1) und (2. 3) die makrodiagonalen, und die Kanten (1. 2) und (3. 4) die brachydiagonalen Seitenkanten.

---

*) Da es bei diesen Zeichnungen nicht auf geometrische Richtigkeit, sondern nur auf Darstellung der Grösse und Beschaffenheit der äusseren Begrenzungsflächen ankommt, so sind die Projectionen nicht construirt, sondern aus freier Hand gezeichnet worden. Da ferner die Grösse und Gestalt der Endflächen in diesen Projectionen nicht sichtbar werden, so sind die Endflächen oberhalb und unterhalb der Projection dargestellt; ist jedoch das Netz des Krystalles gegeben, so sind die Endflächen bei den Projectionen fortgelassen, weil ihre Form aus dem Netze zu erkennen ist.

**) Die zwei- oder vierfach lineare Vergrösserung ist neben dem Netze durch $\frac{2}{1}$ oder $\frac{4}{1}$ angedeutet.

Die auf den Seitenflächen beobachteten elektrischen Vertheilungen sind theils durch Farben (die röthliche Farbe bezeichnet die positiven, die grünliche die negativen Zonen) und mit Angabe der an den einzelnen Punkten*) gemessenen Ausschläge in die Netze eingetragen, theils, wo das Netz fehlt, nur durch Farben in den Projectionen angedeutet worden. Liessen sich die auf den makro- und brachydiagonalen Seitenkanten wahrgenommenen Polaritäten aus den Beobachtungen auf den Seitenflächen einigermassen erkennen, so sind sie nicht besonders dargestellt; entgegengesetzten Falles finden sie sich gewöhnlich durch die Farben auf den Kanten der Projectionen angedeutet; nur einige Male sind sie auf gesonderte Kantenlinien mit Angabe der gemessenen Ausschläge eingetragen worden.

Die besondere Darstellung der auf den Seitenkanten vorhandenen Polaritäten wird nämlich häufig durch den Umstand unerlässlich gemacht, dass bei der Untersuchung der Flächen die an ihren Rändern, also auf den Kanten, auftretenden elektrischen Spannungen durch die stärkere Vertheilungswirkung der auf den Flächen angehäuften Elektricitäten verdeckt werden können. So kommt es z. B. vor, dass eine Kante und die unmittelbar benachbarten Flächenstücke bei specieller Untersuchung (d. h. wenn sie allein aus dem Kupferfeilicht hervorragen) sich positiv zeigen, während bei der Prüfung der Flächen (wo also eine Seitenfläche allein frei liegt) die jener Kante anliegenden Theile infolge einer überwiegenden Vertheilungswirkung der auf diesen Flächen ausgebreiteten starken negativen Elektricität noch negativ erscheinen. Eine genaue Beobachtung der Bewegung des Goldblättchens lässt übrigens auch in diesem Falle bei der Prüfung der Fläche in der Nähe der Kante die positive Beschaffenheit der Kante selbst erkennen. Nehmen wir an, der Platindraht bewege sich aus grösserer Entfernung in verticaler Richtung gegen die horizontale Krystallfläche, so wird bei allmähliger Annäherung des Platindrahtes an die der Kante angrenzenden Flächenstücke zuerst infolge der stark negativen seitlichen Flächenstücke ein negativer Ausschlag entstehen, bei einer gewissen Annäherung ein Maximum erreichen, und dann bei noch weiterer Annäherung wieder abnehmen, aber auch in grösster Nähe, falls die unter der Drahtspitze befindliche

*) Meistens sind noch viel mehr Punkte beobachtet worden, als in die Zeichnungen eingetragen werden konnten.

Stelle nur schwach positiv ist, noch negativ verbleiben.*) In die Netze sind nun stets die bei grösster Nähe des Platindrahtes beobachteten Ausschläge des Goldblättchens eingetragen; eine Andeutung jener eigenthümlichen Bewegung des Blättchens durch die Zeichnung war nicht wohl ausführbar.

Ich habe früher S. 379 erwähnt, dass, wenn der Platindraht *V* den Draht *u* verlässt, in dem Drahte *V* eine gewisse Elektricitätsmenge durch Vertheilungswirkung seitens der unter ihm liegenden elektrischen Fläche gebunden ist. Bei der von mir angewandten mechanischen Vorrichtung, um die untere Spitze des Drahtes *V* dem Krystalle möglichst zu nähern, bewegte sich nun aber der Draht nicht wie eben zuvor angenommen in einer verticalen Linie auf und nieder; es stand vielmehr die untere Spitze des Drahtes *V* in dem Augenblicke, wo er, falls die Schraube *x* um 8 Umgänge zurückgedreht war, (s. ob. S. 381) isolirt wurde (den Draht *u* verliess), vertical über einer Stelle, welche ungefähr $4{,}5^{mm}$ rechts von dem Punkte lag, über welchem jene Spitze bei der grössten Annäherung stehen blieb. Die im Drahte *V* zur Zeit des Eintritts seiner Isolirung durch Vertheilung gebundene Elektricität hing also vorzugsweise von den elektrischen Spannungen der etwas rechts von dem eigentlich zu prüfenden Punkte gelegenen Flächenstücke ab.

Um den Einfluss dieses Umstandes klar darzulegen, will ich einen bestimmten Fall erläutern. Ich wähle dazu die Fläche 3 des in Fig. 50 *A* und *B* gezeichneten Krystalles. In mittlerer Höhe findet sich auf dem linken Rande die Zahl — 18 und am rechten Rande die Zahl + 18. Gesetzt nun, es läge die Grenze der beiden entgegengesetzten Elektricitäten genau in der Mitte, diese Mitte besässe also gar keine Spannung: dennoch würde das Elektrometer, wenn die untere Spitze des Platindrahtes dieser Mitte genähert wird, je nach den Umständen negative oder positive Elektricität zeigen. Hätte die obige Fläche 3 die in der Fig. 50 *B* gezeichnete Lage, wobei also der positive Rand (+ 18) nach rechts liegt, so würde diese positive Elektricität im Augenblicke der Isolirung des Drahtes *V* eine gewisse Menge negativer Elektricität in ihm gebunden haben; diese gebundene Elektricität müsste bei weiterer Annäherung des Drahtes gegen die spannungslose Mitte,

*) Ist die unterhalb des Drahtes liegende positive Elektricität stärker, so geht der anfänglich negative Ausschlag zuletzt in einen positiven über.

weil die rechts und links gelegenen, gleich stark angenommenen entgegengesetzt elektrischen Flächenstücke in ihren Vertheilungswirkungen auf den Draht *V* sich aufheben, frei werden, das Elektrometer also einen negativen Ausschlag zeigen. Drehte man aber die Fläche um 180° um ihre vertical gestellte Normale, so dass jetzt der negative Rand (— 18) nach rechts zu liegen käme, so würde diese negative Elektricität in dem Drahte *V* bei Eintritt seiner Isolirung positive Elektricität gebunden haben, und diese bei weiterer Annäherung der Drahtspitze gegen die nicht elektrische Mitte frei werden, das Elektrometer also auf derselben Stelle des Krystalles, wo zuvor ein negativer Ausschlag beobachtet wurde, jetzt positive Elektricität angeben.

Als der Platindraht *V* der Mitte der Fläche 3 Fig. 50 *B* genähert wurde, gab das Elektrometer einen Ausschlag von + 3 Skth., wobei der Krystall mit dem stark positiven Rande nach rechts lag. Durch diesen letzteren Umstand ist der positive Ausschlag in der Mitte jedenfalls etwas verringert worden. Wäre die Fläche 3 um 180° um ihre verticale Normale gedreht gewesen, so hätte diess, weil jetzt der stark negative Rand nach rechts gelegen, den Ausschlag des Elektrometers bei Annäherung der Platinspitze an die Mitte gerade umgekehrt vergrössern müssen.

Das zuvor behandelte Beispiel zeigt, in welcher Weise man sehr leicht bei Anwendung des zweiten oben S. 378 beschriebenen Verfahrens, wo der Krystall mit seinem kupfernen Schälchen leicht drehbar ist, durch Drehung desselben entscheiden kann, ob in der Nähe befindliche stark elektrische Stellen wesentliche Störungen gebracht haben. Das Mittel, um solche vollständig zu beseitigen besteht darin, die ganze Fläche mit Ausnahme des speciell zu prüfenden Theiles mit Kupferfeilspähnen zu bedecken; durch dieses Bedecken wird jedoch auch die Ableitung geändert. Es bedarf daher, wie man sieht, oft mannichfacher Combinationen, um die elektrische Beschaffenheit eines Flächenstückes mit Sicherheit zu bestimmen.

Um alle Willkührlichkeiten auszuschliessen, habe ich stets die auf einer Fläche in der in den Netzen abgebildeten Lage beobachteten Zahlenwerthe in diese Netze eingetragen. Der Leser wird unschwer die Störungen abzuschätzen wissen, welche etwa stark elektrische Theile auf die Beobachtungen an benachbarten, sehr schwach oder gar nicht elektrischen Stellen haben ausüben können.

Ohne die bereitwilligste Unterstützung der Herren Mineralogen, welche grösseren Sammlungen vorstehen oder solche besitzen, wäre es mir nicht möglich gewesen, die thermoelektrische Untersuchung der Topaskrystalle in der erschöpfenden Ausdehnung, wie sie jetzt vorliegt, durchzuführen; ich habe daher, ehe ich zur Mittheilung derselben übergehe, die angenehme Pflicht zu erfüllen, meinem Collegen Herrn Geheimen Bergrath Naumann, sowie dem Herrn Geheimen Regierungsrath G. Rose in Berlin, dem Herrn Professor Dr. Girard und Herrn Dr. Sack in Halle, so wie Herrn Professor Weisbach jun. und Herrn Akademieinspector Stelzner in Freiberg für ihre grosse Gefälligkeit und Zuvorkommenheit in Darleihung geeigneter Krystalle meinen verbindlichsten Dank auszusprechen.

IV. Thermoelektrisches Verhalten der Topase.

Die thermoelektrischen Erscheinungen an den Topasen sind wesentlich von den bisher an den hemimorphischen Krystallen des Turmalins, Kieselzinkerzes u. s. w. beobachteten Vorgängen verschieden, sowohl hinsichtlich der Vertheilung der positiven und negativen Elektricität als auch durch die Aenderungen, welche in derselben durch Verschiedenheiten in der Krystallform, sowie durch mangelhafte Ausbildung und spätere Verletzungen hervorgerufen werden. Die sichere Aufstellung der normalen Vertheilung auf ringsum vollkommen ausgebildeten Topaskrystallen und die Nachweisung des Einflusses der Krystallformen und der Verletzungen haben eine genauere Prüfung sehr vieler Topase von den verschiedenen Fundorten unter mannichfach abgeänderten äusseren Bedingungen nöthig gemacht. Aus den äusserst zahlreichen Beobachtungen theile ich im Folgenden soviel mit, dass eine klare Einsicht in das normale und in das durch die genannten Einflüsse abgeänderte thermoelektrische Verhalten der Topaskrystalle gewonnen werden kann.

Behufs kürzerer Darstellung der gefundenen Resultate erscheint es mir zweckmässig, das Verhalten der Topase eines bestimmten Fundortes zuerst im Allgemeinen zu charakterisiren, und hierauf die Beschreibung der einzelnen Krystalle und die auf ihnen ausgeführten Beobachtungen als Beleg für die ausgesprochenen Sätze folgen zu lassen. Die Uebersichtlichkeit und Kürze wird wesentlich gewinnen, wenn ich alles das, was sich bildlich darstellen lässt, in die auf den beigefügten

Tafeln gezeichneten Projectionen und Netze der Krystalle eintrage, und, wenn nicht besondere Gründe vorliegen, im Texte nicht weiter erwähne.

A. Topase vom Schneckenstein bei Gottesberg in Sachsen.

Die Topase vom Schneckenstein werden an den Enden der Hauptaxe gewöhnlich begrenzt von mehr oder weniger ausgedehnten Endflächen 0P nebst anliegenden Flächen von P, $\frac{1}{3}$P. $\frac{1}{4}\breve{P}2$ und $2\breve{P}\infty$, während ihre Seiten von den beiden verticalen Prismen ∞P und $2\breve{P}\infty$ gebildet werden, wobei die Flächen des Prismas $\infty\breve{P}2$ in allen oder den meisten Quadranten (und zwar öfter sehr beträchtlich) grösser sind als die Flächen des Prismas ∞P. Dazu treten in einzelnen Fällen noch Flächen von $\infty\breve{P}\frac{5}{2}$, $\infty\breve{P}3$, $4\breve{P}\infty$ und $\infty\breve{P}\infty$.

Die Farbe dieser Topase ist weissgelblich bis dunkel weingelb, ihre Durchsichtigkeit bald mehr bald minder gross.

a. Elektrisches Verhalten im Allgemeinen.

Ein ringsum ausgebildeter Topaskrystall vom Schneckenstein erscheint beim Erkalten auf den beiden Endflächen 0P positiv.

Die Flächen des Brachydomas $2\breve{P}\infty$ zeigen in ihrem grössten Theile ebenfalls positive Elektricität, die jedoch von der Kante zwischen 0P und $2\breve{P}\infty$ nach dem Endpunkte der makrodiagonalen Seitenkante hin abnimmt und in der Nähe des letztgenannten Endpunktes in die negative übergeht. Ist ausser der Gestalt $2\breve{P}\infty$ das noch schärfere Brachydoma $4\breve{P}\infty$ vorhanden, so findet sich auf der Fläche dieses letzteren negative Polarität.

Die Pyramidenflächen besitzen bei den sächsischen Topasen gewöhnlich nur eine geringe Ausdehnung; wo sie eine mässige Grösse hatten und dadurch eine etwas genauere Bestimmung ermöglicht wurde, habe ich sie speciell geprüft.*) Im Allgemeinen sind die nach den Seitenflächen hin liegenden Streifen dieser Flächen negativ, während die nach den Endflächen zu gelegenen Theile mehr oder weniger an der positiven Beschaffenheit dieser letzteren theilnehmen. Man könnte vielleicht den Flächen P negative, den Flächen $\frac{1}{3}$P positive Polarität zuschreiben.

*) Wo in den Zeichnungen keine Farbe in die Pyramidenflächen eingetragen ist, sind dieselben ihrer Kleinheit wegen nicht speciell untersucht worden.

Die einander gegenüberliegenden Seitenkanten eines Krystalles zeigen gleichnamige Polaritäten, und zwar sind die beiden makrodiagonalen Seitenkanten negativ, die beiden brachydiagonalen aber positiv elektrisch.

Auf den prismatischen Seitenflächen finden sich um die makrodiagonalen Seitenkanten positive, um die brachydiagonalen dagegen negative Zonen, jedoch in verschiedener Ausdehnung, Form und Intensität. Zu den relativ vollkommensten Krystallen, namentlich mit Bezug auf die Ausbildung der beiden Enden der Hauptaxe, gehören die beiden Krystalle No. 1 und 2 (besonders die Flächen 1 und 2 derselben, während auf den Flächen 4 von No. 1, und den Flächen 3 und 4 von No. 2 Verletzungen infolge des Anwachsens auftreten). Beide Krystalle zeigen nun übereinstimmend eine eigenthümliche rhombische Form der positiven Zone um die Kante (1. 2); an den Endpunkten derselben beginnt die positive Zone schmal, erweitert und verstärkt sich gegen die Mitte hin. Aus dieser Form der positiven Zonen ergibt sich die Gestalt der die makrodiagonalen Kanten umgebenden negativen, die also in der Mitte am schmalsten sind, und sich gegen die oberen und unteren Randkanten erweitern. Es ist mir sehr wahrscheinlich, dass in einem ganz regelmässig gebildeten sächsischen Topase die beiden negativen den makrodiagonalen Seitenkanten angehörenden Zonen durch die negativen Pyramidenflächen am oberen und unteren Ende der brachydiagonalen Kanten zusammenhängen, und so den positiven Theil der Krystalloberfläche in vier von einander getrennte Zonen (zwei auf den Endflächen und zwei an den brachydiagonalen Seitenkanten) scheiden.

Die stärkste Intensität entwickeln die positiven Zonen auf den Endflächen und den diesen benachbarten Theilen der Flächen des Prismas $2\breve{P}\infty$; dann folgen der Stärke nach die negativen Zonen in der Umgebung der makrodiagonalen Seitenkanten, während die den brachydiagonalen Kanten angehörenden positiven Zonen am schwächsten erscheinen.

Die vollständig regelmässige, dem zuvor angegebenen Gesetze entsprechende Vertheilung der beiden Elektricitäten wird aber durch eine von Vorgängen im Innern oder durch Anlegen und Eindringen fremder Individuen veranlasste minder vollkommene Ausbildung einzelner Theile eines Krystalles, sowie durch Verletzungen infolge des Abbrechens vom Gestein oder absichtlichen Abschleifens und Zersprengens mehr oder weniger geändert.

So erscheint namentlich öfter (Krystall No. 3 und 4) das eine Ende der Hauptaxe vollkommener ausgebildet als das andere; letzteres besitzt dann eine schwächere positive Elektricität als das erstere, und diese positive Polarität nimmt immer mehr ab, jemehr die gestaltende Kraft an dem betreffenden Ende geschwächt gewesen ist, sodass mit dem Eintreten einer drusigen, noch von kleinen gegen die Hauptaxe geneigten Flächen umgebenen Endfläche (Krystall No. 6) schon in mehr oder minderem Grade die negative Elektricität auftritt, während das erstere vollkommener ausgebildete Ende eine um so stärkere positive Spannung zeigt; die Grösse dieser letzteren Spannung übertrifft gewöhnlich mehrfach das Maximum der auf den Seitenflächen beobachteten Intensitäten.

Eben jene negative Elektricität tritt auch, wenn ein Ende oder beide Enden der Hauptaxe abgesprengt werden (Krystall No. 7 bis 16), auf den von dem Durchgange gebildeten gegen die Axe senkrechten Flächen ein, und zwar je nach der Lage dieser Flächen in Bezug auf die Endpunkte der Hauptaxe entweder ausschliesslich oder mit kleinen Ueberresten von positiver Elektricität in der Mitte (s. Krystall No. 9 im Abschnitt V) oder in der Nähe der Reste der Flächen $2\breve{P}\infty$, falls nur eine dünne Schicht abgesprengt worden ist (Krystall No. 16, und No. 10 im Abschnitt V).

Ein allmähliges Abschleifen der gegen die Hauptaxe senkrechten Flächen 0 P vermindert anfangs ihren positiven Zustand, hebt ihn bei einer gewissen Tiefe ganz auf und führt ihn bei noch weiterem Schleifen in den negativen über (s. Abschnitt V, Krystall No. 59).

In ähnlicher Weise, wie die Enden der Hauptaxe, entwickeln auch die beiden negativen makrodiagonalen und ebenso die beiden positiven brachydiagonalen Seitenkanten je nach ihrer Ausbildung öfter eine verschiedene Stärke in ihrer Polarität.

Verletzungen an und neben den brachydiagonalen Seitenkanten, welche bis auf eine gewisse Tiefe gehen (Krystall No. 1, 2 und 3), verdrängen daselbst die positive Elektricität und setzen die negative an ihre Stelle. Einen gleichen Einfluss hat das Abschleifen dieser Kanten (s. den Abschnitt V), welches anfänglich die ursprünglich positive Polarität schwächt und zuletzt bei tieferem Eindringen in die negative überführt; und zwar nahm bei den geprüften, leider nur an dem einen Ende ausgebildeten Krystallen, die Stärke der negativen Polarität auf

den angeschliffenen Flächen von dem ausgebildeten Ende gegen das verbrochene hin ab. Dagegen ändern Verletzungen (Abschleifen) der makrodiagonalen Seitenkanten deren negative Polarität nicht, wenn sie auch auf die Intensität derselben einen Einfluss äussern.

Bei vollständig ausgebildeten Krystallen herrscht auf den prismatischen Seitenflächen die negative Polarität vor, und es wird diese grössere Ausdehnung der negativen Elektricität durch den Umstand bedingt, dass die negativen Zonen auf den Seitenflächen sowie auch zum Theil auf den Pyramidenflächen den sehr intensiven positiven Spannungen auf den beiden Endflächen nebst den schwächern positiven in der Umgebung der brachydiagonalen Kanten elektrisch das Gleichgewicht zu halten haben. Eine Verletzung der äussern Form, wie z. B. das Absprengen des einen Endes und die Ersetzung der daselbst befindlichen positiven Endfläche durch einen negativ elektrischen Durchgang wird nothwendig auch auf die Vertheilung der Elektricitäten auf den Seitenflächen einen Einfluss äussern.

Denken wir uns einen vollständig ausgebildeten Topaskrystall in seiner Mitte nach seinem auf der Axe senkrechten vollkommenen Durchgange zersprengt, so würde infolge der im unverletzten Krystalle vorhanden gewesenen Vertheilung jedes der beiden Bruchstücke sich derartig auf seinen Seitenflächen elektrisch zeigen, dass die negative Polarität am unverletzten Ende breit einsetzt, und sich gegen das verbrochene Ende hin verschmälert, während umgekehrt die positiven Zonen am unverletzten Ende schmal beginnen und sich gegen das verbrochene Ende hin erweitern. Die eben beschriebene Form der beiden entgegengesetzt elektrischen Zonen wird nun aber durch das Auftreten der negativen Polarität auf der Durchgangsfläche in dem angegebenen Sinne noch weiter fortgebildet werden, d. h. durch den Einfluss dieser negativen Zone wird auf den Seitenflächen die positive Elektricität noch mehr nach der Durchgangsfläche, die negative aber nach dem unverletzten Ende hin getrieben. Ausserdem wird infolge des Gegensatzes durch die negative Beschaffenheit der Durchgangsfläche auch die positive Spannung auf der Endfläche am unverletzten Ende erhöht.

Aus dem Vorstehenden erklärt sich die eigenthümliche Form der elektrischen Zonen auf den Seitenflächen bei Bruchstücken sächsischer Topase (Krystall No. 6, 10, 13, 14), die nur an einem Ende ausgebildet, am anderen aber verbrochen sind, und also nur die eine Hälfte eines

vollständigen Krystalles darstellen. Auch eine mangelhafte Ausbildung des einen Endes, wie bei Krystall No. 4, vermag schon eine ähnliche Vertheilung der Polaritäten wie bei den eben beschriebenen Bruchstücken anzubahnen.

Auf einem Bruchstücke, das aus der Mitte eines Krystalles genommen, und dessen Enden von negativen Durchgängen begrenzt sind, werden, weil die positiven Spannungen auf den Endflächen verschwinden, die positiven Zonen auf den Seitenflächen an Intensität und Ausdehnung zunehmen, und die Grenzen der entgegengesetzt elektrischen Zonen mehr parallel den Seitenkanten verlaufen müssen; wie dies auch das Fig. 16 gezeichnete Bruchstück, obwohl auf der oberen Durchgangsfläche wegen ihrer Nähe am ursprünglichen Ende noch ein Rest von positiver Elektricität übrig geblieben ist, in bezeichnender Weise andeutet.

An mehreren sächsischen Topasen (No. 5, 7 bis 10), welche einen etwas beträchtlichen Querschnitt besitzen, zeigt sich endlich eine eigenthümliche positive Zone ganz in der Nähe der negativen makrodiagonalen Seitenkanten. Ich habe dieselbe bisher nur an Krystallen gefunden, welche blos an einem Ende ausgebildet, am anderen aber von einem Durchgange oder einer theilweise negativen Endfläche begrenzt waren, und welche ausser den verticalen Prismen ∞P und $\infty \breve{P}2$ auch noch die Flächen des Prismas $\infty \breve{P}3$ trugen. Gewöhnlich erscheint jene Zone auf oder um die von den Prismen $\infty \breve{P}2$ und $\infty \breve{P}3$ gebildeten sehr stumpfen Kanten, und ihr Auftreten dürfte also wohl mit der Ausbildung des letzteren Prismas in ursächlichem Zusammenhange stehen.

b. Beobachtungen.

Krystall No. 1.

Der Krystall No. 1 gehört dem Berliner mineralogischen Museum; Fig. 1 *A* stellt ihn in den beiden, oben S. 383 näher bezeichneten Projectionen und zwar in natürlicher Grösse, Fig. 1 *B* dagegen sein Netz in zweifach linearer Vergrösserung dar. Der Krystall wird von den Flächen folgender Gestalten begrenzt: ∞P, $\infty \breve{P}2$; P, $\frac{1}{3}P$; $\frac{1}{4}\breve{P}2$; $2\breve{P}\infty$, $4\breve{P}\infty$, $\infty \breve{P}\infty$; und $0P$.

Von dem mit der Hauptaxe parallelen Flächenpaare $\infty \breve{P}\infty$ erscheint jedoch nur die auf die Kante (4. 1) fallende Fläche in schwacher

Andeutung, und von dem Brachydoma $\frac{1}{4}\breve{P}\infty$ tritt nur eine einzige kleine Fläche am unteren Ende der Kante (4. 1) auf.*)

Die Grössenverhältnisse der beiden Prismen ∞P und $\infty\breve{P}2$ lassen sich aus dem Netze Fig. 1 *B*, in welchem die Grenzen der beiden Prismen in jedem Quadranten durch die feineren Linien angedeutet sind, entnehmen; es übertreffen sämmtliche Flächen von $\infty\breve{P}2$ in ihrer Ausdehnung die Flächen von ∞P.

Die Oberfläche des Krystalles ist nicht unversehrt. Im oberen Drittheile der Fläche 2 sieht man eine kleine schwache Vertiefung von rundlicher Form, und unten auf der Fläche 4 einen fast 1 Linie tiefen von scharfkantigen Umrissen (als ob hier ein anderer Krystall angelegen hätte) begrenzten Eindruck. Auf der unteren Hälfte der Fläche 2 finden sich in den oberflächlichen Schichten einzelne kleine Partikelchen eines schwärzlichen Minerals eingeschlossen. Endlich ist unten rechts auf der Fläche 1 ein zweiter kleiner Topaskrystall, dessen Axe schief gegen diese Fläche steht, eingewachsen.

Mit welcher Stelle der Krystall bei seiner Bildung festgesessen hat, lässt sich nicht mit Sicherheit entscheiden; wahrscheinlich hat er einerseits in dem leichten Eindrucke der Fläche 2 angelegen, während ihm andererseits der in der Vertiefung auf der Fläche 4 eingewachsen gewesene Krystall einen festeren Stützpunkt dargeboten haben mag.

Fig. 1 *B* stellt nun die auf den End- und den gegen die Axe geneigten Flächen, sowie die auf den Seitenflächen beobachteten Elektricitäten dar, während die auf den Seitenkanten wahrgenommenen Polaritäten blos durch Farben in die beiden Projectionen Fig. 1 *A* eingetragen sind.

Die Intensität der positiven Elektricität auf den brachydiagonalen Seitenkanten ist schwächer als die der negativen auf den makrodiagonalen Kanten; besonders gering ist die positive Spannung unten auf der Kante (1. 2), wo dicht neben derselben der zuvor erwähnte kleine Krystall eingewachsen ist. Auf der makrodiagonalen Seitenkante (4. 1) ist

*) Wollten wir das durch zufällige Hemmnisse bei der Bildung verursachte Fehlen mancher Gestalten an den entgegengesetzten Enden einer Axe als Hemimorphismus auffassen, so würden wir, wie bereits oben S. 372 bemerkt, den vorliegenden Topas für hemimorphisch nicht blos in der Richtung seiner Hauptaxe (in Bezug auf $\frac{1}{4}\breve{P}\infty$), sondern auch in der Richtung seiner Makrodiagonale (in Bezug auf $\infty\breve{P}\infty$) erklären müssen.

die negative Spannung ungefähr doppelt so gross als auf der gegenüberliegenden Kante (2. 3); auf jener Kante (4. 1) sitzen die grösseren Flächen $2\breve{P}\infty$, sowie die Fläche $\infty\breve{P}\infty$, und nach ihr hin liegen auf den Endflächen 0P die Maxima der positiven Polarität; jedenfalls stehen diese Erscheinungen in engster Beziehung zu einander.

Unten auf der Fläche 4 wird die positive Polarität durch die zuvor beschriebene Verletzung nach links gedrängt.

Krystall No. 2.

Der Krystall No. 2 gehört dem Werner-Museum in Freiberg unter No. 545. Fig. 2 *A* stellt ihn in natürlicher Grösse, Fig. 2 *B* sein Netz in zweifach linearer Vergrösserung, und Fig. 2 *C* die Kante (3. 4) dar.

Der Krystall ist in seinem Innern ganz rein und von weingelber Farbe. An beiden Enden seiner Hauptaxe zeigt er eine vollkommene Ausbildung, und ist auch auf seinen Seitenflächen unverletzt, mit Ausnahme einer in der oberen Hälfte der Flächen 3 und 4 in Form von $\wedge$ über die Kante (3. 4) hinweglaufenden Rinne (s. die Zeichnungen); mit ihr scheint der Krystall bei seiner Bildung aufgesessen zu haben.

Der vorliegende Krystall stellt eine Combination folgender Gestalten dar: ∞P, $\infty\breve{P}2$; P, $\frac{1}{3}$P; $\frac{1}{3}\breve{P}2$; $2\breve{P}\infty$ und 0P.

Obwohl beide Enden des Krystalles dieselben Gestalten tragen, so ist doch ihr Aussehen sehr verschieden; am oberen Ende besitzen nämlich, wie die Abbildungen darthun, die gegen die Axe geneigten Flächen, und zwar vorzugsweise die beiden Flächen des Brachydomas $2\breve{P}\infty$ eine beträchtlichere Grösse als an dem unteren, was zur Folge hat, dass, wie das Netz in Fig. 2 *B* zeigt, die untere Endfläche 0P viel grösser und anders gestaltet erscheint als die entsprechende obere Fläche.

Die auf den Flächen beobachtete elektrische Vertheilung ist in das Netz (Fig. 2 *B*), die auf den Kanten gefundene in die Projectionen (Fig. 2 *A*) eingetragen; ausserdem sind die auf der Kante (3. 4) beobachteten Zahlenwerthe noch speciell auf der Kantenlinie (Fig. 2 *C*) dargestellt worden.

Eine specielle Untersuchung der Seitenkanten ergab, wie die in die beiden Projectionen Fig. 2 *A* eingetragenen Farben zeigen, die makrodiagonalen Kanten negativ elektrisch; dabei waren die oberen und unteren Endpunkte derselben stärker elektrisch als die Mitten: ein Umstand, mit welchem die eigenthümliche in Form eines Rhombus er-

folgte Ausbreitung der positiven Zone auf den Flächen 1 und 2 (Fig. 2 *B*) zusammenhängt.

Bei Prüfung der brachydiagonalen Seitenkanten wurde die Kante (1.2) positiv gefunden; diese positive Elektricität besass, entsprechend ihrer Ausbreitung auf den Prismenflächen, in der Mitte der Kante die grösste Stärke und nahm gegen die Enden hin ab, so dass die Enden selbst unelektrisch erschienen. Die Kante (3. 4), deren elektrisches Verhalten in Fig. 2 *C* besonders dargestellt ist, erschien gleichfalls positiv, jedoch mit Ausnahme zweier Stellen, welche negativ waren, nämlich des unteren Endes und sodann der Rinne, die (ungefähr ein Drittheil von oben) über diese Kante hinwegläuft. Die Intensität der positiven Elektricität in der Mitte der Kante (1. 2) war grösser als in der Mitte der Kante (3. 4).

Die zweite positive Zone auf der Kante (3. 4) wird bei der Untersuchung der Flächen in der Umgebung der Kante (3. 4) nicht direkt wahrgenommen; indess lässt sich doch aus der Bewegung des Goldblättchens auch bei diesen Beobachtungen auf ihr Vorhandensein schliessen (s. ob. S. 384); sie wird nur durch die Vertheilungswirkung der zur Seite liegenden stärkeren negativen Elektricität verdeckt. Als z. B. der Platindraht *V* (Fig. 65) der Mitte des linken Randes der Fläche 4 genähert wurde, stieg der negative Ausschlag des Goldblättchens bis — 0,7 Skth., und sank dann bei grösserer Annäherung wieder bis — 0,3 Skth. herab.

Besonders stark tritt die negative Elektricität in der mehrfach erwähnten Rinne und deren nächster Umgebung auf den Flächen 3 und 4 hervor, so dass dadurch sogar, wie zuvor schon angeführt, die positive Elektricität an der betreffenden Stelle der Kante (3. 4) ganz unterdrückt wird (Fig. 2 *B*), und überhaupt die positive Zone auf der Kante (3. 4) geschwächt erscheint.

Während die zweite positive Zone auf der Kante (3. 4) sehr zurücktritt, breitet sich die erste positive Zone auf den Flächen 1 und 2 stark aus. Man möchte sagen, durch das Anwachsen und die Verletzung der Kante (3. 4) und der anliegenden Fläche, bilde sich im Gegensatz zu der gegenüberliegenden unverletzten Kante (1. 2) eine polare Axe aus (mit ihrem positiven Ende der Kante (1. 2), mit ihrem negativen der Kante (3. 4) angehörend), die in ihrer Wirkung zu der im vollkommenen

Krystalle zwischen den Kanten (1. 2) und (3. 4) vorhandenen nicht polaren an beiden Enden positiven Axe hinzutritt.

Krystall No. 3.

Der Krystall No. 3 gehört ebenfalls dem Werner-Museum in Freiberg (No. 545). Fig. 3 *A* zeigt ihn in natürlicher Grösse, Fig. 3 *B* sein Netz in zweifach linearer Vergrösserung.

Wie gewöhnlich bei den Schneckensteiner Topasen ist der Krystall eine Combination folgender Gestalten: ∞P, $\infty \breve{P} 2$; P, $\frac{1}{3} P$; $\frac{1}{3} \breve{P} 2$; $2 \breve{P} \infty$ und $0 P$.

Seine verticalen Flächen sind nur schwach glänzend und sehen wie von feinen Schüppchen bedeckt aus; besonders ist ein eigenthümlich weissliches perlmutterartiges Aussehen auf den Flächen des Prismas ∞P, also in der Umgebung der beiden brachydiagonalen Seitenkanten (1. 2) und (3. 4) wahrzunehmen; aber auch an der Kante (4. 1) zeigt sich dasselbe, wenn gleich nur in geringer Ausdehnung. Die gegen die Axe geneigten Flächen besitzen einigen Glanz, sind aber doch mit zahllosen kleinen Grübchen bedeckt.

Der Krystall trägt zwei verletzte Stellen, womit er angesessen hat: die eine liegt auf der Fläche 2 von der Mitte nach oben, die andere dagegen auf der Fläche 4 von der Mitte abwärts, etwas nach rechts. Während die Verletzung auf der Fläche 2 quer über die ganze Breite der Fläche hinwegläuft, zieht sich die Verletzung auf der Fläche 4 mehr nach rechts, nach der Kante (4. 1) hin, und reicht also nicht bis zur linken Kante (3. 4).

Die positiven Zonen der brachydiagonalen Kanten erscheinen nicht symmetrisch, sondern auf die Flächen 1 und 3 gedrängt. Der Grund dieser Störung ist in den zuvor beschriebenen Verletzungen auf den Flächen 2 und 4 zu suchen. Da die Verletzung auf der Fläche 2 in der oberen Hälfte liegt und sich bis zur Kante (1. 2) erstreckt, so ist oben auf der Fläche 2 gar keine positive Elektricität bemerkbar, und auch die specielle Untersuchung der Kante (1. 2), wie solche in der Projection Fig. 3 *A* dargestellt ist, lässt nur im unteren Theile dieser Kante positive Elektricität hervortreten, während ihr oberer Theil unelektrisch erscheint. Auf der Fläche 4 liegt die Verletzung unterhalb der Mitte und reicht nicht bis zur Kante (3. 4); deshalb kann oben auf der Fläche 4

noch die normale positive Elektricität erscheinen, und die specielle Untersuchung der Kante (3. 4) ergibt dieselbe in ihrem ganzen Verlaufe positiv.

Krystall No. 4.

Fig. 4 *A* stellt den Krystall No. 4 in natürlicher Grösse, Fig. 4 *B* sein Netz in zweifach linearer Vergrösserung dar.

Der Krystall No. 4 ist eine Combination folgender Gestalten: ∞P, $\infty \breve{P}2$, $\infty \breve{P}3$, $\infty \breve{P}\infty$; P, $\frac{1}{2}P$; $\frac{1}{2}\breve{P}2$; $2\breve{P}\infty$ und $0P$; jedoch finden sich die Flächen von $\infty \breve{P}3$ nur im ersten und dritten Quadranten, und von dem brachydiagonalen Flächenpaare $\infty \breve{P}\infty$ erscheint nur die eine auf die Kante (2. 3) fallende Fläche.

Das obere Ende ist ziemlich regelmässig ausgebildet; am unteren Ende hat der Krystall jedenfalls aufgesessen; es zeigt sich an Stelle der geraden Endfläche eine durch Bruch entstandene Vertiefung, die ringsum von gegen die Axe geneigten Flächen umgeben ist.

Während die obere Endfläche nicht unbeträchtlich positiv erscheint, ist auf dem unteren Ende infolge der Verletzung die positive Spannung nur schwach und verschwindet bereits auf dem nach der Kante (1. 2) hin gelegenen Theile der Bruchfläche (Vertiefung). Unter den beiden negativen makrodiagonalen Seitenkanten zeigt die Kante (4. 1) eine stärkere Spannung als die gegenüberliegende Kante (2. 3).

Krystall No. 5.

Der Krystall No. 5, wohl einer der schönsten und vollkommensten der am Schneckensteine gefundenen Topaskrystalle, gehört dem Werner-Museum in Freiberg (No. 545). Fig. 5 *A*. stellt ihn in natürlicher Grösse, Fig. 5 *B* sein Netz in zweifach linearer Vergrösserung und Fig. 5 *C* seine vier Seitenkanten dar. Der Krystall, im Innern völlig rein und klar, und von hellweingelber Farbe ist eine Combination folgender Gestalten: ∞P, $\infty \breve{P}2$, $\infty \breve{P}3$, $\infty \breve{P}\infty$; P, $\frac{1}{2}P$, Spuren einer noch stumpferen Pyramide; $\frac{1}{2}\breve{P}2$, $2\breve{P}2$; $2\breve{P}\infty$, $4\breve{P}\infty$; $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ und $0P$.

Die Flächen des verticalen Prismas $\infty \breve{P}3$ und des brachydiagonalen Flächenpaares $\infty \breve{P}\infty$ finden sich nur an und resp. auf der makrodiagonalen Kante (4. 1.), während die gegenüberliegende Kante (2. 3.) scharf von den Flächen des Prismas $\infty \breve{P}2$ gebildet wird.

Der Krystall ist ringsum ausgebildet und zeigt keine Verletzungen mit Ausschluss einer sehr kleinen Stelle auf der oberen Fläche 0 P an der Kante (1. 2.), und sodann einer Stelle am unteren Ende: an diesem letzteren ist nämlich die an die Fläche 2 grenzende Hälfte der unteren Fläche 0 P glänzend und steht ungefähr um 0,1 mm gegen den übrigen matten Theil derselben zurück. Sehr wahrscheinlich hat der Krystall an dieser Stelle angesessen, und ist beim Ablösen vom Gestein ein sehr dünnes Blättchen losgerissen worden. Ein Gleiches gilt von dem daneben liegenden Rande; wo daselbst in dem zweiten Quadranten die Pyramidenflächen auftreten sollten, wird nur eine schmale Bruchfläche wahrgenommen.

Die negative Polarität gewinnt auf den oberen Theilen der seitlichen Begrenzungen dieses Krystalles eine solche Stärke und Ausdehnung, dass selbst bei specieller Prüfung die oberen Hälften der brachydiagonalen Seitenkanten negativ erscheinen (Fig. 5 *C*); auffallend auch ist die grosse Stärke der negativen Elektricität in dem mittleren Theile der Seitenflächen.*)

Einer Eigenthümlichkeit im thermoelektrischen Verhalten des Topases begegnen wir zuerst an diesem Krystalle in folgender Erscheinung. Wurde nämlich die Fläche 4, während der ganze Krystall mit Ausnahme dieser Fläche in Eisenfeilicht eingehüllt war, untersucht, so zeigte sich in geringem Abstande von dem rechten Rande, ungefähr da, wo die beiden Flächen von $\infty \breve{P} 2$ und $\infty \breve{P} 3$ eine stumpfe Kante bilden, eine Schwächung der negativen Elektricität, die nahe in mittlerer Höhe am stärksten erschien, so dass (s. Fig. 5 *B*) an dieser Stelle nur ein Ausschlag des Goldblättchens von — 0,2 Skth. beobachtet wurde, während er unmittelbar rechts und links daneben auf — 2,6 und — 2,1 Skth. stieg. Eine genauere Beobachtung des Goldblättchens, welches bei Annäherung des Platindrahtes zuerst auf — 0,6 Skth. ging und dann bei grösster Nähe des Drahtes auf — 0,2 Skth. zurückkehrte, wies darauf hin, dass an der betreffenden Stelle eine positive Erregung stattfinden müsse, die bei dem beschriebenen Verfahren nur durch die Vertheilungswirkung der umliegenden stärkeren negativen Elektricität verdeckt werde. Es hielt auch nicht schwer, die positive Erregung an

*) Dieselbe dürfte mit dem gleich zu erwähnenden Vorgange im Zusammenhange stehen.

der betreffenden Stelle durch die Beobachtung nachzuweisen: als nämlich die ganze Fläche 4 mit Ausnahme der betreffenden Stelle mit Eisenfeilicht bedeckt wurde, zeigte das Elektrometer beim Annähern des Drahtes an die freigelassene Stelle deutlich posisive Elektricität. Uebrigens erstreckt sich die Disposition zu einer positiven Erregung längs der ganzen Kante, wie dies die in das Netz Fig. 5 *B* eingetragenen niedrigen, rechts und links von höheren negativen Werthen umgebenen Zahlen darthun, wenn es auch nicht mehr gelingt durch Einhüllung des Krystalles bis auf einen schmalen Streifen an den oberen und unteren Theilen der Kante von $\infty\breve{P}2$ und $\infty\breve{P}3$ die positive Erregung selbst nachzuweisen.

Ich bemerke ausdrücklich, dass die äusseren Begrenzungen ebenso wenig wie das Innere des Krystalles an der betreffenden Stelle ein Anzeichen darbieten, woraus man auf das Auftreten einer positiven Elektricität hätte schliessen können.

Uebrigens liegt der Grund der eben beschriebenen Erscheinung nicht in einer ganz absonderlichen, für diesen Krystall eigenthümlichen Zufälligkeit, da sich dieselbe, wie schon in der allgemeinen Uebersicht hervorgehoben wurde, bei vielen anderen sächsischen Krystallen und zwar in noch viel ausgeprägterer Weise wiederholt.

Krystall No. 6.

Der Krystall No. 6 ist Fig. 6 nur in seinem Netze in zweifach linearer Vergrösserung abgebildet, da die elektrische Vertheilung auf den Seitenkanten sich angenähert aus den Beobachtungen aus den Seitenflächen ergibt. Der Krystall stellt die bei den Schneckensteiner Topasen gewöhnliche Combination ∞P, $\infty\breve{P}2$; P, $\frac{1}{3}P$; $\frac{1}{3}\breve{P}2$; $2\breve{P}\infty$ und $0P$ dar, und ist ziemlich durchsichtig. Sein unteres Ende zeigt das oben S. 373 beschriebene drusige oder genarbte Aussehen; an den Rändern desselben finden sich noch gegen die Axe geneigte Flächen. Das Aussehen dieser unteren drusigen Endfläche macht in keiner Weise den Eindruck, als ob der vorliegende Krystall bei seiner Bildung am unteren Ende angewachsen gewesen, dann daselbst abgebrochen und auf seiner Endfläche allein wieder mit drusigen Ansätzen überzogen worden wäre.

Die untere drusige oder narbige Fläche ist negativ bis auf den Rand in der Nähe der Kante (1. 2.), wo keine elektrische Spannung beobachtet werden konnte. Dieses Verhalten des unteren Endes hat nun aber bei

diesem Krystalle, wie bereits zuvor in der allgemeinen Uebersicht des elektrischen Verhaltens der Topase hervorgehoben wurde, eine Abänderung in der Ausbreitung der elektrischen Zonen auf den Seitenflächen zur Folge: die positiven Zonen der brachydiagonalen Seitenkanten rücken weiter nach unten und verbreiten sich daselbst, während die negativen Zonen auf den makrodiagonalen Kanten sich mehr nach oben wenden und dort ausbreiten.

Sehr auffallend ist der Unterschied zwischen der Stärke der positiven Elektricität auf der oberen und der negativen Polarität auf der unteren Endfläche; während die obere Endfläche eine für die Grösse des Krystalles sehr beträchtliche positive Elektricität entwickelt, erscheint die negative auf der unteren Endfläche nur schwach; man möchte auch hier wieder (und ein Gleiches gilt von den übrigen entsprechenden Krystallen) sagen, es sei zu der in vollständigen Krystallen vorhandenen, an beiden Enden positiven Hauptaxe eine am oberen Ende positive, am unteren aber negative, also polare Axe hinzugetreten.

Krystall No. 7.

Dieser grosse und schöne Krystall vom Schneckenstein No. 7 ist Fig. 7 nur in seinem Netze in natürlicher Grösse dargestellt; er besteht aus einer Combination folgender einfacher Gestalten: ∞P, $\infty \breve{P}2$, $\infty \breve{P}\frac{1}{2}$, $\infty \breve{P}3$; P, $\frac{1}{3}P$; $\frac{1}{3}\breve{P}2$; $2\breve{P}\infty$ und $0P$. Die Flächen $\frac{1}{3}\breve{P}2$ sind sehr klein, und die Flächen $\infty \breve{P}\frac{1}{2}$ erscheinen nur deutlich im dritten und vierten Quadranten. Das untere Ende wird von einer Durchgangsfläche gebildet. Die Kante (1. 2.) ist in der unteren grösseren Hälfte verbrochen.

Infolge der Verletzung der unteren Hälfte der Kante (1. 2.) und der allgemeinen Ausbreitung und Verstärkung der negativen Zonen gegen das obere Ende hin vermag die positive Elektricität nur auf einer kleinen Stelle in der Mitte der Kante (1. 2.) und unten rechts auf der Fläche 1 hervorzutreten. Specielle Beobachtungen auf den makrodiagonalen Kanten (4. 1.) und (2. 3.) zeigen deutlich das Wachsen der negativen Elektricität gegen das obere, und Beobachtungen auf der unverletzten brachydiagonalen Kante (3. 4.) das Wachsen der positiven Elektricität gegen das untere Ende hin.

Der vorliegende Krystall zeigt die schon bei dem Krystall No. 5 beschriebene eigenthümliche schmale positive Zone neben der negativen makrodiagonalen Seitenkante in noch viel ausgeprägterer Weise. Auf

der Fläche 1 zieht sich neben der negativen Kante (4. 1.) eine schmale, positive Zone fast nach der ganzen Länge des Krystalles hinauf, und eben diese Erscheinung wiederholt sich auf der Fläche 3 neben der negativen Kante (2. 3.). Diese schmalen verticalen positiven Zonen erweitern sich nach unten und verschmelzen daselbst mit den von den brachydiagonalen Kanten kommenden positiven Zonen, wodurch die negative Polarität auf den Flächen 1 und 3 mehr oder weniger nach oben gedrängt wird.

Krystall No. 8.

Der Krystall No. 8 ist in seinem Netze Fig. 8 in natürlicher Grösse dargestellt; er gleicht sehr dem vorhergehenden, nur fehlt ihm die Gestalt $\infty \breve{P} \frac{1}{2}$. An der Stelle der Kante (2. 3.) liegt eine unregelmässige Abstumpfung (in Fig. 8 mit α bezeichnet); doch ist dieselbe nicht durch Abbrechen, sondern infolge einer durch äussere Umstände gehemmten Ausbildung der Fläche $\infty \breve{P} \infty$ entstanden. Die Begrenzung des Krystalles am unteren Ende wird in der nach der Kante (4. 1.) hin gelegnen Hälfte von in mehrfachen Absätzen neben einander liegenden Durchgangsflächen gebildet, während die andere nach (2. 3.) hin gelegene Hälfte schief abgebrochen ist. Auf Fläche 3 haben fremde Krystalle Eindrücke hinterlassen.

Wie an Gestalt, so gleicht auch in der Vertheilung der elektrischen Polaritäten der vorliegende Krystall dem vorhergehenden. Die positiven Zonen auf den brachydiagonalen Kanten treten etwas stärker auf als bei No. 7; ferner erscheint die beim vorhergehenden Krystalle neben den beiden makrodiagonalen Kanten beschriebene positive Zone am vorliegenden Krystalle nur neben der negativen Kante (4. 1.) auf der Fläche 1, erstreckt sich hier bis zum oberen Rande und breitet sich auf jener Fläche so beträchtlich aus, dass nur am oberen Rande eine negative Region übrig bleibt. Das Fehlen der eigenthümlichen positiven Zone neben der negativen Kante (2. 3) dürfte durch die mangelhafte Ausbildung der Kante (2. 3) veranlasst werden.

Krystall No. 9.

Der Krystall No. 9 ist in Fig. 9 nur in seinen beiden Projectionen dargestellt; oberhalb und unterhalb sind aber ausserdem noch die Endflächen abgebildet. Er enthält dieselben Gestalten wie der vorher-

gehende; die Begrenzung am unteren Ende wird von einer ziemlich ebenen Durchgangsfläche gebildet. Auf der Fläche 2 findet sich, wie auch die Figur 9 zeigt, ein kleiner Krystall, in nahe paralleler Stellung mit dem grossen, eingewachsen; die übrigen Flächen, sowie die Kanten sind wohl erhalten. Ungefähr in der Mitte der Höhe ging fast durch den ganzen Krystall ein dem Hauptdurchgange paralleler Sprung.

Die elektrische Vertheilung, wie sie die Beobachtung auf den Flächen ergab, ist ohne Zahlen, blos durch die Farben in den beiden Projectionen angedeutet. Die eigenthümliche, positive Zone neben den makrodiagonalen Seitenkanten erscheint an diesem Krystalle zu beiden Seiten der Kante (4. 1). Neben der Kante (2. 3) zeigt sich dieselbe auf der Fläche 2, könnte hier aber auch durch den kleinen daselbst eingewachsenen Krystall hervorgerufen sein.

Der Krystall wurde später in dem oben angedeuteten Risse zersprengt; die Beobachtungen an den beiden Bruchstücken folgen weiter unten im V. Abschnitte (unter 1).

Krystall No. 10.

Der Krystall No. 10 ist Fig. 10 in seinen beiden Projectionen nebst beigefügten Endflächen abgebildet; er enthält dieselben Krystallformen, wie die beiden vorhergehenden. Sein unteres Ende ist schief und uneben verbrochen; auch ist die obere auf der Kante (2. 3) liegende Fläche von $2\breve{P}\infty$ mangelhaft ausgebildet.

Auch bei diesem Krystall ist die elektrische Vertheilung, wie sie auf den Flächen beobachtet wurde, nur durch Farben in die beiden Projectionen eingetragen. Die eigenthümliche, mehrfach erwähnte positive Zone neben den makrodiagonalen Seitenkanten erscheint nur deutlich auf der Fläche 4. Das obere Ende der brachydiagonalen Kante (3. 4) ergab sich bei specieller Prüfung negativ.

Ueber Beobachtungen nach dem Abschleifen der brachydiagonalen Kante (1. 2) s. den spätern Abschnitt V. (unter 6), sowie nach dem Absprengen des obersten Theiles denselben Abschnitt V (unter 2).

Krystall No. 11.

Der Krystall No. 11, dessen Projectionen und Endflächen Fig. 11 darstellt, zeigt ausser den an den beiden vorhergehenden genannten

Gestalten am oberen Ende der Kante (4. 1) noch eine Fläche von 4 P̆ ∞. Die Begrenzung des unteren Endes wird theilweise von einer Durchgangsfläche gebildet; die Kante (2. 3) ist in dem unteren Theile verletzt.

Die elektrische Vertheilung, wie sie auf den Flächen beobachtet worden, ergibt sich aus den in die beiden Projectionen und Enflächen eingetragenen Farben. Eine schwache Andeutung der eigenthümlichen positiven Zone zeigt sich auf der Fläche 1 neben der Kante (4. 1) in mittlerer Höhe. Die Kante (1. 2) erschien bei specieller Untersuchung nur in der unteren Hälfte positiv, in dem oberen Theile dagegen negativ; diese Vertheilung bestand auch nach dem im Folgenden erwähnten Abschleifen der Kante (3. 4) noch fort.

Weitere Beobachtungen an diesem Krystalle nach dem Abschleifen der brachydiagonalen Kante (3. 4) s. weiter unten im V. Abschnitte (unter 7).

Krystall No. 12.

Der Fig. 12 in seinen Projectionen und Endflächen abgebildete Krystall No. 12 besteht aus derselben Combination von Gestalten wie der vorhergehende. Sein unteres Ende ist uneben verbrochen; die Pyramidenflächen am oberen Ende der Fläche 2 sind verletzt.

Auch für diesen Krystall ist die auf den Flächen beobachtete elektrische Vertheilung nur durch Farben in den beiden Projectionen und Endflächen angedeutet. Die positive Zone an der Kante (1. 2) breitet sich durch die Mitte der Fläche 1 hin aus.

Weitere Beobachtungen an diesem Krystalle nach Abschleifen der brachydiagonalen Kante (1. 2) s. weiter unten im V. Abschnitte (unter 8) mitgetheilt.

Krystall No. 13.

Der Krystall No. 13 stellt die Combination ∞P, ∞P̆2; P, ½P; 2P̆∞, 4P̆∞ und 0P dar; am untern abgebrochnen Ende, mit dem er fest aufgewachsen gewesen, findet sich eine ungefähr 1^{mm} dicke undurchsichtige Schicht; die Kanten (1. 2) und (2. 3) sind in ihren unteren Hälften etwas verletzt. Fig. 13 *A* stellt seine beiden Projectionen, Fig. 13 *B* sein Netz in natürlicher Grösse dar.

Wie aus der Zeichnung hervorgeht sind die Pyramidenflächen grösser als bei den meisten übrigen sächsischen Topasen. Werden die grossen Pyramidenflächen P einzeln untersucht, d. h. ist der ganze Krystall bis auf eine der Fläche P in Kupferfeilicht gehüllt, so zeigen sie negative Polarität; ragen sie aber sämmtlich zugleich mit der Endfläche 0 P und den Flächen des Brachydomas $2\breve{P}\infty$ aus dem Kupferfeilicht hervor, so wird auf ihnen, ebenso wie auf den Flächen 0 P und $2\breve{P}\infty$, positive Spannung beobachtet.

Krystall No. 14.

Der in Fig. 14 in seinen Projectionen und Endflächen abgebildete, dem Werner-Museum in Freiberg unter No. 535 angehörige Krystall bietet die gewöhnliche Combination ∞P, $\infty\breve{P}2$, $\infty\breve{P}3$; P, $\frac{1}{2}P$; $\frac{1}{2}\breve{P}2$; $2\breve{P}\infty$ und 0 P dar, zeichnet sich aber dadurch aus, dass an seinem oberen Ende die Fläche 0 P fast den ganzen Querschnitt einnimmt; die an ihren Rändern liegenden gegen die Axe geneigten Flächen besitzen daher nur eine geringe Ausdehnung. Die Fläche 0 P am oberen Ende ist sehr schwachglänzend und sieht wie mit einer dünnen bräunlich weisslichen, einige Zehntel-Millimeter dicken Platte bedeckt aus; das untere Ende wird von einem Durchgange begrenzt. Die Flächen $\infty\breve{P}3$ zeigen den schon mehrfach erwähnten schwachen perlmutterartigen Glanz.

Die elektrische Vertheilung, wie sie die Beobachtung auf den Flächen gegeben, ist durch Farben in den Zeichnungen (Fig. 14) angedeutet. Die positive Elektricität der oberen matten Endfläche ist stark, und übertrifft an Intensität ungefähr 4 Mal die negative der unteren Durchgangsfläche.

Krystall No. 15.

Der gleichfalls dem Werner-Museum in Freiberg unter No. 535 angehörige Krystall No. 15, welcher Fig. 15 in seinen Projectionen und Endflächen abgebildet ist, glich dem vorhergehenden; doch betrug seine Länge in der Richtung der Hauptaxe nur ungefähr die Hälfte von der Länge des vorigen und war seine fast matte Endfläche am oberen Ende noch etwas grösser, die an ihren Rändern liegenden geneigten Flächen also noch schmäler als bei dem Krystalle No. 13.

Die elektrische Vertheilung ist nach den Beobachtungen auf den Flächen in die Zeichnungen (Fig. 15) eingetragen.

Krystall No. 16.

Das Netz des Krystalles No. 16 stellt Fig. 16 in vierfach linearer Vergrösserung dar.

Der Krystall ist nur ein Bruchstück, dessen Seitenflächen von den Gestalten ∞P und $\infty \breve{P} 2$ (letztere vorwaltend) gebildet, und dessen Enden von zwei gegen die Axe senkrechten Durchgangsflächen begrenzt werden. Dabei ist jedoch der Durchgang am oberen Ende sehr nahe an der Spitze des ausgebildet gewesenen Endes angeschlagen, wie aus dem Vorhandensein von Resten der Flächen $2\breve{P}\infty$ auf den Kanten (4. 1) und (2. 3) hervorgeht.

Die in das Netz Fig. 16 eingetragenen Beobachtungen zeigen, dass die elektrische Vertheilung auf den seitlichen Kanten und Flächen ziemlich regelmässig ist. Die untere Durchgangsfläche erscheint überall negativ; dagegen bietet die obere Durchgangsfläche ein eigenthümliches Verhalten dar, indem die nach der Kante (4. 1) und dem Quadranten 1 hin gelegene kleinere Hälfte der Fläche positiv *) ist, und zwar besitzt diese positive Polarität in der Nähe der Kante (4. 1) eine mehr als 6 mal grössere Intensität als die negative auf derselben Fläche und eine mehr als doppelt so starke als die höchste negative Spannung auf der unteren Fläche. Uebrigens liegt diese höchste negative Spannung auf der unteren Durchgangsfläche, ebenso wie die höchste positive auf dem oberen Ende, in der Nähe der Kante (4. 1); es scheint also hier der stärkste elektrische Gegensatz in einer seitlichen der Axe parallelen Linie ausgebildet zu sein. Weder auf der Oberfläche noch im Innern sind Anzeichen, welche auf die grössere Stärke der Elektricität in der Nähe der Kante (4. 1) hinweisen, ausser dass, wie aus den verbliebenen Resten hervorgeht, die Fläche von $2\breve{P}\infty$ auf der Kante (4. 1) etwas stärker entwickelt gewesen ist, als auf der Kante (2. 3). Auch zeigte die specielle Untersuchung der Kanten eine grössere negative Polarität auf der Kante (4. 1) als auf der Kante (2. 3), worauf schon zum Theil die in das Netz eingetragenen auf den Flächen gemachten Beobachtungen hinweisen.

Die Grenzen der positiven und negativen Zonen auf den Seitenflächen verlaufen bei diesem an beiden Enden von Durchgängen begrenzten

*) Dieselbe Erscheinung werden wir später im Abschnitte V. unter 2 an dem Krystalle No. 10 nach dem Absprengen des obersten Theiles wieder finden.

Bruchstücke etwas mehr parallel mit den Kanten als bei den an einem Ende ausgebildeten und am anderen Ende von einem Durchgange begrenzten Krystallen; die noch vorhandene Erweiterung der positiven Zonen nach abwärts hängt sehr wahrscheinlich mit dem Umstande zusammen, dass auf der oberen Durchgangsfläche sich noch Reste von positiver Elektricität finden.

Weitere Beobachtungen an diesem Krystalle nach dem Abschleifen der makrodiagonalen Kante 2. 3) s. weiter unten im V. Abschnitte (unter 6).

B. Sibirische Topase.

a. Topase aus dem Gebirgszuge Adun-Tschilon bei Nertschinsk.

Der Topas findet sich hier in einer quarzhaltigen Felsart, die von den Einwohnern Topasfels genannt wird und den Granit in Gängen durchsetzt. „Der Hauptbestandtheil dieser Gebirgsart ist ein graulich weisser, feinkörniger und klein krystallinischer Quarz, welcher mit kleinen Topaskrystallen vermengt vorkommt. Der Topasfels enthält an vielen Stellen unregelmässige Höhlungen, deren Wandungen mit Krystallen von Rauchtopas, Topas und Beryll bekleidet sind.“*)

Die Krystalle vom Adun-Tschilon besitzen im Allgemeinen keine grosse Durchsichtigkeit und sind meistens bläulich weiss, doch auch gelblich weiss und farblos. Ihre Gestalt ist wenig zusammengesetzt und fast bei allen übereinstimmend. Das verticale Prisma wird gewöhnlich von den Flächen $\infty \breve{P} 2$ gebildet, und erscheint an den brachydiagonalen Kanten durch schmale Flächen von ∞P zugeschärft, während auch an den makrodiagonalen Kanten öfter eine Zuschärfung durch die Flächen von $\infty \breve{P} 3$ eintritt. Die Enden des Prismas werden durch grosse Flächen des Brachydomas $2 \breve{P} \infty$ zugeschärft und an den beiden Eckpunkten der so entstandenen Schneide liegen die kleinen Flächen von P, bisweilen auch noch von $2 \bar{P} \infty$. Die verticalen Prismenflächen sind stets stark vertical gestreift.

a. Elektrisches Verhalten im Allgemeinen.

Die am Adun-Tschilon bei Nertschinsk gefundenen Krystalle stimmen in ihrem elektrischen Verhalten mit den sächsischen Topasen über-

*) v. Kokscharow, Materialien 1. B. S. 165.

ein: es ist also die am Ende der Hauptaxe von den Flächen des Brachydomas $2\breve{P}\infty$ gebildete Schneide sammt dem grössten Theile dieser Flächen positiv, während die an die makrodiagonalen Seitenkanten grenzenden Stücke der genannten Flächen an der negativen Elektricität dieser Kanten theilnehmen. Eine mangelhafte Ausbildung des Endes der Hauptaxe mindert daselbst die Stärke der positiven Polarität. Wird an dem unteren, aufgewachsen gewesenen Ende eine Durchgangsfläche angeschlagen, so zeigt diese in ihrer ganzen Ausdehnung negative Elektricität; wird dagegen die Schneide des oberen Endes nahe unter demselben in einem Durchgange abgesprengt, so erscheinen auf der so gebildeten oberen Begrenzung des unteren Stückes noch positive Stellen, während die entsprechende untere Fläche des oberen Stückes überall negative Polarität darbietet (s. den Abschnitt V, 5). Wie bei den sächsischen Krystallen sind ferner die makrodiagonalen Seitenkanten negativ, die brachydiagonalen positiv, und nehmen die benachbarten Flächenstücke an der Polarität der nächsten Kanten theil. Verletzungen oder mangelhafte Ausbildungen der Seitenflächen rufen an Stellen, wo bei vollkommener Gestaltung positive Elektricität auftreten würde, ebenso wie bei den sächsischen Topasen, negative Polarität hervor.

Die elektrische Erregung erreicht auf den Adun-Tschiloner Krystallen oft eine sehr beträchtliche Stärke und übertrifft im Durchschnitte die an den sächsischen Topasen beobachtete.

b. Beobachtungen.

Krystall No. 17.

Der dem Berliner Museum gehörige Krystall No. 17, welchen Fig. 17 *A* und 17 *B* in natürlichen Dimensionen darstellen, ist nicht ringsum frei ausgebildet gewesen, sondern hat mit der Kante (2. 3), mit einem Theile der Fläche 3, sowie mit der an diese Fläche grenzenden Stelle des unteren Endes angelegen und erscheint daselbst verbrochen. Vollständig ausgebildet ist die Fläche 1, ziemlich vollständig vorhanden sind die Flächen 4 und 2, während die Fläche 3 in ihrer Bildung stärker behindert gewesen ist. Die Masse des Krystalles erscheint im Allgemeinen, wenn auch rissig, doch durchsichtig; nur finden sich an den Stellen, wo die drei vorhandenen Flächen des Brachydomas $2\breve{P}\infty$ auftreten, ungefähr 1^{mm} dicke milchichtweisse undurchsichtige

Platten in den Zeichnungen durch die mit den Kanten parallelen Linien a angedeutet aufgelegt: die Oberflächen dieser Platten also die Flächen $2\breve{P}\infty$ sind glänzend, wenn auch nicht eben.

Abweichungen von einer ganz regelmässigen Vertheilung der elektrischen Polaritäten sind eine Folge der Anwachsung, die vorzugsweise mit der Stelle stattgefunden zu haben scheint, wo am unteren Ende auf der Kante (2. 3) die Fläche von $2\breve{P}\infty$ hätte auftreten sollen. Diese Anwachsung bedingt die negative Beschaffenheit der zuletzt bezeichneten Bruchfläche, die Schwächung der positiven Elektricität am unteren und die Verstärkung derselben Polarität am oberen Ende, sowie die vergrösserte Ausbreitung der negativen Elektricität auf den oberen Theilen der Prismenflächen, welche soweit geht, dass selbst bei specieller Untersuchung, wie Fig. 17 *A* zeigt, die Kante (1. 2) im obersten Drittel, und die Kante (3. 4) im obersten Achtel noch negativ gefunden werden.

Krystall No. 18.

Der dem Halle'schen Museum entlehnte Krystall No. 18 stammt seinem Ansehen nach unzweifelhaft vom Adun-Tschilon. Fig. 18 stellt sein Netz in natürlicher Grösse dar. Am oberen Ende ist er vollkommen ausgebildet; am unteren dagegen zeigt er eine drusige unebene Fläche, die wohl theilweise angelegen und angesessen hat; wenigstens finden sich in der Nähe der Kante (2. 3) kleine durch Abbrechen blossgelegte Durchgangsflächen. Auf der Fläche 1 ist von der Mitte abwärts und nach der Kante (4. 1) hin ein zweites Topasindividuum in schräger Lage eingewachsen, wodurch die genannte Kante in ihrer Ausbildung gehindert gewesen ist.

Seitlich wird der Krystall fast allein begrenzt von stark gestreiften Flächen des verticalen Prismas $\infty\breve{P}2$, indem die Flächen des Prismas ∞P nur äusserst schmal sind oder auch ganz fehlen. Am oberen Ende finden sich grosse wenig glänzende, wie mit einem Firniss überzogene Flächen des Brachydomas $2\breve{P}\infty$, nebst kleinen Flächen der Pyramide P. Ausserdem zeigt sich einige Linien unterhalb des oberen Endes der Kante (4. 1), da wo das Hineinwachsen des oben erwähnten zweiten Individuums beginnt (bei γ Fig. 18) noch eine untere Fläche von $2\breve{P}\infty$.

Ungefähr in der Höhe des unteren Endes der auf der Kante (4. 1) liegenden Fläche von $2\breve{P}\infty$ geht durch den Krystall senkrecht gegen die Axe, also in der Richtung des Durchgangs, ein in Fig. 18 durch die

punktirte Linie $\alpha\beta$ angedeuteter Sprung, der jedoch die äusseren Begrenzungen nur auf der Fläche 1 und stellenweise auf den Flächen 2 und 4 erreicht. Dicht unterhalb dieses Sprunges liegt innerhalb einer durchsichtigen Hülle von einigen Millimetern Dicke eine der äusseren Begrenzung entsprechende undurchsichtige porös erscheinende Krystallmasse.

In Fig. 18 sind die auf den Flächen ausgeführten Messungen eingetragen. Die untere drusige Endfläche ist noch grösstentheils positiv; dass sie eine viel geringere positive Intensität besitzt, als das obere Ende, ist eben Folge ihrer mangelhaften Ausbildung. Bei specieller Prüfung ergaben sich die beiden makrodiagonalen Kanten ihrer ganzen Länge nach negativ, und hätte man bei der Untersuchung der Flächen 2 und 4 die stark positiven linken Hälften und Mitten derselben mit Eisenfeilicht bedeckt und nur die am rechten Rande liegenden Theile frei gelassen, so würde auf ihnen im ganzen Verlaufe neben den Kanten (2. 3) und (4. 1) negative Elektricität beobachtet worden sein; die in das Netz an diesen Stellen eingetragenen positiven Elektricitäten sind nur eine Seitenwirkung der sehr starken, positiven Erregung in der Mitte der genannten Flächen.

Krystall No. 19.

Der Krystall No. 19 ist schon in meiner Abhandlung in *Pogg. Annal.* Bd. 54 S. 42 beschrieben worden; seinem ganzen Ansehen nach muss er vom Adun-Tschilon stammen; Fig. 19 stellt sein Netz in natürlichen Dimensionen dar. Sein unteres Ende wird von einer Durchgangsfläche gebildet. Die Kante (2. 3) ist verletzt; ausserdem finden sich Verletzungen unten auf den Flächen 1, 2 und 3, wie dies in dem Netze Fig. 19 angedeutet ist.

Die untere Durchgangsfläche zeigt an den beiden brachydiagonalen Kanten zwei Minima der negativen Polarität.

Krystall No. 20.

Der grosse Krystall No. 20, welcher der Sammlung des Herrn Sack in Halle angehört, ist Fig. 20 *A* und *B* in seinen beiden Projectionen gezeichnet worden. Fig. 20 *C* stellt die untere Durchgangsfläche dar. In diese Projectionen sind die auf den Flächen beobachteten Elektricitäten eingetragen.

Der Krystall No. 20 hat mit der ganzen Seitenfläche 3 und wahrscheinlich auch mit seinem unteren Ende angelegen. Die Fläche 3 ist uneben; am unteren Ende ist er von ziemlich in einer Ebene liegenden Durchgangsflächen begrenzt. Die grossen ausgebildeten Krystallflächen gehören den Gestalten $\infty \breve{P} 2$ und $2 \breve{P} \infty$ an; neben der makrodiagonalen Kante (4. 1) findet sich eine schmale Fläche von $\infty \breve{P} 3$, und neben der brachydiagonalen Kante (1. 2) Spuren von ∞P.

Während die Hauptmasse des Krystalles grünlich und etwas unrein erscheint, wird die Substanz nach dem unteren Ende der Kante (2. 3) hin durch Imprägnation auf Oberfläche und Spaltungsklüften mit Eisenoxydhydrat braun und undurchsichtig.

Krystall No. 21.

Der Krystall Nr. 21 ist Fig. 21 in seinen beiden Projectionen gezeichnet worden; er stellt eine Combination der Gestalten ∞P, $\infty \breve{P} 2$, $2 \breve{P} \infty$ und P dar. Von den Seitenflächen sind nur die beiden Flächen 1 und 2 ziemlich ausgebildet, während die Flächen 3 und 4 nebst der unteren Endfläche in ihrer Entwickelung durch das umliegende Gestein gehindert gewesen. Vorzugsweise am Gestein angesessen hat der Krystall mit der unteren Endfläche und mit einer grossen fast ebenen schief von unten nach oben gehenden Fläche β; diese Fläche, sowie die untere Endfläche und einzelne Theile der Eindrücke auf der nicht ausgebildeten Fläche 3 sind mit einer gelblich weisslichen Substanz bedeckt. Die Masse des Krystalles ist im Allgemeinen durchsichtig, jedoch mit vielen Sprüngen im Innern.

In die gezeichneten Projectionen sind, ebenso wie beim vorhergehenden Krystalle, die auf den Flächen beobachteten elektrischen Spannungen eingetragen worden.

β. Topase aus dem Borschtschowotschnoi-Gebirgszuge.

Der Borschtschowotschnoi-Gebirgszug liegt ebenfalls im Gebiete von Nertschinsk; der Topas findet sich an vielen Localitäten dieser Bergkette, jedoch hauptsächlich in der Umgegend des Flusses Urulga; ausserdem wird er noch in den Bergen Semenowskaia und Kibirewskaia angetroffen.

a. Elektrisches Verhalten im Allgemeinen.

Die Topase aus dem Borschtschowotschnoi-Gebirgszuge bieten im Allgemeinen dasselbe Verhalten wie die sächsischen und Adun-Tschiloner Krystalle dar, d. h. am oberen Ende zeigt die Endfläche oder die daselbst befindliche Kante positive Spannung *), am unteren Ende dagegen erscheint auf der drusigen oder aus zahlreichen Spitzen gebildeten natürlichen Begrenzung und ebenso auf einem daselbst angeschlagenen Durchgange negative Elektricität. Doch ist die Intensität der positiven Polarität am oberen Ende bei den aus dem Borschtschowotschnoi-Gebirgszuge stammenden Krystallen geringer als bei den sächsischen Topasen, während die auf den Flächen der Pyramide P auftretende negative Elektricität eine grössere Stärke zeigt. Da nun auch die Flächen des Brachydomas $\frac{1}{4}\breve{P}\infty$ in ziemlicher Ausdehnung vorhanden sind und gleichfalls negative Elektricität besitzen, so ist leicht erklärlich, dass die Endfläche 0P, wenn sie zugleich mit den umgebenden geneigten Flächen aus dem Metallfeilicht herausragt, infolge der ringsum befindlichen negativen Polarität negativ zu sein scheint; um sie als positiv zu erkennen, müssen die geneigten Flächen bedeckt und ihre negativen Spannungen abgeleitet werden.

Während die Flächen der Pyramide P negative Polarität besitzen, theilen die Flächen der spitzeren Pyramide 2P mehr den Charakter der an sie grenzenden positiven Seitenflächen.

Die makrodiagonalen Seitenkanten sind negativ, die brachydiagonalen positiv, doch kommt bei letzteren schon (Krystall No. 22) die bei brasilianischen Krystallen häufige Erscheinung vor, dass neben einer brachydiagonalen Kante sich von oben her eine negative Zone abwärts zieht, und auch die betreffende Kante in ihrem oberen Theile an dieser Polarität theil nimmt.

b. Beobachtungen.

Krystall No. 22.

Der Krystall No. 22 gehört dem Berliner Museum und stammt von der Urulga; Fig. 22 stellt sein Netz in natürlicher Grösse dar.

*) An beiden Enden vollkommene, d. h. mit gegen die Axe geneigten ebenen Flächen versehene Krystalle dieses Fundortes standen mir nicht zu Gebote; denn beim Krystall No. 23 ist das untere Ende von einer mangelhaft gebildeten Endfläche begrenzt, und beim Krystall No. 25 läuft es in zahlreiche Spitzen aus.

Der fast wasserhelle, nur einen Anflug ins Rauchgraue zeigende Krystall wird begrenzt von den Flächen der Gestalten ∞P, $\infty \breve{P}2$; $\frac{1}{2}P$, P, $2P$; $2\breve{P}\infty$, $4\breve{P}\infty$; $2\bar{P}\infty$ und $0P$.

Die obere Endfläche $0P$ zeigt einen Glasglanz, als wäre sie geflossen. Das untere Ende ist in der Mitte ungefähr in der Richtung von der Kante (4. 1) zur Kante (2. 3), von einer ziemlich ebenen Fig. 22 unterhalb der Kante (4. 1) gezeichneten Fläche, die nicht wie eine Durchgangsfläche aussieht, begrenzt. An dieselbe schliessen sich zu beiden Seiten nach den Kanten (1. 2) und (3. 4) hin, die in Fig. 22 mit *a* und *b* bezeichneten Bruchflächen. Im zweiten Quadranten erscheint die daselbst liegende Prismenfläche ∞P in ihren unteren zwei Dritteln durch kleine Gruben rauh.

Die auf den Flächen beobachtete elektrische Vertheilung ist in das Fig. 22 gezeichnete Netz eingetragen. Als eigenthümlich hervorzuheben ist die negative Zone, welche sich auf der Fläche 2 neben der brachydiagonalen Kante (1. 2) von oben nach unten zieht; eine Erscheinung, der wir später bei den brasilianischen Topasen vielfach begegnen werden. Bei specieller Untersuchung zeigte sich die Kante (1. 2) in ihrer oberen Hälfte negativ, in der unteren aber unelektrisch.

Krystall No. 23.

Der Krystall No. 23, der mineralogischen Sammlung der hiesigen Universität gehörig, ist Fig. 23 in seinen Projectionen und Endflächen abgebildet; er stellt eine Combination von ∞P, $\infty \breve{P}2$, $\infty \breve{P}3$; $\frac{1}{2}P$, P; $2\breve{P}\infty$, $4\breve{P}\infty$ und $0P$ dar. Sein unteres Ende scheint nicht von einer Durchgangs-, sondern von einer matten, zum Theil ziemlich gut ausgebildeten Endfläche $0P$ begrenzt zu sein, die aber jedenfalls angelegen hat und dadurch in ihrer Entwickelung gehemmt worden ist; auch finden sich am unteren Ende der Kante (4. 1) die Flächen von $2\breve{P}\infty$ und $4\breve{P}\infty$. Das untere Ende der Kante (2. 3) ist unvollkommen ausgebildet.

Die Masse des Krystalles ist nicht ganz klar und durchsichtig; die Pyramidenflächen tragen kurze horizontale, die Flächen des Brachydomas $2\breve{P}\infty$ kurze, dem makrodiagonalen Hauptschnitte parallele Furchen.

In die Projectionen (Fig. 23) sind die auf den Flächen beobachteten elektrischen Vertheilungen eingetragen worden.

Krystall No. 24.

Dieser dem Museum der Universität Halle gehörige Krystall war als aus der Gegend von Nertschinsk stammend bezeichnet; seinem ganzen Ansehen nach gehört er nicht dem Adun-Tschilon, sondern dem Borschtschowotschnoi-Gebirgszuge an. Fig. 24 stellt sein Netz in den natürlichen Dimensionen dar.

Der Krystall ist farblos und im Allgemeinen sehr rein und klar; doch finden sich im Innern zerstreut äusserst kleine weissliche Theilchen, wie feiner Schnee. Er wird begrenzt von den Flächen der Gestalten: ∞P, $\infty P2$; $\frac{1}{2}P$, P, $2P$; $2\breve{P}\infty$, $4\breve{P}\infty$; $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$, $2\bar{P}\infty$ und $0P$. Ausserdem findet sich auf der Seitenfläche des ersten Quadranten (in der obersten Spitze derselben) noch die Fläche einer sehr spitzen Brachypyramide.

Der Krystall ist nur an seinem oberen Ende ausgebildet, am unteren dagegen von einer Durchgangsfläche und einer gegen die Kante (4. 1) hin geneigten Bruchfläche (*a* in Fig. 24) begrenzt, so dass von der Kante (4. 1) nur ein ungefähr 1^{mm} langes Stück am oberen Ende unversehrt geblieben ist. Die obere Endfläche $0P$ erscheint nur sehr schwach glänzend. Die gegen die Axe geneigten Flächen sind im Allgemeinen glänzend (besonders die grossen Flächen von $2P$); die stumpferen Pyramiden zeigen kurze horizontale Furchen; die Flächen der horizontalen makrodiagonalen Prismen dagegen sind parallel dem brachydiagonalen Hauptschnitte gefurcht, und es verlaufen die Furchen am oberen Ende der Flächen $2\bar{P}\infty$ bogenförmig in die Flächen von P.

Der Krystall No. 24 zeichnet sich im Gegensatze zu den sächsischen und Adun-Tschiloner Topasen besonders aus durch die beträchtliche Ausdehnung der Flächen der Pyramide $2P$ und des Brachydomas $4\breve{P}\infty$, wozu noch das Auftreten von Makrodomen kommt. Auch zeigen die Flächen ∞P bei ihm eine stärkere Entwickelung, als bei den Krystallen der vorhergehenden beiden Abtheilungen.

Die auf den Flächen beobachteten Werthe der elektrischen Spannungen sind in das Netz eingetragen worden.

Krystall No. 25.

Der schöne dem Berliner Museum gehörige Krystall No. 25 stammt ebenfalls von der Urulga. Fig. 25 zeigt seine beiden Projectionen in natürlicher Grösse. Er ist wasserhell und vollkommen durchsichtig, bis auf eine kurze Reihe äusserst kleiner Bläschen.

Seine Seitenflächen werden fast allein von dem Prisma ∞P gebildet, indem die Flächen des Prismas $\infty \breve{P}2$ äusserst schmal auftreten. An seinem oberen Ende sind als Ebenen ausgebildet die Flächen von $4P\infty$ und der anliegende Theil der Fläche $2\breve{P}\infty$ auf der Kante (4. 1), sowie eine kleine rechts oben an dieser Kante liegende Fläche von einer Brachypyramide mit 4facher Hauptaxe. Der übrige Theil dieses oberen Endes ist rundlich verflossen und erhebt sich zu einer dachförmigen, zwischen den brachydiagonalen Seitenkanten (1. 2) und (3. 4) gelegenen Kante; dabei zeigen die beiden rundlichen, in der Mitte ungefähr mit den Flächen von $\frac{1}{3}P\infty$ parallel gehenden und an den seitlichen Rändern die Pyramiden $\frac{1}{3}\breve{P}2$ und $\frac{1}{3}P$ vertretenden Flächen Furchen und scheinbar über einander liegende Blättchen, wie wir dies später bei den brasilianischen Krystallen finden werden. Die Furchen scheinen den Durchschnittskanten von $2\breve{P}\infty$ mit $\frac{1}{3}P$ zu entsprechen. Das untere Ende des Krystalles ist mit Ausnahme einer kleinen Stelle in der Nähe der Kante (2. 3) nicht verbrochen, sondern zeigt eine sehr unebene, höckerige, aus zahlreichen Endspitzen gebildete Fläche.

Die elektrische Erregung des vorliegenden Krystalles ist nicht stark, stimmt aber mit dem allgemeinen Gesetze überein. In Fig. 25 sind die Beobachtungen auf den Kanten eingetragen. Die obere rundliche Polkante ist positiv, das untere Ende aber sehr schwach negativ.

Krystall No. 26.

Der jedenfalls aus dem Borschtschowotschnoi-Gebirgszuge stammende Krystall No. 26, welcher dem Museum der Marburger Universität gehört, ist in seiner Masse vollkommen rein und wasserhell. Fig. 26 stellt seine beiden Projectionen dar. Die verticalen Seitenflächen werden von den Prismen ∞P und $\infty \breve{P}2$ gebildet. Von Pyramidenflächen erscheinen am oberen Ende die Flächen $2P$, und im 4. Quadranten eine schmale Abstumpfungsfläche auf der Durchschnittskante von $2P$ und $\infty \breve{P}2$, sowie im 1. und 4. Quadranten zwei kleine einer Brachypyramide angehörende Abstumpfungsflächen auf der Kante von $4\breve{P}\infty$ und und $\infty \breve{P}2$ (oben an der Kante 4. 1), die gegen die Fläche von $4\breve{P}\infty$ einen viel stumpferen Winkel bilden als gegen die Flächen von $\infty \breve{P}2$. Die Flächen der Brachy- und Makrodomen sind rundlich verflossen und zeigen eine Menge kleiner Krystallköpfe, mit Ausnahme der schon zuvor

erwähnten kleinen Fläche von $\frac{1}{4}P\infty$ auf der Kante $\frac{1}{4}.1$, die glänzend und eben erscheint. Das untere Ende des Krystalles ist sehr unregelmässig verbrochen, und zeigt nur an der untersten Spitze eine kleine Durchgangsfläche.

Die elektrische Erregung dieses Krystalles ist im Allgemeinen schwach, und gleicht der des vorhergehenden. In Fig. 26 sind die auf den Kanten ausgeführten Beobachtungen dargestellt.

C. Topase aus dem Ural.

a. Topase aus dem Ilmengebirge.

Der Topas kommt im Ilmengebirge auf der Ostseite des Ilmensees, in der Umgegend der Hütte Miask zusammen mit grünem Feldspath, Chiolith, schönen Phenakitkrystallen und schwarzem zweiaxigen Glimmer im Granit vor; er erscheint daselbst in zwei Varietäten: die eine zeichnet sich durch ihre Farblosigkeit, oft durch grosse Durchsichtigkeit, ihren Flächenreichthum und vollständige Ausbildung aus. Die Krystalle der zweiten Art sind dagegen voller Risse, so dass oft ein Druck zwischen den Fingern hinreicht, sie zu zersplittern; sie besitzen eine schmutzig gelblich weisse Farbe, sind meistens nur an den Kanten durchscheinend und bestehen aus sehr einfachen Combinationen.

Die im Folgenden untersuchten Krystalle gehören zu der erstgenannten Varietät. Diese durchsichtigen Krystalle kommen auf dem grünen Feldspath aufgewachsen vor; häufig aber trifft man sie in einem weisslichen oder gelblichen Thone, der sich hier auf Drusenräumen findet und nicht selten Feldspathstücke enthält. In diesem Falle sind die Krystalle gewöhnlich an einem Ende abgebrochen; doch findet man, obwohl selten, auch an beiden Enden gut ausgebildete Krystalle.*)

a. Elektrisches Verhalten im Allgemeinen.

Trägt das vollkommen ausgebildete Ende der Hauptaxe noch eine kleine Fläche 0P, so ist dieselbe positiv; läuft es in eine Kante aus, so ist auf dieser keine Elektricität wahrzunehmen. Die gegen die Axe geneigten Flächen erscheinen zum grössten Theile negativ. Die am unteren Ende vorhandene drusige Fläche oder die daselbst angeschlagene Durch-

*) v. Kokscharow, Materialien u. s. w. Bd. 2. S. 217.

gangs- oder Bruchfläche zeigt negative Polarität; doch kommen auf ihr nach den brachydiagonalen Kanten hin auch positive Stellen vor, wie solche ebenfalls bei den brasilianischen und kleinasiatischen Topasen gefunden werden. Die Seitenkanten und prismatischen Seitenflächen verhalten sich im Allgemeinen ähnlich wie bei den zuvor behandelten Krystallen.

b. Beobachtungen.

Krystall No. 27.

Der Krystall No. 27 gehört den Freiberger Sammlungen (der geographischen Sammlung); er ist ringsum ausgebildet, nur an der unteren Spitze findet sich eine kleine, nahe eine Quadratlinie grosse Durchgangsfläche. Wahrscheinlich hat der Krystall mit dieser Spitze auf dem Feldspath aufgesessen und ist abgebrochen worden.

Der Krystall stellt eine Combination folgender Gestalten dar: ∞P, $\infty \breve{P}2$, $\infty \breve{P}\infty$; $\frac{1}{2}P$, P, $2P$; $\frac{1}{4}\breve{P}\infty$, $2\breve{P}\infty$, $4\breve{P}\infty$; $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ und $2\bar{P}\infty$. Fig. 27 zeigt sein Netz in doppelt linearen Dimensionen.

Am oberen Ende ist die auf der Kante (4. 1) aufsitzende Fläche von $\frac{1}{4}\breve{P}\infty$ sehr gross und die Fläche von $2\breve{P}\infty$ sehr klein; auf der Kante (2. 3) dagegen ist die letztere Fläche mehr als doppelt so gross, als die erstere. Die Flächen $4\breve{P}\infty$ sind an diesem Ende nicht sichtbar. Von den Flächen der Pyramiden, die hier alle drei erscheinen, besitzen die Flächen $2P$ die grösste Ausdehnung, sind aber immer noch beträchtlich kleiner als am unteren Ende.

Am unteren Ende ist die kurze Schneide, in welcher die Flächen des Brachydomas $2\breve{P}\infty$ zusammenstossen würden, abgebrochen, und die in Fig. 27 mit $0P$ bezeichnete unterste Fläche wird daher, wie schon oben erwähnt, von einem Durchgange gebildet. Unter den Pyramiden treten vorzugsweise die Flächen von $2P$ hervor; nur im 2. und 4. Quadranten erscheinen auch kleine Flächen von P; ob die Flächen von $\frac{1}{2}P$ vorhanden gewesen sind, lässt sich wegen des verbrochenen Endes nicht entscheiden. Die Zuschärfung dieses Endes wird von den Flächen $2\breve{P}\infty$ gebildet; waren die Flächen $\frac{1}{4}\breve{P}\infty$ ursprünglich vorhanden, so sind sie durch den Bruch entfernt. Dagegen treten hier auf beiden makrodiagonalen Kanten die Flächen von $4\breve{P}\infty$ auf, die am oberen Ende fehlen, und die Flächen von $2\bar{P}\infty$ erhalten eine nicht unbeträchtliche Grösse; die Flächen von $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ sind nicht sichtbar.

Endlich zeigt sich unten auf der Kante (2. 3) ein Stück der Fläche von $\infty \breve{P} \infty$.*)

Wollte man beim Topas durchaus eine nach der Hauptaxe hemimorphische Bildung haben, so würde der vorliegende Krystall einer solchen Ansicht zur Stütze dienen können; der ganze Habitus des oberen Endes ist von dem des unteren gar sehr verschieden: während das obere Ende mehr den Eindruck des Niedergedrückten oder Stumpfen macht, erscheint das untere Ende gestreckter und spitziger. Ich habe mich indess schon oben S. 372 gegen die Annahme eines Hemimorphismus beim Topas erklärt, und die elektrische Vertheilung legt Zeugniss dafür ab, dass wir es auch bei diesem Krystalle nur mit zufälligen Verschiedenheiten in der Ausbildung der einzelnen Gestalten zu thun haben.

Die auf den Flächen beobachteten Spannungen sind in das Netz (Fig. 27) eingetragen. Ragt die von den Flächen $\frac{1}{3} \breve{P} \infty$ am oberen Ende gebildete Schneide allein aus dem Metallfeilicht hervor, so zeigt sie keine Elektricität; sind dagegen gleichzeitig die gegen die Axe geneigten Flächen von Metallfeilicht frei, so gibt das Elektrometer bei Annäherung des Platindrahtes an jene Schneide durch Vertheilungswirkung seitens der negativen Spannungen auf den umgebenden geneigten Flächen einen schwach negativen Ausschlag.

Krystall No. 28.

Der farblose, dem Berliner Museum gehörige Krystall No. 28 ist an beiden Enden ausgebildet, dagegen erscheinen die Flächen 2 und 3, mit denen er angesessen hat, verletzt. Fig. 28 stellt die eine Projection in natürlicher Grösse dar; ober- und unterhalb derselben finden sich die Endflächen 0P verzeichnet. Er wird begrenzt von den Flächen der folgenden Gestalten: ∞P, $\infty \breve{P} 2$, $\infty \breve{P} \infty$; $\frac{1}{3} \dot{P}$, P, 2P; $\frac{1}{3} \breve{P} 3$, $\frac{1}{3} \breve{P} 2$; $\frac{1}{4} \breve{P} \infty$, $2 \breve{P} \infty$, $4 \breve{P} \infty$; $\frac{1}{10} \bar{P} \frac{1}{4}$, $\frac{1}{3} \bar{P} \infty$, $2 \bar{P} \infty$ und 0P.

In der Fig. 28 sind die auf den Endflächen und den beiden Kanten (3. 4) und (4. 1) beobachteten elektrischen Spannungen durch Farben dargestellt.

---

*) Die Beschränkung dieser Fläche auf eine sehr kleine Stelle ist durch Anliegen des Krystalles an einem fremden Körper hervorgerufen; oberhalb der kleinen an diesem fremden Körper angelegen habenden Stelle ist die Kante (4. 1) vollkommen scharf, nur unterhalb zeigt sich die ziemlich breite Fläche von $\infty \breve{P} \infty$.

Krystall No. 29.

Der wasserhelle, gleichfalls dem Berliner Museum gehörige Krystall No. 29 ist Fig. 29 in einer Projection dargestellt. Die beiden Enden seiner Hauptaxe sind ausgebildet, dagegen zeigen sich die beiden hinteren nicht gezeichneten Flächen verbrochen. Er ist eine Combination folgender Gestalten: ∞P, $\infty \breve{P} 2$, $\infty \breve{P} \infty$; P, $2P$; $\frac{1}{3} \breve{P} \infty$, $2 \breve{P} \infty$, $4 \breve{P} \infty$, $8 \breve{P} \infty$; $2 \bar{P} \infty$ und $0P$ letztere Fläche am oberen Ende über die Projection gezeichnet.

Die in Fig. 29 eingetragenen Farben zeigen die auf den untersuchten Kanten und Endflächen gefundene elektrische Vertheilung an. Das untere Ende erscheint unelektrisch, das obere aber, wie auch die Zeichnung ergibt, schwach positiv in der Mitte der schmalen Endfläche + 0,3 Skth.

Krystall No. 30.

Der dem hiesigen mineralogischen Museum gehörige, klare und wasserhelle Krystall No. 30 stammt von Miask und ist in Fig. 30 in seinen Projectionen nebst der unteren Grenzfläche dargestellt. Die Fläche 2 und ein Theil der Fläche 3 sind nicht ausgebildet; die vorhandenen Seitenflächen zeigen die Gestalten ∞P, $\infty \breve{P} 2$, $\infty \breve{P} 3$, $\infty \breve{P} \infty$. Das untere Ende ist gänzlich verbrochen; dagegen erscheinen am oberen Ende ziemlich ausgedehnte Flächen der Pyramiden $\frac{1}{2} P$, P, $2P$, sowie der horizontalen Prismen $4 \breve{P} \infty$, $2 \breve{P} \infty$, $\frac{1}{2} \breve{P} \infty$, von denen die beiden letzteren rundlich in einander verlaufen, und $2 \bar{P} \infty$. Doch ist auch dieses Ende an seiner Spitze nach der Kante (4. 1) hin wenig, aber stärker nach der Fläche 3 hin verbrochen.

Das obere Ende dieses Krystalles erscheint, ebenso wie beim vorhergehenden positiv (auf der Pyramidenfläche 1 bis zu einem Ausschlage von 2,0 Skth.), während das untere negative Polarität darbietet. Die ausgebildeten Prismenflächen zeigen im Allgemeinen die gewöhnliche Vertheilung der beiden Elektricitäten; nur zieht sich auf der Fläche 4 neben der Kante (3. 4) von oben her eine negative Zone hinab, die auch die Kante (3. 4) in ihrem oberen Theile negativ macht.

Krystall No. 31.

Der dem hiesigen mineralogischen Museum gehörige von Miask stammende Krystall No. 31 ist zwar farblos, aber weniger klar als die

vorhergehenden. Seine von den Flächen ∞P, $\infty \breve{P}\frac{1}{2}$ und $\infty \breve{P}2$ gebildeten Seitenflächen sind besonders in der Nähe der makrodiagonalen Kanten sehr verletzt. Am oberen Ende der Hauptaxe erscheinen die Flächen $4\breve{P}\infty$ und $2P$ als Ebenen; letztere beginnen aber nach oben hin, übergehend in $\frac{1}{4}\breve{P}\infty$, rundlich zu verlaufen; ebenso rundlich verlaufen die daselbst vorhandenen Pyramidenflächen. Das untere Ende zeigt eine etwas wurzelförmige drusige Endfläche. Fig. 31 stellt die beiden Projectionen des Krystalles dar.

Die durch das Zusammentreffen der rundlich verlaufenden Flächen $\frac{1}{4}\breve{P}\infty$ am oberen Ende gebildete abgerundete Kante zeigt sich in der Mitte und an dem nach der Seitenkante (3. 4) hin gelegenen Theile positiv. Die untere Endfläche ist in ihrem grösseren Theile ziemlich stark negativ; nur auf dem nach der brachydiagonalen Kante (3. 4) hin gelegenen Stücke zeigt sie eine stark positive Elektricität. Auf den Seitenflächen erscheint, soweit es sich beobachten lässt, im Allgemeinen die gewöhnliche Vertheilung der Elektricität, jedoch ist die Kante (3. 4) in ihren oberen Theilen negativ elektrisch; wie überhaupt die negative Elektricität in den oberen, die positive aber in den unteren Theilen der Prismenflächen sich etwas weiter ausdehnt.

Krystall No. 32.

Der von Miask stammende Krystall No. 32, welchen Fig. 32 in seinen Projectionen darstellt, gehört dem hiesigen mineralogischen Museum. Er stellt eine Combination von ∞P, $\infty \breve{P}2$; $\frac{1}{2}P$, P, $2P$; $2\breve{P}\infty$ und $0P$ dar. Die obere Endfläche $0P$ ist nur klein; die Begrenzungsfläche am unteren Ende ist zur Hälfte sehr uneben und mangelhaft ausgebildet, zur anderen Hälfte Durchgang. Von den Seitenflächen ist nur die Fläche 1 und zum Theil auch die Fläche 2 ausgebildet.

In den Projectionen sind die auf den Flächen gemachten Beobachtungen dargestellt.

Krystall No. 33.

Der in Fig. 33 in beiden Projectionen abgebildete Krystall No. 33 stammt von Miask und gehört gleichfalls dem hiesigen mineralogischen Museum. Er ist eine Combination der Gestalten: ∞P, $\infty \breve{P}\frac{1}{2}$, $\infty \breve{P}2$, $\infty \breve{P}3$, $\infty \breve{P}\infty$; $\frac{1}{2}P$, P, $2P$; $\frac{1}{2}\breve{P}\infty$, $2\breve{P}\infty$, $4\breve{P}\infty$; $2\bar{P}\infty$ und $0P$. Das obere Ende ist nach der Fläche 2 hin verbrochen, sodass von der End-

fläche 0 P nur ein sehr kleiner Theil übrig geblieben; das untere Ende wird von Durchgangsflächen begrenzt, doch finden sich daselbst noch Theile der Flächen 2 P, 4 P̆∞ und 2 P̄∞. Seine Masse ist, wie gewöhnlich bei den Krystallen des genannten Fundortes, wasserhell, wenn auch nicht ganz klar.

Die auf den Flächen beobachteten elektrischen Spannungen sind in den Projectionen abgebildet; besonders stark ist die negative Elektricität auf der ziemlich grossen Fläche ∞ P̆∞, welche die Kante 2. 3 abstumpft.

β. *Topase aus der Umgegend von Katharinenburg.*

Der Topas kommt hier bei dem Dorfe Alabaschka unweit Mursinka auf Drusenräumen im Granit vor; die von der Grösse eines Stecknadelkopfes bis zu einer Länge von mehreren Centimetern variirenden Krystalle zeigen meistens ziemlich einfache Combinationen und sind von bläulicher Farbe, bisweilen aber auch lichtgrün oder weiss. Die Krystalle finden sich gewöhnlich einzeln und nicht zu Drusen vereinigt; bisweilen jedoch bestehen sie aus zwei oder auch noch mehreren in paralleler Stellung unter einander verwachsenen Individuen. Ausserdem finden sich aber auch Krystalle von complicirten Formen, bei denen die Flächen 0 P wenig entwickelt oder auch mehr oder weniger drusenartig erscheinen.*)

Von jeder der beiden Arten von Krystallen stand mir nur ein Individuum zur Verfügung.

Krystall No. 34.

Der zur ersten der oben bezeichneten Arten gehörige Krystall No. 34 zeichnet sich durch seine beträchtliche Grösse aus und ist Fig. 34 in seinen beiden Projectionen nebst der oberen Endfläche abgebildet; er besteht, wie die oberhalb derselben gezeichnete Endfläche 0 P nachweist, aus 4 oder 5 in paralleler Stellung verwachsenen Individuen. Die in der Zeichnung mit *a b* bezeichnete Kluft geht fast durch den ganzen Krystall hindurch, und nur zwischen *a* und *c* (längs der Fläche 3) ist die Verwachsung des linken und rechten Theiles eine vollkommene, während dieselbe nach der Kante 4. 1 hin weniger innig erscheint.

*) v. Kokscharow, Materialien u. s. w. Bd. 8, S. 213.

Der Krystall ist eine Combination von ∞P, $\infty \breve{P}2$; $\frac{1}{3}P$, P, $2P$; $2\breve{P}\infty$, $4\breve{P}\infty$ und $0P$. Mit Ausnahme des Quadranten 3 sind die Flächen von ∞P beträchtlich grösser als die Flächen von $\infty \breve{P}2$; die Flächen von $\frac{1}{3}P$, P, $2P$ und $2\breve{P}\infty$ am oberen Ende sind nur schmal; dagegen besitzen die Flächen von $4\breve{P}\infty$ eine ziemliche Ausdehnung. Während das obere Ende eine sehr grosse Fläche $0P$ trägt, wird das untere Ende theils von einer mangelhaft gebildeten geneigten Fläche (im 3. Quadranten), theils von Bruchflächen begrenzt. Die Masse des Krystalles erscheint trübe und von grünbläulicher Färbung.

Die auf den Seitenflächen beobachteten elektrischen Ausschläge weisen die in Fig. 34 eingetragenen Farben nach. Neben jeder der brachydiagonalen Seitenkanten zieht sich eine negative Zone herab; die brachydiagonalen Seitenkanten selbst zeigen bei specieller Prüfung auf ihrem oberen Theile keine, auf der unteren Hälfte aber positive Elektricität; die makrodiagonalen Seitenkanten erscheinen in ihrer ganzen Länge negativ.

Krystall No. 35.

Der Krystall No. 35, dessen Projectionen Fig. 35 gezeichnet sind, gehört der selteneren Art mit drusigem oberen Ende an. Seine Seitenflächen sind von den Prismen ∞P und $\infty \breve{P}2$ und $\infty \breve{P}\infty$ gebildet. Sein unteres Ende wird von einem ebenen Durchgange begrenzt, während am oberen Ende die Flächen des Brachydomas rundlich gegen einander verlaufen, und eine Wölbung bilden, die ähnlich wie bei dem Krystall No. 24 durch zahlreiche mit dem makrodiagonalen Hauptschnitte parallele Furchen uneben gemacht wird.

An diesem Krystalle ist das obere in der zuvor beschriebenen Weise ausgebildete Ende der Hauptaxe positiv; die Durchgangsfläche am unteren Ende zeigt sich negativ.

D. Brasilianische Krystalle.

Während bei den in den vorstehenden Abschnitten beschriebenen und untersuchten Topasen an den ausgebildeten Enden der Hauptaxe entweder die Flächen $0P$ in grösserer oder geringerer Ausdehnung auftreten oder an ihrer Stelle eine durch die Flächen eines Brachydomas gebildete Schneide erscheint, zeigen die Krystalle dieses und des folgenden Abschnittes an den ausgebildeten Enden der Hauptaxe eine durch

die Pyramidenflächen mehr oder weniger vollkommen gebildete Spitze. Bei unvollkommener Entwickelung findet sich bei den brasilianischen Topasen häufig die im Vorhergehenden bereits mehrfach erwähnte Begrenzung durch eine drusige oder narbige senkrecht gegen die Hauptaxe gerichtete Fläche.

Die brasilianischen Topase lassen sich nach ihrem elektrischen Verhalten in zwei Gruppen theilen, 1. in solche mit elektrisch positiven und 2. in solche mit elektrisch negativen Endigungen der Hauptaxe.

a. Krystalle mit elektrisch positiven Enden der Hauptaxe.

Die Krystalle mit positiven Endigungen der Hauptaxe bilden unter den brasilianischen Topasen die Minderzahl; unter den zahlreichen von mir untersuchten brasilianischen Topasen gehörten nur fünf Individuen dieser Gattung an, und zwar ein an beiden Enden ausgebildeter, während die übrigen vier blos an dem einen Ende Pyramidenflächen trugen, an dem anderen aber verbrochen waren.

Sämmtliche fünf Krystalle zeichnen sich durch den Glanz ihrer Pyramidenflächen aus, die wie geflossen und etwas gebogen oder geknickt aussehen und niemals starke Streifen oder Furchen zeigen. Auch im Innern erscheint die Masse dieser Krystalle weniger rissig und faserig als bei den übrigen brasilianischen Krystallen.

a. Elektrische Vertheilung im Allgemeinen.

Vollkommen ausgebildete brasilianische Topase dieser Gruppe (Krystall No. 36) stimmen in ihrem elektrischen Verhalten mit den vollkommen ausgebildeten sächsischen Krystallen überein. Die Endspitzen sowie die den Endspitzen zugewandten Theile der Pyramidenflächen und der Polkanten sind positiv, die nach den Seitenflächen hin liegenden Theile der genannten Flächen und Kanten sowie die horizontalen Randkanten selbst aber negativ; die brachydiagonalen Seitenkanten zeigen positive, die makrodiagonalen negative Elektricität, und es verbreitet sich diese letztere negative Polarität auf den Seitenflächen in der Nähe der oberen und unteren Randkanten, so dass also eine ähnliche Form der positiven Zonen entsteht, wie bei den sächsischen Krystallen No. 1 und 2.

Verletzungen an positiven Stellen bedingen einen Uebergang ins Negative; dem entsprechend zeigt sich auch bei den nur an einem Ende

ausgebildeten Krystallen die Durchgangsfläche am unteren Ende negativ.

Die elektrische Vertheilung tritt auf den Krystallen dieser ersten Gruppe im Allgemeinen regelmässiger auf als auf vielen Individuen der zweiten Gruppe; namentlich zeigen die brachydiagonalen Seitenkanten überall positive Polarität; dagegen erscheint die negative Elektricität auf den makrodiagonalen Kanten bei der Beobachtung bisweilen auf die äusserste Schneide derselben beschränkt, und kann nur wahrgenommen werden, wenn der ganze Krystall bis auf diese Schneide in Kupferfeilicht eingehüllt ist.

Auffällig ist überhaupt das ungemeine Vorherrschen der positiven Elektricität bei den Beobachtungen auf den Flächen; es sieht aus, als ob der oben S. 391 ausgesprochene Satz eines Gleichgewichtes zwischen dem Auftreten der positiven und der negativen Polarität für diese Topase keine Geltung mehr habe; indess wird diese Erscheinung durch den Einfluss der Ableitungen bedingt sein. Denn wie schon bei der Untersuchung des Bergkrystalles (Bd. XIII dieser Abhandlungen S. 348) hervorgehoben wurde, ist bei jeder Veränderung der Ableitung das System von Massentheilchen, dessen elektrisches Verhalten gemessen wird, ein anderes; es sind also die bei einer Art von Einhüllung eines Krystalles in Metallfeilicht beobachteten Werthe nicht in aller Strenge mit den bei einer andern Einhüllung gefundenen vergleichbar.

b. Beobachtungen.

Krystall No. 36.

Der ausgezeichnet schöne, dem Berliner Museum gehörige Krystall No. 36 ist, wie Fig. 36 *A* und *B* zeigt, ringsum ausgebildet. Seine Seitenflächen, den Gestalten ∞P und $\infty \breve{P}2$, die zum Theil rundlich in einander verlaufen, angehörend, sind stark gestreift und glänzend. Einen geringeren Glanz zeigen die gegen die Axe geneigten Flächen, die nicht streng eben, sondern mehr oder weniger rundlich, bisweilen auch geknickt erscheinen. Ziemlich deutlich erkennbar sind die Flächen der Gestalten P, $\frac{1}{3}P$; und zwei sehr schmale Flächen von $\breve{P}\infty$. Die beiden Enden der Hauptaxe sind bis auf ein kleines längliches, der Makrodiagonale parallel laufendes Grübchen vollständig ausgebildet, und

zwar findet sich ein solches Grübchen sowohl an der oberen als auch der unteren Spitze.

Verletzt ist der Krystall nur an zwei Stellen: eine Bruchfläche, mit welcher der Krystall wahrscheinlich angesessen hat, findet sich am unteren Ende der makrodiagonalen Seitenkante (4. 1) und dem benachbarten Theile der von hier abgehenden unteren Polkante. An einer anderen Stelle, auf der oberen brachydiagonalen Polkante (3. 4), ist ein Eindruck, der indess nicht verbrochen zu sein scheint, sondern vielmehr das Ansehen einer durch blosses Anlegen gehemmten Ausbildung trägt. Ungefähr ein Drittel vom oberen Ende sieht man einen senkrecht gegen die Axe gerichteten Sprung, der aber nur in der Kante (4. 1) und auf der Fläche 4 die Oberfläche erreicht.

Der vorliegende Krystall ist sehr vielfach Gegenstand der Prüfung gewesen, und zwar sind bei ihm sowohl sämmtliche Pyramiden- und Prismenflächen, als auch sämmtliche Pol-, Rand- und Seitenkanten einzeln auf ihr elektrisches Verhalten wiederholt untersucht worden.

Die grosse Regelmässigkeit des Krystalles in seiner äusseren Form liess eine entsprechende Regelmässigkeit in der elektrischen Vertheilung auf seiner Oberfläche erwarten; gestört wird dieselbe nur, wenn auch gerade nicht erheblich, an den beiden zuvor bezeichneten Stellen auf der oberen Polkante (3. 4) und der unteren Polkante (4. 1) durch die daselbst eingetretene mangelhafte Ausbildung oder Verletzung.

Die grösseren, den beiden Endspitzen zugewandten Theile der Pyramidenflächen sind positiv, während die den Randkanten benachbarten Streifen dieser Flächen negative Polarität darbieten. Am oberen Ende tritt diese negative Beschaffenheit an der Basis aller vier Pyramidenflächen deutlich hervor; ihr Fehlen auf der Pyramidenfläche des ersten Quadranten am unteren Ende wird durch die Verletzung der benachbarten Polkante (4. 1) bedingt. Die Polkanten sind, entsprechend der auf den Pyramidenflächen beobachteten Vertheilung, auf den an den Endspitzen gelegenen zwei Dritteln ihrer Länge positiv, auf dem an die Randecken stossenden Drittel aber negativ; die auf der oberen Polkante (3. 4) und der unteren Polkante (4. 1) verbrochenen oder mangelhaft ausgebildeten Stellen sind, wie man nach den früheren Mittheilungen erwarten kann, in ihrer ganzen Ausdehnung negativ.

Die specielle Untersuchung der oberen und unteren Randkanten ergibt dieselben fast sämmtlich negativ; nach dem Endpunkte der

brachydiagonalen Seitenkanten hin nimmt diese Polarität an Stärke ab, verschwindet daselbst bisweilen (oben neben der Randecke (3. 4)), oder geht auch in die entgegengesetzte über (unten neben der Randecke (1. 2). Die verticalen Seitenkanten folgen dem gewöhnlichen Gesetz, d. h. die makrodiagonalen sind ihrer ganzen Länge nach negativ, und die brachydiagonalen positiv. Auf den Seitenflächen waltet im Allgemeinen die positive Polarität vor.

Der vorliegende Krystall ist derselbe, von welchem die Herren Riess und G. Rose in ihrer Abhandlung*) angeben: „Ein sehr ausgezeichneter brasilianischer Krystall, $12\frac{1}{2}'''$ lang, gab an beiden Enden, die mit der einfachen vierflächigen Zuspitzung versehen waren, positive Elektricität, und dieselbe Elektricität an den stumpfen Seitenkanten der Säule; negative Elektricität war nur in zwei zufälligen Gruben an beiden Enden zu finden." Wie man sieht, sind diese Angaben richtig und nur darin unvollständig, dass den Beobachtern die negativen Zonen auf den makrodiagonalen Seitenkanten sowie auf den an den Randkanten gelegenen Theilen der Pyramidenflächen entgangen waren.

Krystall No. 37.

Der kleine Krystall No. 37 hat nicht das gewöhnliche faserige oder rissige Aussehen der brasilianischen Krystalle, sondern erscheint fast rein und durchsichtig und zwar noch mehr als selbst der Krystall No. 36. Seine Farbe ist lichter als die des eben genannten und spielt etwas ins Violette. Das obere Ende des Krystalles No. 37, welcher Fig. 37 *A* und *B* abgebildet ist, lässt ziemlich bestimmt die Flächen P, $\frac{1}{3}$P; $\frac{1}{2}\breve{P}2$; $\frac{1}{3}\breve{P}\infty$, $2\breve{P}\infty$ und $\bar{P}\infty$ erkennen; sein unteres Ende ist von einem Durchgange begrenzt. Eine mangelhafte Ausbildung zeigt sich nur im unteren Theile der Pyramidenkante, welche vom oberen Ende der makrodiagonalen Seitenkante (2. 3) nach der oberen Spitze der Pyramide hinläuft; an dieser Stelle erscheint die einzige vorkommende Fläche des Brachydomas $2\breve{P}\infty$ in einer gewissen Breite und mit starkem Glanze.

Das obere Ende dieses Krystalles, ebenso wie die um dasselbe liegenden Pyramidenflächen sind positiv; nur auf der zuvor bezeichneten mangelhaft ausgebildeten Stelle tritt negative Elektricität hervor.

*) Abhandl. der Berl. Akad. 1843. S. 92.

Krystall No. 38.

Der Fig. 38 abgebildete Krystall No. 38 stellt eine einfache Combination von P, ∞P und $\infty \breve{P}2$ dar; seine Masse ist ziemlich rein und durchsichtig, von grünlich-gelber Farbe, und erscheint nur wenig rissig und faserig. Das untere Ende wird von einem Durchgange begrenzt.

Die negativen Zonen neben den makrodiagonalen Seitenkanten werden bei den Beobachtungen auf den Seitenflächen durch die stärkere Vertheilungswirkung der daneben befindlichen sehr intensiven positiven Zonen zum Theil verdeckt.

Krystall No. 39.

Der Krystall No. 39, welcher Fig. 39 abgebildet ist, wird von denselben Flächen, wie der vorhergehende begrenzt; die untere Hälfte der Kante (2. 3) ist verletzt. Seine Farbe ist die gewöhnliche gelblich-röthliche. Die elektrische Vertheilung ergibt sich aus den Zeichnungen.

Krystall No. 40.

Der Fig. 40 gezeichnete Krystall No. 40 zeigt dieselbe Gestalt wie der vorhergehende. Seine Farbe ist gelblich-röthlich. Das untere Drittheil der makrodiagonalen Kante (2. 3) ist verletzt.

Bei den auf den Seitenflächen ausgeführten und in das Netz eingetragenen Beobachtungen wurde neben keiner der makrodiagonalen Kanten negative Polarität beobachtet. Um bei specieller Prüfung auf den makrodiagonalen Seitenkanten die negative Polarität wahrzunehmen, musste diese Kante bis auf die äusserste Schärfe in Kupferfeilicht gehüllt werden; sonst überwog die Vertheilungswirkung der daneben befindlichen positiven Flächenstücke.

β. Krystalle mit elektrisch negativen Enden der Hauptaxe.

Wie schon oben angedeutet, gehört zu dieser Abtheilung die grösste Zahl der brasilianischen Topase; die betreffenden Krystalle zeigen auf ihren Pyramidenflächen, wenn auch in einzelnen Fällen nur auf einer Fläche, mehr oder weniger tiefe Furchen, und weisen hiedurch auf eine mangelhafte Ausbildung des betreffenden Endes der Hauptaxe hin. In ihrem Innern erscheinen sie im Allgemeinen rissiger und faseriger als die Krystalle der vorhergehenden Abtheilung.

In den meisten Fällen besitzen die Endspitzen sowie die sie bildenden Pyramidenflächen starke negativ elektrische Spannungen; bei einigen Krystallen, die gewissermassen einen Uebergang der ersten Gruppe zur zweiten vermitteln, ist jedoch die Endspitze nur sehr schwach negativ, und zeigen einzelne Pyramidenflächen oder auch nur Theile derselben noch positive Polarität. Die untere Endfläche (sei sie die drusige Krystallfläche oder Durchgang) zeigt negative Polarität; doch kommt auch der Fall vor, dass in der Nähe der brachydiagonalen Kanten positive Stellen auftreten; ein Verhalten, das sich bei den kleinasiatischen Topasen noch weiter ausbildet, und wohl durch die negative Polarität der oberen Endspitze bedingt wird. Die Vertheilung der beiden Elektricitäten auf den Seitenkanten und Seitenflächen ist im Ganzen unregelmässiger als auf den Krystallen mit positiven Axenenden; es verbreitet sich namentlich sehr häufig die negative Elektricität von den negativen Pyramidenflächen des oberen Endes und den makrodiagonalen Seitenkanten über die oberen Theile der Seitenflächen und der brachydiagonalen Kanten, so dass dann in der oberen Hälfte des Krystalles sämmtliche Seitenkanten negativ erscheinen, in der unteren Hälfte aber die Polaritäten auf jenen Kanten der Regel gemäss abwechseln. Während die negative Polarität mehr die obere Hälfte der seitlichen Begrenzungen einnimmt, erweitert und verstärkt sich die positive nach unten hin, und breitet sich hier auch bisweilen über die makrodiagonalen Seitenkanten aus, so dass dann sämmtliche Seitenkanten in der unteren Hälfte positiv sind, in der oberen aber der Regel gemäss in den Polaritäten abwechseln.

Krystall No. 41.

Der Krystall No. 41, welchen Fig. 41 *A* und *B* in seinen beiden Projectionen und seinem Netze darstellt, ist eine Combination von P, ∞P und $\infty\breve{P}2$; erscheint aber nur am oberen Ende ausgebildet, während sein unteres von einem Durchgange begrenzt wird. Er ist oben auf der Kante (2. 3), und auch, wenn gleich weniger, oben auf der Kante (3. 4) verletzt. Seine Pyramidenflächen zeigen Furchen.

Auf der schwach verletzten Stelle am oberen Ende der brachydiagonalen Seitenkante (3. 4) findet sich anstatt der positiven die negative Polarität. Von den Pyramidenflächen am oberen Ende ergaben sich bei specieller Untersuchung der einzelnen Flächen (d. h. bei Einhüllung des ganzen Krystalles mit alleiniger Ausnahme einer der Py-

ramidenflächen) die Pyramidenfläche 1 negativ, während die drei übrigen positive Elektricität zeigten. Wurde der Krystall bis auf die äusserste obere Spitze eingehüllt, so erschien diese Spitze negativ; ragte jedoch der Krystall mit sämmtlichen vier Pyramidenflächen aus den Feilspähnen hervor, so zeigte das Elektrometer beim Annähern der Spitze des Platindrahtes gegen die oberste Spitze infolge der starken Einwirkung der drei Pyramidenflächen 2, 3 und 4 einen positiven Ausschlag.

Krystall No. 42.

Die beiden Projectionen des dem Halle'schen Museum gehörigen Krystalles No. 42 sind Fig. 42 *A*, und sein Netz Fig. 42 *B* (letzteres in doppelt linearer Vergrösserung) abgebildet. An seinem oberen Ende sind nur die Flächen P sichtbar; am unteren Ende finden sich, freilich durch die rundliche Ausbildung nicht recht unterscheidbar, neben P im 2. und 3. Quadranten noch Flächen von $\frac{2}{3}$P und $\frac{1}{3}\breve{P}2$; ausserdem erscheint noch eine Fläche auf der von $\infty\breve{P}2$ (im 2.) und $\frac{1}{3}\breve{P}2$ (im 3. Quadranten) gebildeten Kante, welche diese Kante mit parallelen Rändern abstumpft, dabei aber mehr gegen die Fläche von $\frac{1}{3}\breve{P}2$ geneigt ist. Die Pyramidenflächen des oberen Endes zeigen schwache deutliche Furchen, am unteren Ende sind die Furchen sehr schwach.

Die negativ elektrische Spannung auf den Endspitzen ist nur gering, auf der oberen noch etwas stärker als auf der unteren.

Krystall No. 43.

Fig. 43 *A* stellt die beiden Projectionen und Fig. 43 *B* das Netz des dem hiesigen mineralogischen Museum gehörigen Krystalles No. 43 dar. Die Seitenflächen sind wie gewöhnlich von den Gestalten ∞P und $\infty\breve{P}2$ gebildet; an den Enden der Hauptaxe lassen sich nur die Flächen von P unterscheiden, und zwar erscheint von dieser Pyramide am unteren Ende nur eine einzige grosse, jedoch nicht ganz eben ausgebildete Fläche, an deren Ende die eigentliche Spitze des Krystalles abgebrochen ist, sodass sich an ihrer Stelle eine kleine ungefähr 1^{mm} breite und 4^{mm} lange Durchgangsfläche findet, die Fig. 43 *B* unterhalb der Fläche 2 abgebildet und mit α bezeichnet worden ist. Von den Pyramidenflächen am oberen Ende zeigt die Fläche 4 schwache Furchen, während die Flächen 1 und 2 dieses Endes ebenso wie die grosse Fläche 2 am unteren Ende nur sehr geringen Glanz besitzen.

Die beiden Enden der Hauptaxe sammt den Pyramidenflächen sind negativ; und zwar die Spitze am oberen Ende nur schwach, die kleine Durchgangsfläche am unteren stärker.

Krystall No. 44.

Der Krystall No. 44 war ringsum ausgebildet; seine Seitenflächen enthielten die Gestalten ∞P und $\infty \breve{P} 2$; das obere Ende trug die Pyramide P, nebst den horizontalen Prismen $\breve{P}\infty$ und $\bar{P}\infty$, während das untere Ende von der bereits öfter erwähnten narbigen und wenig glänzenden Endfläche begrenzt wurde. Die Länge dieses Topases betrug 26^{mm}. Beim ersten Erhitzen auf einem Bleche zersprang er in zwei fast gleichlange Stücke, und die Netze dieser beiden Stücke sind Fig. 44 in natürlicher Grösse in entsprechender Lage abgebildet worden. Fig. 44 *A* ist das Netz des oberen, Fig. 44 *B* das Netz des unteren Stückes. Die unterhalb des unteren Stückes mit 0 P bezeichnete Fläche ist die untere wenig glänzende narbige Begrenzungsfläche.

Trotzdem auf den Seitenflächen, wenn der Krystall bis auf eine derselben in Metallfeilicht eingehüllt auf sein elektrisches Verhalten geprüft wird, die positive Elektricität vorherrscht, zeigen doch bei specieller Prüfung die sämmtlichen vier Seitenkanten beider Stücke in ihrer ganzen Länge die gewöhnliche Polarität: die makrodiagonalen Kanten negative, die brachydiagonalen positive. Wenn bei den auf den Seitenflächen ausgeführten und in die beiden Netze eingetragenen Beobachtungen die negative Polarität nicht im ganzen Verlaufe der makrodiagonalen Kanten und ihrer nächsten Umgebung erscheint, so ist sie daselbst nur durch die Vertheilungswirkung der daneben liegenden sehr stark positiven Zonen verdeckt worden.*)

Weitere Versuche nach Absprengen der obersten Spitze s. später im Abschnitt V, unter 4.

Nach dem Absprengen der oberen Spitze wurden die beiden in Fig. 44 mit *a* und *b* bezeichneten Flächen in Bezug auf die Grösse der auf ihnen auftretenden Spannungen genau verglichen. Es wurde das untere Stück mit der Fläche *b* und das mittlere Stück von der Länge $\alpha\gamma$

*) Eine so starke positive Elektricität, dass sie das Goldblättchen ganz aus dem Gesichtsfelde des Mikroskops trieb, ist in den Zeichnungen mit ##, eine ebenso starke negative mit = bezeichnet worden.

mit der Fläche *a* nach oben in derselben Kupferschale neben einander bis auf die genannten Flächen in Metallfeilicht eingehüllt, und dann beide Flächen, während die fast gleiche Länge besitzenden Krystallbruchstücke sich genau unter denselben Verhältnissen befanden, während der Abkühlung abwechselnd untersucht. Die Stärke der negativen Spannung auf der Fläche *b* übertraf ungefähr drei Mal die Intensität der auf der Fläche *a* erscheinenden.

Krystall No. 45.

Die Projectionen dieses dem Museum der Universität Halle gehörigen Krystalles No. 45 sind Fig. 45 *A*, und das Netz Fig. 45 *B* in natürlicher Grösse dargestellt. Die Seitenflächen werden von den in einander verlaufenden Flächen ∞P und $\infty\breve{P}2$ gebildet; das obere Ende trägt die Flächen P und eine Fläche von $\breve{P}\infty$, das untere aber wird von der mehr erwähnten narbigen oder drusigen Fläche 0P gebildet. Die Pyramidenflächen des oberen Endes sind nicht eben, sondern mit tiefen Furchen versehen, welche dadurch entstanden sind, dass die einzelnen den gesammten Krystall bildenden, mit parallelen Axen an einander gewachsenen Krystallstängel an dem oberen Ende noch durch ihre Köpfe sichtbar werden. Ebenso zeigt auch die untere Endfläche zahlreiche nahe in einer Ebene liegende Köpfe von Krystallstängeln.

Die obere Spitze sammt den sie umgebenden Pyramidenflächen besitzt negative Polarität in nicht unbeträchtlicher Stärke; auf der unteren drusigen Fläche, die zum grössten Theile ebenfalls negativ ist, liegen die beiden Maxima dieser Polarität gegen die beiden makrodiagonalen Eckpunkte hin, während am brachydiagonalen Eckpunkte (1.2) noch schwache negative, am gegenüberliegenden Eckpunkte (3.4) dagegen positive Elektricität auftritt. Die brachydiagonale Kante (3.4) ist ihrer ganzen Länge nach positiv, und zwar von oben nach unten in zunehmender Stärke; dagegen findet sich auf der anderen brachydiagonalen Kante (1.2) in der Mitte eine negative, mit der eigenthümlichen Ausbreitung eben dieser Polarität auf den Flächen 1 und 2 (Fig. 45 *B*) im Zusammenhange stehende Stelle, während auf den oberen und unteren Theilen derselben die positive Spannung erscheint.

Ich bemerke ausdrücklich, dass kein Anzeichen, weder auf den äusseren Begrenzungsflächen noch im Innern der Masse auf die eigenthümliche Vertheilung der Elektricitäten auf den Flächen 1 und 2 hinweist.

Krystall No. 46.

Der ebenfalls dem Halle'schen mineralogischen Museum gehörige Fig. 46 *A* und *B* abgebildete Krystall No. 46 gleicht sehr dem vorhergehenden, und auch die untere Endfläche ist, wie bei diesem keine Durchgangs-, sondern eine mangelhaft ausgebildete Endfläche. Die Furchen auf den oberen Pyramidenflächen erscheinen feiner als bei dem vorhergehenden Krystalle.

Bei specieller Prüfung der Kanten ergeben sich, wie auch die Farben in Fig. 46 *A* andeuten, die beiden makrodiagonalen Kanten negativ. Die brachydiagonale Kante (1. 2) ist in vier Fünfteln ihrer Länge von obenher ebenfalls negativ, und nur das unterste Fünftel positiv; die gegenüberliegende Kante (3. 4) zeigt sich ebenfalls in den oberen drei Vierteln negativ, und in dem untersten Viertel positiv. Mit diesem Verhalten der Kanten steht die eigenthümliche Vertheilung der beiden elektrischen Polaritäten auf den Seitenflächen im engsten Zusammenhange.

Krystall No. 47.

Der Krystall No. 47 gleicht dem vorhergehenden; die Begrenzung seines unteren Endes wird ebenfalls von einer drusigen Krystallfläche gebildet. Fig. 47 *A* stellt seine beiden Projectionen, Fig. 47 *B* sein Netz dar.

Auch bei diesem Krystalle herrscht ebenso wie bei dem vorhergehenden auf den oberen Theilen der Seitenflächen und Kanten die negative, auf den unteren Theilen die positive Elektricität vor.

Krystall No. 48.

Der in Fig. 48 *A* und *B* dargestellte Krystall gleicht dem vorhergehenden, nur ist sein unteres Ende von einer ebenen Durchgangsfläche begrenzt. Die Kante (1. 2.) ist oben etwas verletzt.

Auf den beiden Pyramidenflächen 2 und 4 zeigen sich bei specieller Prüfung an ihrer unteren Seite noch positive Stellen; dagegen erscheinen die oberen Enden der brachydiagonalen Kanten negativ.

Krystall No. 49.

Am oberen Ende des Fig. 49 *A* und *B* abgebildeten Krystalles treten ausser der Pyramide P die Flächen von $\breve{P}\infty$ und $\breve{P}\infty$ deutlich

hervor. Die Furchen auf den Pyramidenflächen sind feiner als bei dem Krystalle No. 45.

Die elektrische Vertheilung auf diesem Krystalle zeigt dieselbe Eigenthümlichkeit wie bei mehreren der vorhergehenden; es ziehen sich neben allen Kanten auf einer der sie bildenden Seitenflächen negative Zonen entweder nach der ganzen Länge oder wenigstens nach einem grossen Theil derselben, von oben nach unten hin. Bei einer speciellen Untersuchung der Kanten ergibt sich (Fig. 48 *A*) die Kante (4. 1) negativ; ebenso die Kante (2. 3) bis auf ihr unteres Ende, welches keine elektrische Spannung darbietet. Die Kante (1. 2) ist im obersten Drittel positiv, in ihrer übrigen Länge negativ; während die Kante (3. 4) sich in ihrem ganzen Verlaufe positiv zeigt. Die zum grösseren Theile negative Durchgangsfläche am unteren Ende zeigt in der Nähe der Fläche 1 eine positive Zone.

Krystall No. 50.

Der Krystall No. 50 (Fig. 50 *A* und *B*) gleicht dem vorhergehenden; sein unteres Ende ist ebenfalls von einer Durchgangsfläche begrenzt. Eine etwas erhebliche Verletzung zeigt sich nur am unteren Ende der Kante (1. 2).

Die Untersuchung der Flächen (Fig. 50 *B*) hat auch bei diesem Krystalle neben allen Kanten mehr oder weniger ausgedehnte negative Zonen ergeben. Bei specieller Prüfung der Seitenkanten (Fig. 50 *A*) zeigten die beiden makrodiagonalen die gewöhnliche negative und die beiden brachydiagonalen die positive Polarität; jedoch erschien das untere Ende der brachydiagonalen Kante (1. 2), soweit es verletzt ist, negativ; und auf der Kante (3. 4) zeigte sich im oberen Drittel eine kleine negative Stelle.

Krystall No. 51.

Der grosse schöne Fig. 51 nur in seinen Projectionen dargestellte Krystall trägt am oberen Ende die ziemlich stark gefurchten Flächen P nebst schmalen Flächen von $\breve{P}\infty$ und $\bar{P}\infty$. Die Seitenfläche 2 erscheint einwärts geknickt, wie ein einspringender Winkel. Auf der Mitte der Fläche 4 und oberhalb dieser Mitte sitzt eine dünne Schicht einer Substanz, auf welcher der Krystall bei seiner Bildung gelegen hat. Das untere Ende zeigt eine höckerige narbige Endfläche, die nach der

Kante (4. 1) hin eine undurchsichtige Platte mit ziemlich ebener Oberfläche trägt.

Beim ersten Erhitzen zersprang der Krystall nach der Linie $\alpha\beta$ in einer vollkommen ebenen Fläche. Für die Beobachtung der elektrischen Vertheilung wurden die Stücke dicht aneinander geschoben, und so der Krystall als ein Ganzes untersucht.

Die Seitenkanten besitzen die normalen Vertheilungen, und zwar nimmt auf den makrodiagonalen die negative Polarität von oben nach unten an Intensität ab, auf den brachydiagonalen Kanten dagegen die positive in derselben Richtung zu.

In den Projectionen sind die auf den Flächen gemachten Beobachtungen dargestellt. Die beiden Durchgangsflächen, welche durch den Sprung entstanden waren, zeigten beide negative Spannung, aber in sehr ungleicher Stärke, ebenso wie die beiden Flächen *a* und *b* an den Krystallbruchstücken No. 44. Während der am unteren Stück entstandene Durchgang eine sehr starke negative Elektricität besass, war die auf dem Durchgange am oberen Stücke auftretende nur mässig stark; beide Stücke befanden sich bei dieser Vergleichung in einer und derselben Kupferschale nicht weit von einander bis auf die beiden Bruchflächen in Kupferfeilicht eingehüllt und hatten also gleiche Erwärmung und Abkühlung erlitten.

Krystall No. 52.

Der grosse Krystall No. 52 ist Fig. 52 in seinen Projectionen und Endflächen abgebildet; seine Masse erscheint unrein und von schmutzig bräunlicher Farbe. Das obere Ende wird von einer Durchgangsfläche, das untere von der mehrfach erwähnten drusigen Endfläche begrenzt. Die Prismenflächen sind sehr stark gestreift, auch theilweise mit tiefen Furchen und Absätzen versehen.

Auf der oberen Endfläche (Durchgang) bildet sich beim Erkalten von der Mitte ausgehend eine breite positive Zone zwischen den beiden brachydiagonalen Kanten aus; die Flächenstücke in der Nähe der makrodiagonalen Kanten bleiben aber stets negativ. Die am unteren Ende befindliche drusige Endfläche zeigt überall starke negative Elektricität. Die auf den Seitenflächen gemachten Beobachtungen sind in die Projectionen eingetragen worden. Die seitlichen Prismenflächen erscheinen vorwiegend positiv, doch zieht sich neben den Kanten ein negativer

Streifen hin; die Seitenkanten selbst zeigen aber bei specieller Prüfung die gewöhnlichen Polaritäten; also die Kanten (4. 1) und (2. 3) negative, und die Kanten (1. 2 und 3. 4) positive, doch ist das unterste Ende der letztgenannten Kante negativ.

Die näheren Angaben der elektrischen Vertheilung auf neun anderen brasilianischen Krystallen, deren äussere Form durch Schleifen oder Zersprengen abgeändert wurde, werde ich im übernächsten Abschnitte mittheilen.

E. Krystalle aus Kleinasien.

In der Freiberger Sammlung (Werner-Museum) finden sich ausgezeichnet klare durchsichtige Krystalle von gelblicher oder schwach violetter Farbe, als deren Fundort theils allgemein Natolien, theils speciell Mughla*) angegeben wird. Genaueres über ihr Vorkommen habe ich nicht erfahren können. Krystallographisch sind sie interessant, weil bei mehreren derselben eine stumpfere Pyramide, als bisher bekannt, $\frac{1}{2}$P und zwar bisweilen in nicht unbeträchtlicher Ausdehnung erscheint.**) Die Pyramidenflächen erscheinen meistens sehr vollkommen ausgebildet; besitzen starken Glanz, und zeigen dabei bisweilen ein schwach schuppiges Aussehen; ebenso sind die entweder nur sehr schwach oder gar nicht gestreiften Prismenflächen stark glänzend. Die Krystalle gehören zu den vollkommensten und schönsten Topasen.

a. Elektrisches Verhalten im Allgemeinen.

Die Krystalle von Mughla in Kleinasien gleichen in ihrem elektrischen Verhalten der zweiten Gruppe der brasilianischen, namentlich auch in Betreff der sehr grossen Intensität der elektrischen Erregung. An beiden Enden vollkommen ausgebildete Krystalle standen mir leider nicht zu Gebote; sämmtliche untersuchte waren nur an dem oberen Ende von gegen die Axe geneigten Flächen, am unteren aber von einem Durchgange oder einer drusigen Fläche begrenzt.

*) Jedenfalls der Hauptort der Provinz Carien im südwestlichen Theile von Kleinasien.

**) Es ist möglich, dass sie von v. Kokscharow in seinen Materialien Bd. II, Tafel 33, Fig. 28 an einem aus dem Borschtschowotschnoi-Gebirgszuge stammenden Krystalle gezeichnet, aber nicht gemessen worden ist.

Das obere ausgebildete Ende war bei sämmtlichen Krystallen negativ; indess drang bei einem derselben (No. 53) die positive Elektricität auch auf zwei neben einer brachydiagonalen Polkante liegenden Flächen der Pyramide *P* bis gegen die Spitze hin vor; jedoch blieb die Endspitze selbst negativ.

Charakteristisch für die Mughlaer Krystalle ist das Hervortreten von oft stark positiv elektrischen Stellen neben den brachydiagonalen Kanten auf der unteren Durchgangsfläche; die positive Elektricität breitet sich hier mehr oder weniger aus, und steigerte sich in einem Falle (Krystall No. 54) soweit, dass die genannte Fläche in ihrer ganzen Erstreckung ausserordentlich starke positive Polarität darbot. Eben diese Erscheinung einer positiven Durchgangsfläche trat bei dem Topase No. 58 ein, dessen Fundort nicht angegeben war, der aber sicherlich auch in Mughla zu suchen ist.

Bei allen Krystallen dieses Fundortes sind nur die Beobachtungen auf den Flächen in den Projectionen dargestellt.

b. Beobachtungen.

Krystall No. 53.

Die Seitenflächen des Fig. 53 in seinen Projectionen abgebildeten Krystalles No. 53 (Werner-Museum No. 522) werden von den Flächen ∞P und $\infty \breve{P} 2$ gebildet; am oberen Ende der Hauptaxe finden sich die Pyramiden $\frac{1}{3} P$ und P, nebst kleinen Flächen von $2 \breve{P} \infty$ und $4 \breve{P} \infty$, und einer Fläche von $\frac{1}{3} \bar{P} \infty$ (oberhalb der Kante (1. 2)); während das untere Ende von einem Durchgange begrenzt ist. Die Farbe des Krystalles spielte etwas ins Violette.

Die obere Spitze ist stark negativ elektrisch; bei specieller Prüfung zeigen sich auch die Pyramidenflächen $\frac{1}{3} P$ und P in dem ersten und zweiten Quadranten negativ, während im dritten und vierten Quadranten nur die oberen Theile (ungefähr die Flächen von $\frac{1}{3} P$) negativ, die unteren Theile (ungefähr die Flächen von P) stark positiv erscheinen; die untere Endfläche zeigt von der Kante (4. 1) über die Mitte hin bis zum Rande der Fläche 2 eine negative Zone, während von den beiden brachydiagonalen Kanten zwei positive Streifen (von der Kante (1. 2) bis zur Mitte des Randes an der Fläche 1, und von der Kante (3. 4) am Rande der Fläche 3 bis zur Kante (2. 3) hin) ausgehen. Auf den Seitenflächen

und Kanten tritt die gewöhnliche Vertheilung mit vorwaltender Ausdehnung und Stärke der positiven Polarität auf.

Krystall No. 54.

Der in Fig. 54 dargestellte Krystall No. 54 (Werner-Museum No. 522) ist kürzer als der vorige, lichter an Farbe und einfacher von Gestalt. Seine Seitenflächen werden durch die mit einander oscillatorisch combinirten Prismen ∞P und $\infty \breve{P}2$ gebildet; an der oberen Spitze findet sich einzig und allein die Pyramide P, deren stark glänzende Flächen ein schwach schuppiges Aussehen zeigen; das untere Ende wird von einem Durchgange begrenzt.

Die Pyramidenflächen am oberen Ende sind stark negativ; dagegen zeigt sich die untere Durchgangsfläche in ihrer Ausdehnung nicht minder stark positiv; eine Erscheinung, wie sie, wenn auch nicht in gleich hohem Grade, nur noch an dem Krystall No. 58 aufgetreten ist. Die Seitenkante (4. 1) erscheint in ihrer ganzen Länge negativ, dagegen findet sich auf der Kante (2. 3) nur an ihrem oberen Ende negative, am unteren aber positive Elektricität; die beiden brachydiagonalen Seitenkanten (1. 2) und (3. 4) sind in ihrer ganzen Erstreckung positiv.

Krystall No. 55.

Der Krystall No. 55 (Werner-Museum No. 529) ist Fig. 55 in seinen Projectionen abgebildet; er stellt eine Combination von ∞P, $\infty \breve{P}2$; $\frac{1}{2}P$, $\frac{1}{3}P$, P; $\frac{1}{4}\bar{P}2$ (?); $2\breve{P}\infty$; und $\frac{1}{3}\bar{P}\infty$ dar. Unter den Pyramiden besitzen die Flächen von $\frac{1}{2}P$ die grösste Ausdehnung. Das untere Ende ist von einer Durchgangsfläche begrenzt.

Die Pyramidenflächen des oberen Endes sind negativ, ebenso die untere Durchgangsfläche mit Ausnahme einer Stelle am Rande (von der Kante (3. 4) bis zur Mitte der Fläche 3); indess ist die negative Polarität des unteren Endes sehr viel schwächer als die des oberen. Die Kante (4. 1) zeigte sich bei specieller Prüfung nur in ihrem obersten Drittel negativ, in den unteren zwei Drittheilen aber positiv; die gegenüberliegende Kante (2. 3) war negativ, nur erschien $\frac{1}{3}$ vom oberen Ende eine kleine positive Stelle.

Krystall No. 56.

Der Krystall No. 56 (Werner-Museum No. 480) ist an Farbe mehr goldgelb als die beiden vorhergehenden; er wird von folgenden

Gestalten: ∞P, $\infty \breve{P}2$; $\frac{1}{4}P$, $\frac{1}{3}P$, P; $\frac{1}{3}\bar{P}\infty$ gebildet und am unteren Ende von einer Durchgangsfläche begrenzt. Unter den Pyramidenflächen besitzen die Flächen von $\frac{1}{3}P$ die grösste Ausdehnung.

Auf der unteren Durchgangsfläche tritt in der Nähe beider brachydiagonalen Kanten positive Elektricität auf.

Krystall No. 57.

Der ausserordentlich klare Krystall No. 57 Fig. 57 besteht ebenso wie der Krystall No. 54 aus einer einfachen Combination ∞P, $\infty \breve{P}2$ und P; das untere Ende der Hauptaxe wird von einer mangelhaft gestalteten drusigen Fläche gebildet. Auf der unteren Hälfte der Fläche 2 ist ein kleiner Krystall in paralleler Stellung zu dem grossen eingewachsen.

Das obere Ende sammt den Pyramidenflächen ist negativ; die drusige Fläche am unteren Ende besitzt in der Richtung der Brachydiagonale eine positive Zone, während die nach den beiden makrodiagonalen Kanten liegenden Stücke negativ erscheinen. Die Seitenflächen 1, 2 und 3 zeigen in dem obersten Drittel negative, in den übrigen zwei Dritteln positive Elektricität; nur auf der Fläche 3 ist unten neben der makrodiagonalen Kante (2. 3) noch eine kleine negative Stelle. Die beiden brachydiagonalen Seitenkanten sind in ihren oberen zwei Fünfteln negativ, im Uebrigen positiv; die makrodiagonalen Seitenkanten zeigen negative Polarität, jedoch mit Ausnahme einer ungefähr $\frac{1}{4}$ ihrer Länge betragenden positiven Stelle, welche auf der Kante (4. 1) in der Mitte, auf der Kante (2. 3) aber etwas unterhalb der Mitte liegt.

Krystall No. 58.

Der Fundort des Krystalles No. 58 (Werner-Museum No. 527) ist nicht angegeben, kann aber nach dem ganzen Aussehen des Krystalles kein anderer als Mughla sein. Die Farbe dieses Krystalles ist weisser als bei den vorhergehenden, die Klarheit aber geringer; er stellt eine Combination der Gestalten ∞P; $\infty \breve{P}2$; $\frac{1}{2}P$, $\frac{1}{3}P$ und P dar. Sein unteres Ende wird von einem Durchgange begrenzt, der jedoch in der Nähe der Kante (2. 3) in eine Bruchfläche übergeht.

Die elektrische Vertheilung auf den Flächen ist Fig. 58 abgebildet. Ebenso wie bei dem Krystall No. 54 ist der Durchgang am unteren Ende in seiner ganzen Ausdehnung positiv. Von den makrodiagonalen Kanten war bei specieller Untersuchung die Kante (2. 3) in ihrer ganzen

Länge negativ, während auf der gegenüberliegenden Kante (4. 1) nur die oberen zwei Drittel negativ, das untere Drittel aber positiv war. Von den positiven brachydiagonalen Seitenkanten zeigte die Kante (1. 2) oben und die Kante (3. 4) in der Mitte eine negative Stelle.

V. Zersprengte und geschliffene Topaskrystalle.

Zu weiterer Erkenntniss der thermoelektrischen Erscheinungen wird es wesentlich beitragen, wenn wir die Form von Krystallen, deren elektrisches Verhalten durch vorhergegangene Beobachtungen genau bekannt ist, durch Zersprengen oder Schleifen abändern, und die hierdurch eingetretene Aenderung der elektrischen Vertheilung ermitteln. Leider fehlt es in Leipzig an einem Künstler, welcher Edelsteine zu schneiden und zu schleifen versteht; es musste deshalb das Abschleifen der Topase auf der Scheibe einer gewöhnlichen Drehbank geschehen.

Als Beispiele für die durch Aenderung der äusseren Gestalt bewirkte Modification in der elektrischen Vertheilung können bereits die im Vorstehenden mitgetheilten Beobachtungen an Krystallen, welche an dem einen oder an beiden Enden von Durchgangsflächen begrenzt sind, betrachtet werden, wenn wir sie mit den an anderen ringsum vollkommen ausgebildeten Krystallen ausgeführten vergleichen; auch die auf den bisher untersuchten, mehr oder weniger an den Seitenflächen und Kanten gleich bei ihrer Bildung oder später durch äussere Kräfte verletzten Krystallen gemachten Beobachtungen belehren uns in gewisser Weise über jene Veränderungen. Im Folgenden theile ich die Untersuchungen an zersprengten oder geschliffenen Krystallen mit, welche den Vortheil bieten, dass die an den Bruchstücken ausgeführten Beobachtungen mit den am ursprünglichen, wenn auch nicht ringsum vollkommen ausgebildeten Krystalle angestellten verglichen werden können, und also direct den Einfluss der Gestaltänderungen nachweisen.

a. Allgemeine Uebersicht der eintretenden Veränderungen.

Während, soviel wenigstens gegenwärtig bekannt ist, eine Aenderung an den äusseren Begrenzungen der Turmalinkrystalle die polare Vertheilung nach der Hauptaxe derselben fortbestehen lässt, und also auf die Qualität der erzeugten Elektricitäten keinen Einfluss

zu haben scheint, treten beim Topase durch Abänderungen der äusseren Gestalt sehr starke Veränderungen in seinem elektrischen Verhalten ein.

Gehen wir von einem ringsum vollkommen auskrystallisirten sächsischen oder Adun-Tschiloner Topase aus, dessen Hauptaxe an ihren Enden positive Elektricität zeigt, und beginnen eines dieser Enden z. B. das obere allmählig abzuschleifen (oder in der Nähe desselben einen Durchgang anzuschlagen), so nimmt zunächst die positive Elektricität auf dieser Fläche ab; bei weiterem Abschleifen tritt dann auf der neuen Fläche, nachdem sie zuvor unelektrisch erschienen, negative Polarität hervor, während auf den Resten der Flächen des Brachydomas $2\breve{P}\infty$ noch positive sich findet, bis zuletzt nach dem Verschwinden dieser Flächen die angeschliffene Fläche in ihrer ganzen Erstreckung negativ erscheint (vergl. S. 390 u. 407).

Sind, wie bei den meisten brasilianischen Topasen die Enden der Hauptaxe negativ, so behalten die Krystalle auf den senkrecht gegen diese Axe eingeschliffenen Flächen oder angeschlagenen Durchgängen die negative Elektricität; nur finden sich öfter auf denselben in der Nähe der brachydiagonalen Seitenkanten positive Stellen (vergl. S. 390).

Diese positiven Stellen nehmen bei den kleinasiatischen Krystallen an Ausdehnung zu, und es liegen, wie kurz zuvor schon erwähnt, zwei Fälle (bei den Krystallen No. 54 und No. 58) vor, wo die Durchgangsfläche am unteren Ende in ihrer ganzen Erstreckung sehr starke positive Elektricität zeigte. Als an einem brasilianischen Krystalle die ausgebildete negative Spitze abgeschlagen, also ein ähnliches Krystall-Bruchstück von sehr kurzer Hauptaxe und negativer Spitze wie No. 54 gebildet wurde, konnte jedoch auf der sein unteres Ende bildenden Durchgangsfläche überall nur negative Elektricität gefunden werden.

Die beiden Durchgangsflächen, in welchen ein Topas senkrecht auf seine Axe durchgesprengt wird, verhalten sich nicht gleich; sie sind, je nach der Stellung, welche sie im unverletzten Krystalle einnahmen, entweder beide negativ aber von verschiedener Stärke, oder während die eine in ihrer ganzen Ausdehnung negativ erscheint, zeigt die andere je nach ihrer Lage zum ganzen Krystall noch positive Stellen.

Wird an einem Topaskrystalle eine negative makrodiagonale Kante durch eine mit dem brachydiagonalen Hauptschnitte parallele Fläche abgestumpft, so zeigt die angeschliffene Fläche, auch wenn sie bis zur Mitte des Krystalles vorgedrungen ist, stets negative Elektricität.

Geschieht dagegen bei einem Bruchstücke das Abschleifen an einer positiven brachydiagonalen Kante (parallel dem makrodiagonalen Hauptschnitte), so erscheint die angeschliffene Fläche, wenn sie nur wenig eingedrungen ist, noch positiv; beim weiteren Abschleifen tritt zunächst an ihrem oberen Ende in der Mitte eine negative Zone auf, die sich bei weiterem Abschleifen als verticaler Streifen über die Fläche hinabzieht, entweder bis ganz zum unteren Rande, oder auch nur bis zu einem gewissen Abstande von demselben, sodass also in letzterem Falle der untere Rand positiv bleibt; eine Erscheinung, welche mit dem Vorwalten der negativen Elektricität am oberen ausgebildeten Ende eines Bruchstückes zusammenhängt.

Werden gleichzeitig die makrodiagonalen und brachydiagonalen Kanten bis zur Bildung eines verticalen rechtwinkligen Prismas abgeschliffen, so zeigt dieses Prisma auf seinem Umfange einen achtfachen Wechsel der Elektricitäten. Die Mitten der Flächen sind negativ, die Kanten nebst den benachbarten Theilen aber positiv. Auch auf den Endflächen treten diese Abwechselungen noch zum Theil hervor: die Mitten der Endflächen und die Mittelpunkte ihrer Seiten sind stets negativ, dagegen tritt an mehreren (2 bis 3) Eckpunkten die positive Polarität hervor; bei vollkommener Regelmässigkeit würde sie an allen Eckpunkten zu erwarten sein. Der zuvor beschriebene Wechsel ist besonders deutlich auf den oberen Theilen der Seitenflächen und Kanten; dagegen können auf den unteren Theilen einige Wechsel ausfallen; wenn daselbst auf der einen oder der anderen an Stelle der brachydiagonalen Kanten angeschliffenen Flächen, wie zuvor bereits angegeben, noch ein Rest von positiver Elektricität zurückbleibt.

Ein ungefähr mit einer Prismenfläche parallel zersprengter brasilianischer Krystall (No. 64) zeigte die beiden Bruchflächen, die ziemlich eben, aber rauh oder vielmehr hackig waren, stark negativ, während nach dem Aneinanderlegen beider Stücke die Untersuchung der äusseren Oberfläche des so zusammengesetzten Krystalles die gewöhnliche Vertheilung ergab. Auch auf den Flächen der einzeln untersuchten Stücke war, mit Ausnahme der Bruchfläche, die elektrische Vertheilung qualitativ dieselbe, wie auf denselben Flächen am zusammengelegten Krystall.

In gleicher Weise, wie die beiden Bruchflächen des eben erwähnten Krystalles verhielten sich die Flächen, mit welchen ein kleines dünnes Stück aus der Fläche des horizontalen Prismas $2\breve{P}\infty$ eines

Adun-Tschiloner Krystalles herausgesprungen war: während die letztgenannte Krystallfläche sowohl am kleinen als auch an dem grösseren Stücke eine stark positive Elektricität zeigte, waren die Bruchflächen an beiden Stücken, die zuvor auf einander gesessen hatten, negativ, wenn auch in verschiedener Stärke.

Das Abschleifen der Prismenflächen, parallel mit ihrer ursprünglichen Lage, bei brasilianischen Krystallen scheint die negative Polarität weiter auszudehnen.

Flächen, welche an einem brasilianischen Bruchstücke in der Richtung der Flächen des horizontalen Prismas $2\breve{P}\infty$ auf den Endpunkten der makrodiagonalen Kanten angeschliffen wurden, zeigten ebenso wie die früheren Endpunkte dieser Kanten, negative Elektricität.

b. Beobachtungen.

α. Senkrecht gegen die Hauptaxe zersprengte und geschliffene Krystalle.

1. Der oben S. 401 beschriebene und Fig. 9 abgebildete sächsische Topas No. 9 zeigte ungefähr in der Mitte seiner Höhe einen ziemlich quer durch seine ganze Masse hindurchgehenden Sprung. Es gelang, in dieser Ebene den Krystall in zwei Stücke zu zersprengen, ohne diese beiden Stücke sonst weiter zu verletzen; die beiden Flächen, welche durch die Trennung entstanden waren, passten also genau auf einander.

Die am oberen Stücke entstandene Durchgangsfläche zeigte negative Elektricität, und zwar in der Mitte und nach den Kanten (4. 1), (1. 2) und (2. 3) hin von ziemlich gleicher Stärke; dagegen nahm diese Elektricität nach der Kante (3. 4) hin ab.

Die obere Fläche des unteren Stückes, welche an der unteren Fläche des oberen Stückes angelegen hatte, bot an ihrem Umfang gleichfalls überall negative Elektricität dar, und entsprach in Bezug auf Stärke derselben darin dem Verhalten der unteren Fläche des oberen Stückes, dass die negative Elektricität nach der Kante (3. 4) hin abnahm. Während aber die Mitte der unteren Fläche des oberen Stückes ziemlich stark negativ elektrisch war (— 1,6 Skth.), wurde auf der Mitte der oberen Fläche des unteren Stückes, wenn die ganze Fläche frei aus dem Kupferfeilicht heraussah, nur eine sehr geringe negative Intensität (— 0,1 Skth.) wahrgenommen. Dieselbe konnte leicht von einer Vertheilungswirkung, seitens der umliegenden negativen Theile herrühren;

ich deckte deshalb die Ränder der Fläche mit Kupferfeilicht und liess nur die Mitte derselben frei: auf diese Weise wurde in der That eine sehr schwache positive Spannung in der Mitte wahrgenommen.

2. An dem früher S. 402 näher beschriebenen sächsischen Topaskrystalle No. 10 wurde, wie gleich nachher unter 7 berichtet werden wird, die brachydiagonale Kante (1. 2) abgeschliffen, und dann später die obere Spitze soweit abgesprengt, dass noch ein kleiner Theil der Fläche des brachydiagonalen horizontalen Prismas $2\breve{P}\infty$ an dem unteren Stücke sichtbar blieb. Von den beiden auf diese Weise entstandenen Durchgangsflächen war die untere Fläche am oberen dünnen Stück in ihrer ganzen Ausdehnung negativ, dagegen glich die obere Fläche des unteren grösseren Stückes in ihrem elektrischen Verhalten der entsprechenden Fläche des ähnlich geformten Stückes No. 16 (S. 405): die Fläche war zum grössten Theile negativ, doch erschien der an den Rest der Fläche von $2\breve{P}\infty$ grenzende Theil positiv.

3. Krystall No. 59. Ein in dem Vorhergehenden nicht beschriebener sächsischer Topas No. 59 von ungefähr 9^{mm} Länge in der Richtung der Axe trug am oberen Ende die gewöhnlichen Pyramidenflächen und eine grosse sowie eine kleine Fläche von $2\breve{P}\infty$, während das untere Ende von einem Durchgange begrenzt war. Die obere matte Endfläche 0P sowie die Flächen $2\breve{P}\infty$ zeigten ziemlich starke positive Elektricität.

An diesem Krystalle sollte nun die Endfläche in einer gegen die Axe senkrechten Richtung ungefähr 1^{mm} tief abgeschliffen werden; die angeschliffene Fläche hatte aber eine etwas schiefe Lage erhalten.

Die positive Elektricität in der Mitte der angeschliffenen Endfläche war auf weniger als $\frac{1}{8}$ des früheren Werthes vermindert.

Darauf wurde der höhere Theil der angeschliffenen Fläche soweit abgeschliffen, dass die neue Fläche nahe senkrecht gegen die Hauptaxe stand; die durch das zweimalige Abschleifen hinweggenommene Schicht betrug zusammen wohl noch nicht ganz 1^{mm}. Die an die Stelle von 0P getretene Fläche erschien jetzt unelektrisch; dagegen hatten die Reste der beiden Flächen von $2\breve{P}\infty$ ihre positive Natur noch beibehalten. Als schliesslich das Abschleifen soweit fortgesetzt wurde, dass die Höhe des Krystalles nur $7{,}4^{mm}$ betrug, zeigte die angeschliffene Fläche bereits negative Elektricität, während auf dem Reste der grösseren Fläche $2\breve{P}\infty$ sich die positive Spannung noch erhalten hatte.

4. An dem Krystalle No. 54, dessen Seitenflächen nur eine sehr

geringe Länge besassen, wurde die Durchgangsfläche am unteren Ende stark positiv gefunden. Um zu prüfen, welchen Einfluss die Kürze der Seitenflächen bei einem am oberen Ende negativen Topase ausübt, wurde von dem oberen Stücke des bereits in 2 fast gleich grosse Stücke zersprungenen Krystalles No. 44 (S. 429) die obere Spitze, dicht unterhalb der Pyramidenflächen ungefähr in der Fig. 37 mit $\alpha\beta$ angedeuteten punktirten Linie abgesprengt. Bei der Untersuchung ergab sich die an dem obersten kleinen Bruchstücke gebildete Durchgangsfläche überall negativ; die daran angelegen habende Fläche des grösseren Stückes war gleichfalls negativ, und zwar sehr stark.

Ueber das Verhalten zweier in der Mitte von Krystallen mit negativen Axenenden angeschlagenen Durchgänge s. S. 429 und 433.

5. Krystall No. 60. Der Fig. 59 abgebildete Krystall No. 60 glich dem Fig. 19 dargestellten Krystall No. 19 und stammt gleich ihm vom Adun-Tschilon. Bei einer während der früheren Versuche vor 30 Jahren ausgeführten Erhitzung, wobei jener Krystall frei auf einem Bleche lag, zersprang er in drei Stücke.

Fig. 59 *A* stellt den Krystall vor seinem Zerspringen dar. *a c f h k* ist die vordere grosse Fläche von $2\breve{P}\infty$, während die hintere kleinere Fläche derselben Gestalt in der Zeichnung nicht sichtbar wird. *k m h* umfasst die im 4. Quadranten liegenden Seitenflächen, und zwar ist *k m g* die Fläche ∞P, *e g h* die Fläche $\infty\breve{P}2$. An der auf der Rückseite, also in der Figur nicht sichtbaren makrodiagonalen Kante (2. 3) war der Krystall stark verletzt.

Bei der zuvor erwähnten starken Erhitzung sprang erstens der untere Theil *e f p g* in einer durch die Linie *e f* angedeuteten Durchgangsfläche ab.

Die obere Fläche dieses unteren abgesprungenen Stückes von oben gesehen stellt Fig. 59 *C*, die untere Fläche desselben Stückes von unten (d. h. nach einer Drehung um die Brachydiagonale *l f*) gesehen, Fig. 59 *D* dar. Die in Fig. 59 *C* und *D* mit gleichen Buchstaben bezeichneten Ecken liegen also bei verticaler Stellung der Hauptaxe über einander. An dem unteren Stücke sitzt noch ein kleiner Rest *d h* (Fig. 59 *A*) der grossen Fläche $2\breve{P}\infty$, der in Fig. 59 *C* bei *s* sichtbar ist.

Von dem oberen Stücke *a c f l* sprang aber zweitens noch ein kleineres Stück *a b d e l k* aus der linken Seite der grossen Fläche $2\breve{P}\infty$ heraus, das an der rechten Seite bei *b d* in einen scharfen Rand auslief,

während es sich nach der linken hin verdickte und hier die Flächen *a k*, *k l e*, *k e d*, sowie auf der Rückseite einen Theil der Prismenflächen des 3. Quadranten und oben einen kleinen Theil der hinteren Fläche $2\breve{P}\infty$ trug. Die Fläche, in welcher dieses Stück herausgesprungen, zeigte einen unregelmässigen, unebenen Bruch.

Die untere Fläche des sonach verbliebenen oberen Stückes von unten gesehen, stellt Fig. 59 *B* dar. Diese Fläche hat also unmittelbar auf der Fig. 59 *C* dargestellten oberen Fläche des unteren Stückes aufgesessen, und zwar haben die in Fig. 59 *B* und *C* mit denselben Buchstaben bezeichneten Stellen auf einander gelegen. Die Fig. 59 *B* und *C* gezeichneten Flächen können nicht dieselbe Form haben, da auch das kleinere auf der linken Seite des oberen grossen herausgesprungene Stück mit seinem unteren Ende auf der oberen Fläche des unteren Stückes aufgesessen hatte.

Als elektrische Vertheilung im nicht zersprungenen Krystalle dürfen wir die Fig. 19 für den Krystall No. 19 dargestellte nehmen; die Flächen $2\breve{P}\infty$ am oberen Ende sammt den brachydiagonalen Kanten sind also positiv, die untere Durchgangsfläche sammt den makrodiagonalen Kanten negativ.

Am unteren Stücke des zersprungenen Krystalles behielt nun die untere Fig. 59 *D* dargestellte Fläche ihre negative Polarität; die durch den Sprung entstandene obere Fläche dagegen zeigte sich (Fig. 59 *C*) noch zum grössten Theile positiv, nur die linke Seite erschien negativ.

Das obere grössere Stück zeigte bis auf die Stelle *a b d k*, an welcher das zuvor beschriebene kleinere Stück herausgesprungen war, die gewöhnliche Vertheilung, d. h. seine untere Fläche (Fig. 59 *B*) war negativ, und der noch unverletzte Theil *b c f d* der Fläche $2\breve{P}\infty$ stark positiv (beobachtetes Maximum des Ausschlages + 48,5 Skth. in Fig. 59 *A*). Dagegen erschien die Stelle, an welcher das kleinere Stück herausgesprungen war, negativ (jedoch stieg deren Stärke nur bis —7,2 Skth.).

Das kleinere Bruchstück *a b d e* war auf der Fläche $2\breve{P}\infty$ positiv; (es sind die Beobachtungen auf dieser Fläche in Fig. 59 *A* in den Raum *a b d k* eingetragen worden); gleichfalls positiv zeigten sich die vorhandenen Reste der seitlichen Prismenflächen. Dagegen erschien die kleine, am unteren Ende vorhandene Durchgangsfläche negativ; besonders stark negativ aber war die durch das Abspringen entstandene hintere Bruchfläche: in der Mitte dieser letzteren betrug das beobachtete

Maximum — 41,0 Skth., während das Maximum auf der anderen Bruchfläche, auf welcher diese Fläche angesessen hatte, wie zuvor schon angegeben, nur — 7,2 Skth. erreichte.

β. Anschleifen der makrodiagonalen Seitenkanten.

6. An dem Krystallbruchstücke No. 16, dessen Netz Fig. 16 in vierfach linearen Dimensionen dargestellt ist, wurde die makrodiagonale Kante (2. 3), die in ihrem ganzen Verlaufe negativ gewesen war, parallel mit dem brachydiagonalen Hauptschnitte soweit abgeschliffen, dass von den Flächen 2 und 3 nur die Hälfte übrig blieb. Die durch das Anschleifen entstandene Fläche, welche an die Stelle der negativen Kante getreten war, zeigte sich negativ, und es erhielt sich diese Polarität auch, als das Abschleifen bis zur Mitte des Krystalles fortgesetzt wurde, auf der ganzen Fläche des jetzt blosgelegten brachydiagonalen Hauptschnittes.

Die dieser angeschliffenen Fläche gegenüberliegende makrodiagonale Kante (4. 1) war negativ, und die beiden von den Flächen 1 und 4 mit der angeschliffenen Fläche gebildeten halbirten brachydiagonalen Kanten positiv; es hatten diese drei Kanten also ihre frühere Polarität behalten.

γ. Anschleifen der brachydiagonalen Kanten.

7. An dem Krystalle No. 10 war bei specieller Prüfung die brachydiagonale Kante (1. 2) ihrer ganzen Länge nach positiv gefunden worden. Von den beiden sie bildenden Flächen ∞P war die linke (im 1. Quadranten liegende) Fläche 3,8^{mm} und die rechte (im 2. Quadranten liegende) 1,7^{mm} breit. Es wurde nun die genannte Kante parallel dem makrodiagonalen Hauptschnitte zunächst so weit abgeschliffen, dass von der rechten, schmaleren Fläche ∞P nur noch ein kleiner Rest zu sehen war. Bei der Prüfung fand sich die kleine durch Abschleifen entstandene Fläche noch positiv.

Darauf wurde das Schleifen, stets dem makrodiagonalen Hauptschnitte parallel, so weit fortgesetzt, bis von der linken grösseren Fläche von ∞P kaum noch ein Rest zu sehen war. Eine erneute Prüfung ergab die durch Abschleifen entstandene Fläche bereits ungefähr ebenso stark negativ, als zuvor die Kante positiv erschienen war; doch nahm die negative Polarität auf dieser Fläche von oben nach unten hin ab; sie

erreichte unten nur $\frac{1}{8}$ bis $\frac{1}{10}$ der am oberen Rande beobachteten Intensität.

8. Die brachydiagonale Kante (3. 4) am Krystalle No. 11 hatte sich bei specieller Prüfung ihrer ganzen Länge nach als positiv ergeben. Sie wurde parallel mit dem makrodiagonalen Hauptschnitte abgeschliffen, und zwar drang das Schleifen verhältnissmässig etwas tiefer in den Krystall ein als der zweite Schliff an dem zuvor beschriebenen Krystalle No. 10.

Die angeschliffene Fläche erschien in ihrer ganzen Ausdehnung negativ, und zwar ebenso wie bei dem soeben beschriebenen Krystalle, am oberen Ende stärker als am unteren; das Verhältniss der Intensitäten am oberen und unteren Rande war ungefähr dasselbe wie zuvor bei dem Krystalle No. 10.

9. Die brachydiagonale Kante (1. 2) des Krystalles No. 12 war bei specieller Prüfung ihrer ganzen Länge nach positiv gefunden worden. Sie wurde durch eine mit dem makrodiagonalen Hauptschnitte parallele Fläche noch weiter abgeschliffen als bei dem vorhergehenden Krystalle, sodass selbst von den an den makrodiagonalen Seitenkanten liegenden Flächen von $\infty\breve{P}2$ nur geringe Reste übrig blieben. Die ganze angeschliffene Fläche gab negative Elektricität, und ebenso wie bei den früheren, oben stärkere als unten, doch war der Unterschied nicht so bedeutend als auf den beiden früheren Krystallen; die Intensität am unteren Rande stieg bis auf ungefähr die Hälfte der am oberen Rande beobachteten.

10. Die bisherigen Beobachtungen über die durch Formveränderungen erzeugten Modificationen der elektrischen Vertheilung waren mit Ausnahme von 4 an sächsischen und sibirischen Krystallen ausgeführt worden; die folgenden beziehen sich ausschliesslich auf brasilianische Krystalle.

Krystall No. 61. An dem Bruchstücke eines brasilianischen Krystalles No. 61, dessen Projectionen und Endflächen Fig. 60 *A* und *B* dargestellt sind, zeigte sich die gewöhnliche Vertheilung der Elektricitäten. Die beiden Endflächen (Durchgänge*) sammt den makrodiagonalen Kanten waren negativ, die brachydiagonalen Kanten sammt

*) Während die obere Durchgangsfläche glänzend war, erschien die untere etwas matt, als ob sie kein Durchgang, sondern eine Krystallfläche wäre.

dem grössten Theile der Prismenflächen positiv. Hiernach war also die brachydiagonale Kante (3. 4) in ihrem ganzen Verlaufe positiv, wie dies auch die Fig. 60, welche die Beobachtungen auf den Kanten und Endflächen enthält, darstellt. Diese Kante wurde nun parallel mit dem makrodiagonalen Hauptschnitte so weit abgeschliffen, dass von den Seitenflächen 3 und 4 nur ungefähr die Hälfte übrig blieb. Die durch Anschleifen entstandene Fläche entwickelte ebenso wie früher die an ihrer Stelle befindliche Kante starke positive Elektricität. Ueberhaupt schien die früher an dem ursprünglichen Bruchstücke beobachtete Vertheilung durch das Abschleifen der Kante (3. 4) im Wesentlichen nicht geändert worden zu sein.

Das Abschleifen der Kante (3. 4) wurde dann weiter fortgesetzt, sodass von den Prismenflächen 3 und 4 nur ungefähr $\frac{1}{8}$ sichtbar blieb. Jetzt erschien der mittlere Streifen der angeschliffenen Fläche stark negativ, Fig. 60 *C*, jedoch von oben nach unten in abnehmender Stärke;*) ihre seitlichen Ränder und ebenso die von ihr mit den Resten der Flächen 3 und 4 gebildeten Kanten zeigten sich stark positiv und zwar von oben nach unten in zunehmender Stärke. Die noch stehen gebliebenen makrodiagonalen Kanten (2. 3) und (4. 1) und die beiden Durchgangsflächen am oberen und unteren Ende erschienen wie vor dem Abschleifen negativ.

11. Krystall No. 62. An einem mir von Herrn G. Rose übersandten Krystallbruchstücke No. 62 (Fig. 61) war die eine Hälfte in einer mit dem makrodiagonalen Hauptschnitte parallel gehenden Richtung durch Abschleifen entfernt, so dass ein dreiseitiges Prisma entstanden war. Das Bruchstück wurde seitlich (Fig. 61) von den Prismenflächen 1 und 2, und der an die Stelle von 3 und 4 getretenen geschliffenen Fläche *S* begrenzt; die Gestalt seines Querschnittes ergibt sich aus den beiden mit *A* und *B* bezeichneten Durchgangsflächen am oberen und unteren Ende.

Die Flächen 1 und 2 waren positiv, ebenso die Kante (1. 2); dagegen erschien die angeschliffene Fläche *S* überall stark negativ, mit

*) Wurde die ganze Fläche mit Ausschluss der Mitte des unteren Randes mit Kupferspähnen bedeckt, so liess sich an dem unteren Rande selbst schwache positive Elektricität nachweisen, so dass die in Fig. 60 *C* daselbst verzeichnete negative Polarität nur von einer Seitenwirkung der daneben liegenden stark negativen Stellen herrührt.

Ausnahme einer sehr kleinen Stelle *a* unten links am Rande nach 2 hin wo die positive Elektricität etwas herübergriff. Um hier die positive Elektricität wahrzunehmen, musste die ganze übrige Fläche mit Eisenfeilicht bedeckt werden. Die Kante (S. 1) war ihrer ganzen Länge nach negativ; die Kante (2. S) dagegen nur oben negativ, in ihrem unteren Theile, der etwas verletzt erschien, aber positiv, und hier war es auch, wo, wie schon erwähnt, auf den benachbarten Theilen der Fläche S positive Polarität nachgewiesen werden konnte.

δ. Anschleifen parallel dem makrodiagonalen und brachydiagonalen Hauptschnitte.

12. Krystall No. 63. Das Fig. 62 in seinem Netze gezeichnete Krystallbruchstück No. 63 hatte sowohl am oberen als auch am unteren Ende eine Durchgangsfläche zur Begrenzung. Die Seitenflächen waren ziemlich erhalten; jedoch war die makrodiagonale Seitenkante (2. 3), wie die betreffende Stelle in Fig. 62 zeigt, stark verletzt, und schwächere Verletzungen fanden sich oben auf der makrodiagonalen Kante (3. 4) und unten an der brachydiagonalen Kante (1. 2).

Die elektrische Vertheilung auf diesem Krystalle war, wie bei den meisten brasilianischen Topasen ungemein stark. Wenn er z. B. bis auf eine der Durchgangsflächen in Eisenfeilicht gehüllt war, so sprangen oft seitlich gelegene Eisentheilchen, durch die auf dieser Fläche entwickelte negative Elektricität angezogen, auf diese Fläche. Um die Vertheilung näher kennen zu lernen, wurde die Anzahl der Elemente in der Volta'schen Säule, deren Pole mit den zu beiden Seiten des Goldblättchens befindlichen Messingscheiben verbunden waren, sehr vermindert. Die in das Netz Fig. 62 eingetragenen Zahlenwerthe sind also mit den früher bei den übrigen Krystallen gemachten Angaben nicht vergleichbar.

Die elektrische Vertheilung zeigte nichts Abweichendes. Die beiden Endflächen waren negativ, die Prismenflächen fast in ihrer ganzen Ausdehnung positiv. Bei specieller Untersuchung der Kanten erschienen die beiden makrodiagonalen Kanten aber negativ, wie dies schon bei der Prüfung der Fläche 4 für die Kante (4. 1) hervortrat. Die auf der etwas verbrochenen Kante (2. 3) gemachten Beobachtungen sind in Fig. 62 *B*.

besonders angegeben: die Kante oder die an ihrer Stelle entstandene Bruchfläche war negativ, während zu beiden Seiten die positive Elektricität wieder hervortrat.

An diesem Krystalle wurde nun zunächst die verbrochene makrodiagonale Kante (2. 3) parallel dem brachydiagonalen Hauptschnitte soweit abgeschliffen, dass eine 9^{mm} breite Fläche entstand. Der linke Rand und die rechte untere Ecke dieser Fläche waren positiv, der übrige grössere Theil derselben aber negativ.

Darauf wurde die brachydiagonale Kante (3. 4) parallel dem makrodiagonalen Hauptschnitte so weit abgeschliffen, dass eine 11^{mm} breite Fläche entstand. Diese neue Fläche kam noch nicht mit der zuvor geschliffenen Fläche zum Durchschnitt, sondern es blieb zwischen ihren nächsten Rändern noch ein 1,5^{mm} breiter Streifen der ursprünglichen Prismenfläche 3 übrig. Diese neu angeschliffene Fläche erschien noch überall positiv, jedoch in der Mitte schwächer als an den seitlichen Rändern; auch war die positive Intensität am oberen Rande schwächer als am unteren.

13. Krystall No. 64. Ein schönes regelmässiges Bruchstück eines brasilianischen Topases von nahe 20^{mm} Höhe No. 64, das am oberen und unteren Ende von ebenen Durchgangsflächen begrenzt war, wurde auf seine elektrische Vertheilung untersucht. Dieselbe ergab sich als die gewöhnliche, und zwar in sehr regelmässiger Weise; die brachydiagonalen Kanten nebst den grössten Theilen der Seitenflächen waren also positiv, dagegen die makrodiagonalen Kanten sammt den Endflächen negativ mit Ausnahme einer kleinen Stelle auf der unteren Endfläche in der Nähe der brachydiagonalen Kante (3. 4), welche positive Elektricität darbot.

An diesem Bruchstücke wurden nun nach einander sämmtliche vier Seitenkanten in der Reihenfolge (3. 4), (1. 2), (2. 3) und (4. 1) parallel mit den betreffenden Hauptschnitten angeschliffen, sodass schliesslich ein quadratisches Prisma von nahe 8^{mm} Seite übrig blieb. Die angeschliffenen Flächen kamen noch nicht mit einander zum Durchschnitt, sondern zwischen ihren nächsten Seitenlinien lag ein ungefähr 0,5^{mm} breites Stück der ursprünglichen Prismenflächen.

Jede angeschliffene Fläche wurde sofort nach ihrer Herstellung untersucht, und dann das Schleifen der nächsten Fläche begonnen.

In Fig. 63 stellt a die an die Stelle der Kante (4. 1) getretene Fläche dar; und ebenso entsprechen die Flächen b, c und d der Reihe nach den früheren Kanten (1. 2), (2. 3) und (3. 4); e und f sind die stehen gebliebenen Reste der Endflächen. In diese Zeichnungen sind die Beobachtungen auf den freiliegenden Flächen eingetragen; d' enthält die nach Bedeckung der seitlichen Ränder der Fläche d mit Kupferfeilicht in der Mitte dieser Fläche beobachteten elektrischen Spannungen.

Die Resultate dieser Beobachtungen lassen sich kurz zusammenfassen. Im Allgemeinen waren die neu gebildeten Flächen in ihren mittleren Streifen negativ, an den Rändern positiv; nur erschien die Fläche (2. 3) auch am linken Rande negativ, und die Flächen (1. 2) und (3. 4) unten in der Mitte noch positiv; bei der Fläche (3. 4) mussten aber die seitlichen positiven Ränder zugedeckt werden, um in den obern drei Viertheilen ihrer Mitte die negative Elektricität (Fig. 63 d') nachzuweisen,*) was bei Untersuchung der Fläche (1. 2) nicht nöthig war. Die obere und untere Durchgangsfläche zeigten sich im Ganzen negativ (Fig. 63 e und f), doch wurden auf der obern die den früheren Flächen 2 und 3, und auf der untern die den früheren Flächen 3 und 4 entsprechenden Eckpunkte positiv gefunden.

14. Krystall No. 65. Ein anderes Krystallbruchstück eines brasilianischen Krystalles No. 65 von 22,5^m Höhe, das oben von einer ebenen Durchgangsfläche und unten von einer drusigen Endfläche begrenzt war, zeigte bei der Untersuchung eine sehr regelmässige elektrische Vertheilung in der gewöhnlichen Weise. Es wurden dann seine vier Seitenkanten in der Reihenfolge (2. 3), (4. 1), (1. 2) und (3. 4) parallel mit den betreffenden Hauptschnitten abgeschliffen, und nach Herstellung jeder Fläche dieselbe untersucht, und darauf erst die folgende in Arbeit genommen. Während bei dem vorhergehenden Krystalle mit einer brachydiagonalen Kante begonnen, wurde bei dem vorliegenden mit einer makrodiagonalen Kante der Anfang gemacht. Nach dem Anschleifen der sämmtlichen vier Flächen, die aber ebenso wie zuvor mit einander noch nicht zum Durchschnitt kamen, blieb ein ungefähr quadratisches Prisma von 7^{mm} Seite übrig.

Die Resultate der Untersuchung der einzelnen durch das Schleifen

*) Neben der Kante (3. 4) zeigte sich in dem ursprünglichen Krystallbruchstück auf der unteren Endfläche, wie bereits oben bemerkt, positive Elektricität.

gebildeten Flächen entsprachen im Allgemeinen den über das vorhergehende Krystallbruchstück gemachten Angaben. Die Ränder der an die Stelle der Kanten (4. 1), (1. 2) und (3. 4) getretenen Flächen zeigten positive, die Mitten von oben nach unten hin abnehmende negative und unten in die positive übergehende Elektricität. Wurden die positiven Ränder bedeckt, so erschienen die frei gelassenen mittleren Streifen der Flächen (4. 1) und (1. 2) ihrer ganzen Länge nach negativ, und nur auf der Fläche (3. 4) blieb am unteren Ende eine positive Stelle zurück. Die an die Stelle der Kante (2. 3) getretene Fläche war in ihrer ganzen Ausdehnung negativ.

ε. Zersprengen und Anschleifen parallel einer Fläche des Prismas ∞P.

15. Krystall No. 66. Fig. 64 stellt einen brasilianischen Krystall senkrecht gegen eine Fläche (4) gesehen dar. Am unteren Ende ist derselbe von einer drusigen Endfläche begrenzt; am oberen Ende bilden zwei ebene Durchgänge $\alpha\delta$ und $\gamma\beta$ die Begrenzung; dieselben liegen nicht in einer Ebene, sondern der nach rechts gelegene Theil $\alpha\delta$ bildet einen um 7,5^{mm} tieferen Absatz.

Als ich versuchte den diesen Absatz überragenden dickeren Theil $\delta\gamma$ abzuschlagen, zersprang der Krystall in zwei Stücke ungefähr parallel mit den Prismenflächen 1 und 3 in der durch die Zeichnung angedeuteten Linie $\delta\varepsilon$. Die durch den Sprung entstandenen Flächen waren etwas uneben, und passten, weil sich keine Splitter abgelöst hatten, genau auf einander.

Die beiden Bruchstücke wurden wieder genau an einander gelegt und der zusammengesetzte Krystall untersucht; er zeigte die gewöhnliche elektrische Vertheilung, d. h. der grösste Theil der Seitenflächen sowie die brachydiagonalen Kanten erschienen positiv, die Endflächen nebst den makrodiagonalen Kanten negativ.

Darauf wurden die beiden Stücke einzeln geprüft, und auf den unverletzt gebliebenen Theilen ihrer Oberflächen nahe dieselbe Beschaffenheit der Elektricität gefunden, wie an den zusammengelegten Krystallen; dagegen zeigte sich die durch den Sprung entstandene Fläche an beiden Stücken sehr stark negativ.

16. Krystall No. 67. Ein brasilianischer Topaskrystall von 30^{mm} Höhe war an beiden Enden von einer drusigen Fläche begrenzt; der grösste Theil derselben zeigte sich negativ; auf der oberen Fläche

fand sich nur gegen das Ende der Kante (4. 1) und auf der unteren Fläche neben der Fläche 1 und in der Nähe der Kante (3. 4) positive Elektricität.

Die Prismenfläche 2 dieses Krystalles war nach innen gewölbt; bei ihrer Untersuchung ergab sich der grösste Theil positiv, nur am rechten Rande (in der Nähe der makrodiagonalen Kante (2. 3) wurde negative Elektricität beobachtet; diese negative Zone nahm am oberen Ende ungefähr ein Drittel der Breite ein, und verschmälerte sich abwärts, sodass sie von oben her gerechnet in drei Viertheilen der Kante (2. 3) verschwand, und das untere Viertel des rechten Randes an dieser Kante positiv erschien.

Es wurde nun die Fläche 2 um beinahe 2^{mm} abgeschliffen, sodass eine ebene mit der Fläche 4 parallele Fläche entstand. Durch das Abschleifen zeigte sich bei nachfolgender Prüfung die elektrische Vertheilung auf dieser Fläche verändert; die negative Elektricität war soweit gewachsen, dass sie auf der ganzen Fläche erschien, mit alleiniger Ausnahme der unteren linken Ecke, die noch schwach positiv blieb.

Als der Krystall bis auf die Seitenfläche 1 in Kupferfeilicht gehüllt war, wurde auf dieser Fläche überall positive Elektricität beobachtet, wenn auch am linken Rande neben der makrodiagonalen Kante (wegen der dort vorhandenen negativen Spannung) nur in geringer Stärke.

Der Abstand der Seitenflächen 1 und 3 betrug $14{,}6^{mm}$. Es wurde nun die Fläche 1 soweit abgeschliffen, dass der genannte Abstand nur noch $13{,}4^{mm}$ war: bei Untersuchung der angeschliffenen Fläche gelang es jetzt schon in der Mitte des linken Randes neben der makrodiagonalen Seitenkante die negative Polarität zu beobachten, während oben und unten an diesem Rande noch ein schwacher positiver Ausschlag wahrgenommen wurde.

Das Abschleifen wurde darauf weiter fortgesetzt, bis die zuvor bezeichnete Dimension nur $11{,}8^{mm}$ mass. Eine erneute Prüfung zeigte auf der angeschliffenen Fläche ein neues Wachsen der negativen Polarität; längs des ganzen linken Randes und sogar auch in der Mitte der Fläche erschien negative Elektricität und zwar in der Mitte des Randes in ziemlicher Stärke.

Ein noch weiteres Abschleifen um $0{,}4^{mm}$ steigerte die negative Elektricität auf dieser Fläche noch weiter, sodass die negative Polarität oben die ganze Breite derselben einnahm, und die positive Elektricität

nur noch auf die rechte untere Ecke (auf ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse von der Mitte des rechten Randes bis zur Mitte des unteren Randes ging) beschränkt war.

Während das Abschleifen der Fläche 2 sehr bald die neue Fläche negativ erscheinen liess, bedurfte es eines viel tieferen Abschleifens der Fläche 1, um wenigstens auf dem grössten Theile der neuen Fläche eben diese Polarität hervortreten zu lassen.

ζ. *Anschleifen von Flächen in der Richtung* $2\breve{P}\infty$.

17. Krystall No. 68. Ein schöner brasilianischer Krystall (Länge der Hauptaxe 33,6^{mm}, Länge der Makrodiagonale 17,6^{mm}, Länge der Brachydiagonale 14,9^{mm}), der am oberen Ende von einem Durchgange, am unteren aber von einer drusigen Endfläche begrenzt war, zeigte die gewöhnliche Vertheilung in sehr regelmässiger Weise.

Am oberen Ende dieses Krystalles wurden zwei Flächen in der Richtung der Flächen des brachydiagonalen Prismas $2\breve{P}\infty$ in solcher Ausdehnung angeschliffen, dass in der Mitte der oberen Endfläche nur eine 1^{mm} breite Kante (in der Richtung des brachydiagonalen Hauptschnittes) stehen blieb.

Die Untersuchung ergab die angeschliffenen Flächen stark negativ.

Die vorstehenden Untersuchungen über die thermoelektrischen Eigenschaften des Topases haben unsere Kenntniss der Thermoelektricität sehr wesentlich erweitert und berichtigt; ich werde zum Schluss nur noch einige allgemeine Folgerungen aus denselben kurz zusammenstellen.

1. Die Thermoelektricität der Krystalle ist nicht durch den Hemimorphismus bedingt, sondern wahrscheinlich eine allgemeine Eigenschaft aller Krystalle, sobald die übrigen physikalischen Verhältnisse ihr Auftreten und ihre Anhäufung bis zu messbarer Stärke überhaupt gestatten.

2. Da bei nicht hemimorphen Krystallen die beiden Enden einer und derselben Axe krystallographisch gleichwerthig sind, so müssen dieselben sich auch elektrisch gleich verhalten, also dieselbe Polarität zeigen, falls sie eben eine wirklich gleiche Ausbildung erhalten haben.

3. Die Vertheilung der Elektricität auf nicht hemimorphischen Krystallen hängt ausser von dem molecularen Gefüge auch von der

äusseren Gesammtform ab, und kann durch Veränderungen der letztern in bestimmter Weise modificirt werden.*)

4. Wie der Hemimorphismus in der Krystallographie überhaupt als ein Ausnahmefall dasteht, so ist auch das Auftreten polarer (d. h. an den Enden mit entgegengesetzter Polarität erscheinenden) Axen ein Ausnahmefall, der eben durch die hemimorphe Bildung erzeugt wird. Bei hemimorphen Krystallen lässt sich, wenigstens so weit gegenwärtig die Beobachtungen reichen, durch Aenderung der äusseren Form keine qualitative Veränderung in der Vertheilung der Elektricität hervorbringen; letztere ist also wesentlich durch die Unsymmetrie der Molecüle bedingt.

So nahe es auch jetzt schon läge, theoretische Betrachtungen über die Entstehung der Elektricität auf Krystallen bei steigender oder sinkender Temperatur beizufügen, so verspare ich dieselben doch bis nach der Veröffentlichung meiner Untersuchungen über die thermoelektrischen Eigenschaften des Schwerspaths, Aragonits und Titanits, da besonders die Untersuchungen des Schwerspaths infolge seiner stark variirenden äusseren Form uns mannichfache neue Thatsachen liefern werden.

*) Ich vermeide es, schon jetzt bestimmte Gesetze über die durch Aenderung der Form erzeugten Modificationen der elektrischen Vertheilungen aufzustellen. Während bei den sächsischen Topasen es nur gelingt, durch Verletzung der Enden der Hauptaxe und der brachydiagonalen Seitenkanten die daselbst vorhandene positive Elektricität in negative umzuwandeln, scheinen die kleinasiatischen und in gewisser Weise auch die brasilianischen Krystalle mit negativen Enden der Hauptaxe darauf hinzuweisen, dass es bei solchen Krystallen auch möglich ist, durch ein Zersprengen derselben senkrecht gegen die Hauptaxe auf den Durchgängen positive Elektricität hervorzurufen. Ich bin jetzt, nach Vollendung der Untersuchung sehr zahlreicher Krystalle des Schwerspathes von verschiedenen Fundorten und Gestalten damit beschäftigt, den Einfluss künstlicher Formveränderungen auf die elektrische Vertheilung an diesem letzteren Minerale nachzuweisen, und hoffe bei den sehr grossen Verschiedenheiten in der elektrischen normalen Vertheilung auf diesen Krystallen weitere geeignete Unterlagen zur Aufstellung bestimmter Gesetze über den Einfluss äusserer Formveränderungen zu gewinnen.

Berichtigungen.

Seite	368	Zeile	2	von	unten	lies	$2\breve{P}\infty$	statt $2P\infty$.
»	402	»	3	»	»	»	unter 7	» unter 6.
»	403	»	15	»	oben	»	» 8	» » 7.
»	403	»	9	»	unten	»	» 9	» » 8.
»	405	»	18	»	oben	»	4 mal	» 6 mal.
»	432	»	8	»	»	»	Fig. 49 *A*	» Fig. 48 *A*.

BESTIMMUNG

DER

SONNENPARALLAXE

DURCH

VENUSVORÜBERGÄNGE

VOR DER

SONNENSCHEIBE

MIT BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG

DES IM JAHRE 1874 EINTREFFENDEN VORÜBERGANGES.

MIT ZWEI PLANIGLOBEN.

VON

P. A. HANSEN.

§ 1. Allgemeine Theorie.

1.

In dieser Untersuchung werde ich von den Gleichungen und Ausdrücken ausgehen, die ich in der, »Theorie der Sonnenfinsternisse und verwandten Erscheinungen« benannten, Abhandlung*) entwickelt habe, und dabei nur die Modificationen einführen, die die Anwendung der dort für die Sonnenfinsternisse ausdrücklich eingerichteten Gleichungen auf die Venusvorübergänge verlangt. Diese Modificationen sind indessen geringfügig, und reduciren sich fast nur auf die Einführung einer anderen Einheit für die Entfernungen der Erde, Venus und Sonne von einander, so wie für den Halbmesser der Erde, und in einer Aenderung des Zeichens im Ausdruck für den Erzeugungswinkel des Schattenkegels, nebst den davon abhängigen Functionen.

Für die Berechnung der Sonnenparallaxe aus den Beobachtungen habe ich einen strengen Ausdruck erhalten, welcher in einer einfachen quadratischen Gleichung besteht, die allgemein gültig ist. Er gilt sowohl für beobachtete Ein- und Austritte, als für gemessene Ränder- oder Mittelpunktsentfernungen.

Die Differentialgleichung, durch deren Hülfe man die für die Bestimmung der Sonnenparallaxe günstigen Beobachtungsörter von den ungünstigen unterscheiden muss, lässt sich auf eine sehr einfache Form bringen, und es folgt daraus ein sehr einfaches Kriterion für diese Günstigkeit; ein Kriterion, welches der Beobachter stets vor Augen hat. Die allergünstigsten Beobachtungen sind diejenigen, während welcher die Mittelpunkte der Venus und der Sonne sich in einem und demselben

*) Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. Band IV. Leipzig bei S. Hirzel. 1858.

Verticalkreise befinden, also der Positionswinkel der Venus in Bezug auf den Sonnenmittelpunkt, und den durch diesen gelegten Verticalkreis entweder 0 oder 180° ist. Im Gegentheil, Beobachtungen, in welchen dieser Positionswinkel 90° oder 270° ist, sind zur Bestimmung der Sonnenparallaxe absolut untauglich. Werthe des Positionswinkels zwischen diesen und jenen Grenzwerthen können unter Umständen auch günstigen Beobachtungsörtern angehören, aber immer bei kleineren Sonnenhöhen.

2.

In der Theorie der Sonnenfinsternisse war es am dienlichsten, den Aequatorealhalbmesser der Erde als Einheit der Entfernungen anzunehmen, wogegen dieser sich in der Theorie der Venusvorübergänge schon deshalb nicht zur Einheit eignet, weil er die Unbekannte der Aufgabe, die gelöst werden soll, ist. Die Annahme der mittleren Entfernung der Sonne von der Erde als linearische Einheit ist auch nicht passend, weil dadurch die numerischen Werthe mehrerer Grössen, auf welche es sehr ankommt, sehr klein werden, und dadurch Unbequemlichkeiten in ihrer Behandlung verursachen. Es sollen daher hier die in der letzt genannten Einheit auszudrückenden Entfernungen mit einem Factor multiplicirt werden, den ich m nennen, und so wählen werde, dass der Halbmesser des Schattenkegels in der durch den Mittelpunkt der Erde zu legenden Projectionsebene nahe gleich Eins wird*), und somit einen für die Rechnungen bequemen Werth bekommt.

3.

Bezeichnet man nun, wie in der angezogenen Abhandlung (Art. 4) die in Theilen der mittleren Entfernung der Erde von der Sonne ausgedrückten Halbmesser der Venus und der Sonne mit s und s', und nennt den Radius Vector der Venus, so wie die Tafeln ihn geben, r (a. a. O. wurde dieser ϱ' genannt), so wie den Erzeugungswinkel des Schattenkegels f, so wird strenge

$$\sin f = \frac{s' \pm s}{r}$$

wo das obere Zeichen für äussere und das untere für innere Berührungen gilt.

*) Für den Vorübergang des Jahres 1874 wird passend $m = 640$ angenommen werden können.

Werden aber mit Δ und Δ' die Winkel bezeichnet, unter welchen man in der mittleren Entfernung der Erde von der Sonne die Halbmesser der Venus und der Sonne sieht, so sind

$$s = \sin \Delta, \; s' = \sin \Delta'$$

und man bekommt

$$\sin f = \frac{\sin \Delta' \pm \sin \Delta}{r}$$

wo wieder r der tabularische Werth des Radius Vectors der Venus ist.

4.

Wenden wir dasselbe Coordinatensystem an, wie in der angezogenen Abhandlung. Ziehen wir eine grade Linie durch die Mittelpunkte der Venus und der Sonne, und eine Parallele dazu, die durch den Mittelpunkt der Erde geht, und die Achse der Z ist. Legen wir senkrecht darauf eine Ebene, die auch durch den Mittelpunkt der Erde geht, und in welcher die beiden andern, rechtwinkligen Coordinaten P und Q liegen, von welchen P, in der Durchschnittslinie dieser Ebene mit der Ecliptik liegend, in positiver Richtung sich nach Osten und Q nach Norden erstreckt. Sei ferner u' der Halbmesser des Kreises, den der Schattenkegel in der Ebene der P und Q ausschneidet, so ist strenge, wenn man die Einheit aller linearischen Grössen mit m bezeichnet, da u' eine Linie ist,

$$u' = (Z \sin f \pm ms) \sec f$$

aber in den Venusdurchgängen ist das Maximum von f nahe 22′, und deshalb darf man hier $\sec f = 1$ setzen, und Z ist sehr nahe der Entfernung der Venus von der Erde gleich. Nennt man diese Entfernung $r_{,}$, so darf man

$$Z = mr_{,}$$

setzen, und bekommt somit, da auch sehr nahe $r_{,} = r' - r$ ist, wenn r' den tabularischen Radius Vector der Sonne bezeichnet,

$$u' = m\frac{r_{,}}{r} \sin \Delta' \pm m\frac{r'}{r} \sin \Delta$$

Man kann auch f durch u' ausdrücken, und erhält durch die vorstehenden Formeln leicht,

$$\sin f = \frac{1}{mr_{,}} (u' \mp m \sin \Delta)$$

5.

In den strengen Ausdrücken der Coordinaten P, Q, Z des Art. 2 der Abhandlung muss hier statt der Entfernung des Mondes von der Erde (dort r genannt) die Entfernung der Venus von der Erde gesetzt werden. Es werden daher

$$P = mr_{,} \cos b \sin (l - \lambda')$$
$$Q = mr_{,} \{\sin b \cos \beta' - \cos b \sin \beta' \cos (l - \lambda')\}$$
$$Z = mr_{,} \{\sin b \sin \beta' + \cos b \cos \beta' \cos (l - \lambda')\}$$

wo l und b die geocentrische Länge und Breite der Venus, und λ' und β' die aphroditocentrische Länge und Breite der Sonne sind. Da in den Venusdurchgängen immer $\cos (l - \lambda') = 1$ gesetzt werden darf, so dürfen statt der vorstehenden strengen Werthe von Q und Z die folgenden angewandt werden,

$$Q = mr_{,} \sin (b - \beta')$$
$$Z = mr_{,} \cos (b - \beta')$$

oder statt der letzteren

$$Z = mr_{,}$$

von welcher schon im vor. Art. Gebrauch gemacht worden ist. Der strenge Ausdruck von P ist schon so einfach, dass gar keine Abkürzung desselben nöthig ist.

6.

In der Theorie der Sonnenfinsternisse wurde der dort eintretende selenocentrische Ort der Sonne auf den geocentrischen hingeführt, (s. Abh. Art. 19) und dieses liess sich dort auf eine sehr einfache und genaue Weise deshalb bewirken, weil das Verhältniss der Entfernung der Sonne von der Erde zu der des Mondes nahe $= 400 : 1$ ist. Da aber das Verhältniss der Entfernung der Sonne von der Erde zu der der Venus in der unteren Conjunction nahe $= 4 : 1$, so würde im gegenwärtigen Falle eine ähnliche Hinführung des aphroditocentrischen Orts der Sonne auf den geocentrischen misslich werden und die Genauigkeit beeinträchtigen können. Es verursacht aber im gegenwärtigen Falle diese Hinführung gar keine Abkürzung der Rechnung, denn da mit Ausnahme einer kleinen Correction wegen der Aberration die aphroditocentrische Länge der Sonne der um 180° vergrösserten, oder verminderten, heliocentrische Länge der Venus, und jene Breite dieser, mit umgekehrten

Vorzeichen genommen gleich ist, so hat man den erforderlichen Ort der Sonne fast ohne Mühe, da man ohnehin den heliocentrischen Ort der Venus zur Erlangung des geocentrischen berechnen muss.

7.

Es sind nun vor Allem aus den Venustafeln in der Nähe der Conjunctionszeit einige heliocentrische Längen, Breiten und Radien, mit λ, β, r zu bezeichnen, und für dieselben Zeiten aus den Sonnentafeln die Längen, Breiten und Radien, nebst der Schiefe der Ecliptik und die Zeitgleichung zu berechnen. Der Sonnenradius wurde schon oben mit r' bezeichnet, die Sonnenlänge soll l' und die Sonnenbreite b' genannt werden. Aus diesen Grössen müssen darauf die geocentrischen Längen, Breiten und Entfernungen der Venus von der Erde berechnet werden. Diese sollen im Folgenden, wie oben, mit l, b, $r_,$ bezeichnet werden.

Die folgenden Gleichungen finde ich für diese Rechnung bequem,

$$\begin{aligned} r_, \cos b \sin (l - \lambda) &= r' \sin (l' - \lambda) \\ r_, \cos b \cos (l - \lambda) &= r' \cos (l' - \lambda) + r \cos \beta \\ r_, \sin b &= r' \sin b' + r \sin \beta \end{aligned}$$

aber da sowohl diese Gleichungen, wie jede anderen, die man statt derselben anwenden könnte, die wahren Oerter im Raume voraussetzen, so ist die Aberration auf bekannte Weise zu berücksichtigen und anzubringen. Da die Erscheinung des Vorüberganges der Venus vor der Sonne auf den scheinbaren Oertern der Venus und der Sonne beruht, so sind von nun an unter l und b die scheinbaren geocentrischen Längen und Breiten der Venus, so wie unter l' die scheinbaren Längen der Sonne zu verstehen.

8.

Da die anzuwendenden aphroditocentrischen Längen und Breiten der Sonne selbstverständlich jenen, eben genannten scheinbaren Oertern entsprechen müssen, so wird man sie jedenfalls ohne Weiteres aus den bezüglichen strengen Gleichungen, die denen des vor. Art. entsprechen, erhalten können, nemlich wenn sie wieder wie oben mit λ' und β' bezeichnet werden, durch

$$\begin{aligned} r \cos \beta' \sin (\lambda' - l) &= r' \sin (l' - l) \\ r \cos \beta' \cos (\lambda' - l) &= r' \cos (l' - l) - r_, \cos b \\ r \sin \beta' &= r' \sin b' - r_, \sin b \end{aligned}$$

Da aber die Unterschiede, die die Aberration den Werthen $\lambda' - l + 180^0$ und $\beta' + \beta$ hinzufügt, klein sind, so braucht man die vorstehenden Gleichungen nie anzuwenden, sondern kann die Wirkung der Aberration auf λ' und β' durch Differentialformeln berücksichtigen. Sei die

Aberration in Sonnenlänge . . . . . $\delta l'$
» in geoc. Venuslänge . . δl
» in geoc. Venusbreite . . δb

so genommen, dass sie den wahren Oertern hinzugefügt die scheinbaren geben, dann ergeben sich durch die Differentiation der vorstehenden Gleichungen, und mit Berücksichtigung der Grössen, die in der Nähe der Conjunction theils $= 1$ und theils $= 0$ gesetzt werden dürfen,

$$\lambda' = 180^0 + \lambda + \delta l' + \frac{r_,}{r}(\delta l' - \delta l)$$
$$\beta' = -\beta - \frac{r_,}{r}\delta b$$

die jede wünschenswerthe Genauigkeit gewähren.

9.

Die ganze Dauer der zunächst bevorstehenden Venusvorübergänge beträgt beiläufig 4 bis 6 Stunden, und in diesem kurzen Zeitraum sind die Bewegungen der Venus und der Sonne so nahe gleichförmig, dass man sie als vollständig gleichförmig betrachten kann.*) Man reicht daher mit drei Venus- und Sonnenörtern, die Intervallen von zwei oder drei Stunden entsprechen, vollständig aus. Nachdem man daher diese Oerter berechnet hat, rechne man für jeden derselben zuerst die Coordinaten

$$P = mr_, \cos b \sin(l - \lambda')$$
$$Q = mr_, \sin(b - \beta')$$

Die Entfernung der Venus von der Erde ändert sich in der Nähe der unteren Conjunction so wenig, dass hier $r_,$ als eine beständige Grösse betrachtet werden kann; die kleine Veränderlichkeit derselben kann jedoch in dieser Rechnung ohne Weiteres berücksichtigt werden. Die drei Werthe der vorstehenden Coordinaten, die man auf diese Weise erhält, sollen mit

$$P_{-1}, \quad P_0, \quad P_1$$
$$Q_{-1}, \quad Q_0, \quad Q_1$$

*) In dem Vorübergange des Jahres 1874 ist die Ungleichförmigkeit in einem Zeitraume von 4 Stunden in den Hunderttheilen der Bogensecunden kaum merklich.

bezeichnet werden, wobei noch zu bemerken ist, dass P_0 und Q_0 durchaus nicht der Conjunctionszeit zu entsprechen brauchen, sondern dass es gnügt, wenn sie dieser Zeit nahe liegen. Man setze hierauf, je nachdem die beiden Intervalle zwischen den drei Oertern zwei oder drei Stunden betragen, entweder

$$n \sin N = \tfrac{1}{4}(P_1 - P_{-1})$$
$$n \cos N = \tfrac{1}{4}(Q_1 - Q_{-1})$$

oder

$$n \sin N = \tfrac{1}{6}(P_1 - P_{-1})$$
$$n \cos N = \tfrac{1}{6}(Q_1 - Q_{-1})$$

und rechne hieraus n und N, so wie

$$\gamma = Q_0 \sin N - P_0 \cos N$$
$$\mu = 15\, T_0 - \tfrac{15}{n}(Q_0 \cos N + P_0 \sin N)$$

wo T_0 die wahre Sonnenzeit des ersten, beliebig anzunehmenden, Meridians ist, für welche P_0 und Q_0 gelten.

Die vorstehenden, zu berechnenden Grössen gehören der Ebene der P und Q an, und haben in dieser die folgende Bedeutung.

n ist die stündliche gemeinschaftliche Bewegung der Sonne und der Venus;

N ist der Winkel, den diese Bewegung mit der Projection des durch den Punkt (λ', β') gehenden Breitenkreises macht;

γ ist der kürzeste Abstand der gemeinschaftlichen Projection der Mittelpunkte der Sonne und der Venus von dem Mittelpunkt der Erde;

μ ist die in Graden ausgedrückte wahre Zeit des ersten Meridians, in welcher der kürzeste Abstand statt findet.

Mit den im Vorstehenden erklärten Rechnungen sind alle Rechnungen ausgeführt, die sich auf den Mittelpunkt der Erde beziehen, und wie man sieht, kommt darin die Conjunctionszeit der Venus und der Sonne gar nicht vor, sondern ist durch den kürzesten Abstand γ, und die Zeit μ, wann dieser statt findet, ersetzt. Man braucht daher vor Beginn der Vornahme dieser Rechnungen die Conjunctionszeit nur beiläufig in Erfahrung gebracht zu haben, um die drei Zeiten, für welche man die Oerter berechnen muss, so auswählen zu können, dass sie den Zeitraum, in welchem der Vorübergang vor sich geht, beiläufig umfassen.

Auch die stündlichen Bewegungen in Länge und Breite, oder in grader Aufsteigung und Abweichung kommen nicht vor, sondern sind

durch die Eine Bewegung n, und deren Lage zum Nordpol der Ecliptik, die durch N ausgedrückt wird, ersetzt. Auch werden in der Folge weder die Conjunctionszeit noch die genannten stündlichen Bewegungen eintreten.

10.

Wir kommen jetzt zur Berücksichtigung der Parallaxe. Denken wir uns irgend einen Punkt der Erdoberfläche, den ich den Beobachtungsort nennen will, und beziehen diesen auf Coordinaten, die den P, Q, Z parallel sind, und denselben Anfangspunkt haben. Nennen wir diese Coordinaten p, q, z, so sind ihre strengen Ausdrücke (s. Abh. Art. 3)

$$p = m\varrho \cos B \sin (L - \lambda')$$
$$q = m\varrho \{\sin B \cos \beta' - \cos B \sin \beta' \cos (L - \lambda')\}$$
$$z = m\varrho \{\sin B \sin \beta' + \cos B \cos \beta' \cos (L - \lambda)\}$$

in welchen ϱ die Entfernung des Beobachtungsortes vom Mittelpunkt der Erde, und L und B die Länge und Breite des geocentrischen Zenith desselben sind. Bezeichnet man hierauf mit P', Q', Z' die auf den Beobachtungsort bezogenen Coordinaten des Mittelpunkts der Venus, so werden

$$P' = P - p$$
$$Q' = Q - q$$
$$Z' = Z - z$$

(S. Abh. Art. 3.)

11.

Aus den Ausdrücken des vor. Art. können die Längen und Breiten durch die graden Aufsteigungen und Abweichungen eliminirt werden, ohne dass die Ausdrücke von p, q, z ihre Form ändern, wie ich im Art. 13 der angezogenen Abhandlung gezeigt habe. Seien α' und δ' die grade Aufsteigung und Abweichung des Punktes (λ', β'), A und φ' die grade Aufsteigung und Abweichung des geocentrischen Zeniths des Beobachtungsortes, und h der Winkel am Punkt (λ', β') oder (α', δ'), den der durch denselben gehende Breitenkreis mit dem Abweichungskreise macht, dann werden, wie aus dem a. O. hervorgeht,

$$p \cos h - q \sin h = m\varrho \cos \varphi' \sin (A - \alpha')$$
$$p \sin h + q \cos h = m\varrho \{\sin \varphi' \cos \delta' - \cos \varphi' \sin \delta' \cos (A - \alpha')\}$$
$$z = m\varrho \{\sin \varphi' \sin \delta' + \cos \varphi' \cos \delta' \cos (A - \alpha')\}$$

und setzt man hierauf

$$P' \cos h - Q' \sin h = u \sin \theta$$
$$P' \sin h + Q' \cos h = u \cos \theta$$

so bekommt man

$$u \sin \theta = P \cos h - Q \sin h - m\varrho \cos \varphi' \sin (A - \alpha')$$
$$u \cos \theta = P \sin h + Q \cos h - m\varrho \{\sin \varphi' \cos \delta' - \cos \varphi' \sin \delta' \cos A - \alpha')\}$$
$$u = u' - m\varrho \{\sin \varphi' \sin \delta' + \cos \varphi' \cos \delta' \cos (A - \alpha')\} \operatorname{tg} f$$

Legt man durch den Beobachtungsort eine Ebene, die der im Art. 4 erwähnten Ebene parallel ist, so bezeichnet u den Halbmesser des Kreises, den der Schattenkegel in dieser Ebene ausschneidet. Der Winkel θ ist ein Positionswinkel, welcher den Punkt des Sonnenrandes angiebt, in welchen die Venus ein- oder austritt. Der Winkel θ ist Null, wenn der Venusmittelpunkt im Augenblicke des Ein- oder Austritts sich in dem durch den Punkt (α', δ') — wofür man auch hier den Sonnenmittelpunkt annehmen kann, — gehenden Abweichungskreise, und zugleich nördlich von demselben befindet. Er wächst von da in der Richtung nach Osten. Die Berechnung von α' und δ' aus λ' und β' geschieht durch die Gleichungen

$$\sin \eta \sin \varkappa = \sin \beta'$$
$$\sin \eta \cos \varkappa = \cos \beta' \sin \lambda'$$
$$\cos \eta = \cos \beta' \cos \lambda'$$
$$\cos \delta' \sin \alpha' = \sin \eta \cos (\varepsilon + \varkappa)$$
$$\cos \delta' \cos \alpha' = \cos \eta$$
$$\sin \delta' = \sin \eta \sin (\varepsilon + \varkappa)$$

wo ε die Schiefe der Ecliptik bezeichnet. Für h kann man sich immer mit ausreichender Genauigkeit der Formel

$$\sin h = \frac{\sin \varepsilon \cos \alpha'}{\cos \beta'}$$

bedienen; überhaupt brauchen α', δ', h nicht mit der grössten Genauigkeit berechnet zu werden.

12.

Nennt man die grade Aufsteigung der Sonne a, so findet man diese durch die Formel

$$\operatorname{tg} a' = \cos \varepsilon \operatorname{tg} l' - \sin b' \sin \varepsilon$$

und setzt man

$$t = A - a'$$

dann ist t die in Graden ausgedrückte wahre Sonnenzeit des Beobachtungsortes. Sei ferner

$$\Delta\alpha' = a' - \alpha'$$

dann wird

$$A - \alpha' = t + \Delta\alpha'$$

Nennt man τ die in Graden ausgedrückte wahre Zeit unter dem ersten Meridian, die gleichzeitig mit der Zeit t des Beobachtungsortes statt findet, und setzt

$$\lambda = t - \tau$$

dann ist λ die in Graden ausgedrückte östliche, geographische Länge des Beobachtungsortes in Bezug auf den ersten Meridian. Die Coordinaten P und Q nehmen hiemit die folgende Form an

$$P = -\gamma \cos N + \tfrac{t-\lambda-\mu}{15}\, n \sin N$$

$$Q = \gamma \sin N + \tfrac{t-\lambda-\mu}{15}\, n \cos N$$

(S. Abh. Art. 22) woraus man

$$P\cos h - Q \sin h = -\gamma \cos N' + \tfrac{t-\lambda-\mu}{15}\, n \sin N'$$

$$P \sin h + Q \cos h = \gamma \sin N' + \tfrac{t-\lambda-\mu}{15}\, n \cos N'$$

erhält, nachdem

$$N' = N - h$$

gesetzt worden ist. Die Substitution aller dieser Ausdrücke in die Gleichungen des vor. Art. giebt für die Ein- und Austritte der Venus

$$u = u' - m\varrho \{\sin\varphi' \sin\delta' + \cos\varphi' \cos\delta' \cos(t + \Delta\alpha')\} \operatorname{tg} f$$

$$u \sin\theta = -\gamma \cos N' + \tfrac{t-\lambda-\mu}{15}\, n \sin N' - m\varrho \cos\varphi' \sin(t + \Delta\alpha')$$

$$u \cos\theta = \gamma \sin N' + \tfrac{t-\lambda-\mu}{15}\, n \cos N' - m\varrho \{\sin\varphi' \cos\delta' - \cos\varphi' \sin\delta' \cos(t + \Delta\alpha')\}$$

Die Strahlenbrechung ist in diesen Gleichungen nicht berücksichtigt, da angenommen wird, dass die Beobachtungen des Venusdurchganges nicht in unmittelbarer Nähe des Horizonts vorgenommen werden. Sollten aber solche Beobachtungen vorkommen, so ist es ein Leichtes, nach den Entwickelungen der oft angezogenen Abhandlung die Wirkung der Strahlenbrechung den vorstehenden Gleichungen hinzuzufügen. Man hat zu dem Ende nur $m(1+x)$ statt m in diese Gleichungen zu setzen, und der numerische Werth von x kann aus den Gleichungen des Art. 17 der

Abh. berechnet werden. Man wird diesen wohl immer für die Venusdurchgänge unmerklich finden.

13.

Es soll jetzt aus den Gleichungen des vor. Art. der strenge Ausdruck für die Sonnenparallaxe abgeleitet werden.

Berücksichtigen wir zuerst die Abplattung der Erde, und nennen zu dem Ende den Aequatorealhalbmesser derselben ρ_0, die Abplattung c, und die reducirte Breite des Beobachtungsortes $\varphi_,$, dann ergeben sich

$$\begin{aligned} \rho \cos\varphi' &= \rho_0 \cos\varphi_, \\ \rho \sin\varphi' &= (1-c)\,\rho_0 \sin\varphi_, \end{aligned}$$

und bezeichnet man die Polhöhe des Beobachtungsortes mit φ, dann erhält man aus dieser $\varphi_,$ durch die folgende Gleichung

$$\operatorname{tg}\varphi_, = (1-c)\operatorname{tg}\varphi$$

Die Gleichungen für die Ein- und Austritte werden hiemit

$$u = u' - m\rho_0\{(1-c)\sin\varphi_,\sin\delta' + \cos\varphi_,\cos\delta'\cos(t+\Delta\alpha')\}\operatorname{tg} f$$

$$\begin{aligned} u\sin\theta = {} & -\gamma\cos N' + \tfrac{t-\lambda-\mu}{15}\,n\sin N' \\ & - m\rho_0\cos\varphi_,\sin(t+\Delta\alpha') \\ u\cos\theta = {} & \gamma\sin N' + \tfrac{t-\lambda-\mu}{15}\,n\cos N' \\ & - m\rho_0\{(1-c)\sin\varphi_,\cos\delta' - \cos\varphi_,\sin\delta'\cos(t+\Delta\alpha')\} \end{aligned}$$

und die unbekannte, zu bestimmende Grösse ist ρ_0. Denn da dem Vorhergehenden zufolge ρ_0 durch diese Gleichungen in Theilen der mittleren Entfernung der Sonne von der Erde erhalten wird, so ist

$$\rho_0 = \sin\pi'_0$$

wenn π'_0 die Aequatoreal-Horizontal-Parallaxe der Sonne bezeichnet.

14.

Um die eben erhaltenen Gleichungen ihrem Zwecke mehr anzupassen, führe ich erst die Grössen d und D ein, die durch die folgenden Ausdrücke erhalten werden,

$$\begin{aligned} d\sin D &= \sin\delta' \\ d\cos D &= (1-c)\cos\delta' \end{aligned}$$

und setze darauf

$$\begin{aligned} \cos\varphi_,\sin(t+\Delta\alpha') &= \cos H\sin K \\ \cos\varphi_,\cos(t+\Delta\alpha') &= \cos D\sin H - \sin D\cos H\cos K \\ \sin\varphi_, &= \sin D\sin H + \cos D\cos H\cos K \end{aligned}$$

in welchen sehr nahe H die Höhe des Punktes (α', δ') über dem Horizont, und K der parallactische Winkel an demselben sind. Führt man diese Substitutionen in die Gleichungen des vor. Art. ein, und lässt die beiden immer unmerklichen Glieder weg, welche mit dem Produkt $c \operatorname{tg} f$ multiplicirt sind, so bekommt man

$$\begin{aligned} u &= u' - m\varrho_0 \operatorname{tg} f' \sin H \\ u \sin\theta &= -\gamma \cos N' + \tfrac{t-\lambda-\mu}{15} n \sin N' - m\varrho_0 \cos H \sin K \\ u \cos\theta &= \gamma \sin N' + \tfrac{t-\lambda-\mu}{15} n \cos N' - m\varrho_0 d \cos H \cos K \end{aligned}$$

15.

Setzt man um mehr zusammen ziehen zu können

$$\begin{aligned} S \sin \Sigma' &= \gamma \\ S \cos \Sigma' &= \tfrac{t-\lambda-\mu}{15} n \end{aligned}$$

so gehen die beiden letzten Gleichungen des vor. Art. in die folgenden über,

$$\begin{aligned} u \sin\theta &= S \sin(N' - \Sigma') - m\varrho_0 \cos H \sin K \\ u \cos\theta &= S \cos(N' - \Sigma') - m\varrho_0 d \cos H \cos K \end{aligned}$$

die man leicht durch die Substitution

$$\begin{aligned} l \sin L &= \sin K \\ l \cos L &= d \cos K \end{aligned}$$

auf die folgende noch einfachere Form bringt,

$$\begin{aligned} u \cos(\theta - L) &= S \cos(W' - \Sigma') - m\varrho_0 l \cos H \\ u \sin(\theta - L) &= S \sin(W' - \Sigma') \end{aligned}$$

wo

$$W' = N' - L$$

ist. Erhebt man diese Gleichungen ins Quadrat und addirt sie, so ergiebt sich

$$m^2\varrho_0^2 l^2 \cos^2 H - 2 m\varrho_0 l S \cos H \cos(W' - \Sigma') + S^2 - u^2 = 0$$

welche als die strenge Gleichung zur Bestimmung der Sonnenparallaxe aus einem beobachteten Ein- oder Austritt eines Venusvorüberganges vor der Sonne bezeichnet werden kann. *) Zwar ist diese Gleichung in der vorstehenden Form nicht vollständig entwickelt, da

$$u = u' - m\varrho_0 \operatorname{tg} f \sin H$$

*) Diese Gleichung ist mit der Gleichung (40) des Art. 55 der oft angezogenen Abhandlung identisch.

und also Function der Unbekannten ist. Aber obgleich die vollständige Entwickelung mit Leichtigkeit ausgeführt werden könnte, und die quadratische Gleichung nur wenig zusammengesetzter machen würde, so unterlasse ich doch diese Entwickelung. Der Grund davon ist der, dass das Glied $m\rho_0 \operatorname{tg} f \sin H$ immer sehr klein ist und so geringe Wirkung auf das Resultat äussert, dass man es mit Zugrundelegung des gegenwärtig angenommenen Werthes der Sonnenparallaxe berechnen darf, und demzufolge u als eine völlig bekannte Grösse betrachtet werden kann.*)

Die Auflösung der obigen quadratischen Gleichung giebt

$$\rho_0 = \frac{S\cos(W'-\Sigma) \mp \sqrt{u^2 - S^2\sin^2(W'-\Sigma)}}{ml\cos H}$$

oder wenn man

$$\sin w = \frac{S}{u}\sin(W'-\Sigma)$$

setzt,

$$\rho_0 = \frac{S\cos(W'-\Sigma) \mp u\cos w}{ml\cos H}$$

Diese einfachen Ausdrücke leiden indess an dem Umstande, dass die beiden Glieder, aus welchen der Zähler des Ausdrucks von ρ_0 besteht, viel grösser als ihr Unterschied sind, welcher immer anzuwenden ist. Wenn man diesen Umstand vermeiden will, so muss man die quadratische Gleichung indirect auflösen und zu dem Ende

$$\rho_0 = \frac{(S+u)(S-u) + \rho_0^2 m^2 l^2 \cos^2 H}{2mlS\cos H\cos(W'-\Sigma)}$$

setzen. Bei der Berechnung von ρ_0 aus diesem Ausdruck lässt man in der ersten Annäherung das zweite Glied des Zählers weg, setzt in der zweiten Annäherung in demselben den Werth von ρ_0, der die erste Annäherung gegeben hat, u. s. f. Man wird finden, dass die Annäherungen sehr schnell auf das richtige Resultat führen.

16.

Bei der Ableitung der im vor. Art. erhaltenen Endgleichung für die Bestimmung der Sonnenparallaxe haben wir bis jetzt nur Ein- und Austritte der Venus vor Augen gehabt, aber diese Gleichung ist einer

*) Im Verlaufe dieses Aufsatzes wird übrigens gezeigt werden, dass in der Anwendung in dieser Gleichung am Zweckmässigsten für ρ_0 ein genäherter Werth substituirt, und darauf u als Unbekannte derselben betrachtet werden kann. Diese Behandlung derselben vermeidet gänzlich die Elimination von u durch u'.

weit ausgedehnteren Anwendung fähig. Die Beobachtungen der Ein- und Austritte kann man definiren als Beobachtungen der Zeitpunkte, in welchen die scheinbaren Entfernungen der Mittelpunkte der Venus und der Sonne der Summe oder dem Unterschiede ihrer scheinbaren Halbmesser gleich ist. Diese Beobachtungen sind also eigentlich Distanzbeobachtungen, in welchen die zu beobachtenden Distanzen nur zwei, sich von selbst darbietende und beobachtungsfähige Werthe annehmen.

Man gelangt hievon leicht zu dem Schlusse, dass dieselbe Endgleichung sich auch auf jede andere, anderweitig beobachtete Distanz muss anwenden lassen können, wenn zugleich mit derselben der Zeitpunkt, in welchem sie statt findet, beobachtet wird. Um die Endgleichung hiefür anzuwenden, ist nichts weiter erforderlich, als die Zeit der besonders beobachteten Distanz und den derselben entsprechenden Werth von u darin zu substituiren.

Die Vornahme von Distanzmessungen während des Vorüberganges der Venus vor der Sonnenscheibe muss als ein sehr wichtiges Hülfsmittel zur möglichst sicheren Bestimmung der Sonnenparallaxe aus dieser Erscheinung bezeichnet werden, da man sie wiederholen und dadurch den Einfluss der unvermeidlichen Beobachtungsfehler wesentlich vermindern kann. Die Beobachtungen der Ein- und Austritte sind im Gegentheil keiner Wiederholung fähig.

Die Vornahme von Distanzmessungen während eines Vorüberganges der Venus vor der Sonnenscheibe ist daher sehr zu empfehlen.

17.

Die Lösung der Aufgabe: aus einer gemessenen scheinbaren Entfernung der Mittelpunkte oder der Ränder der Sonne und der Venus die Sonnenparallaxe zu finden, führt daher in erster Instanz auf die Aufgabe: aus der gemessenen Entfernung den entsprechenden Werth von u zu finden, und die soll jetzt vorgenommen werden.

In Bezug auf Messungen von Entfernungen der Mittelpunkte ist diese Aufgabe schon im Art. 104 der oft angezogenen Abhandlung strenge gelöst, der dort gegebene strenge Ausdruck ist, wenn man die hier eingeführte Einheit der linearischen Grösse anwendet,

$$\operatorname{tg} b = \frac{mru}{Z(Z+mr) - (2Z+mr)z + z^2 + u^2}$$

wo b die gemessene Entfernung der Mittelpunkte bezeichnet. Wir dürfen aber hier unbedenklich z^2 und u^2 übergehen und

$$Z = mr_{,}, \quad z = m\varrho_0 \sin H, \quad r_{,}+r = r'$$

setzen, womit die vorstehende Gleichung durch eine leichte Umstellung

$$u = (r_{,}r' - (r_{,}+r')\,\varrho_0 \sin H)\,\frac{m}{r}\,\mathrm{tg}\,b$$

giebt. Es ist leicht einzusehen, dass der Ausdruck für u für beobachtete Ränderentfernungen, dem für Ränderberührungen vermindert um den vorstehenden Ausdruck gleich sein muss, nachdem in dem letzteren statt b die beobachtete Ränderentfernung, die mit b' bezeichnet werden soll, substituirt worden ist. Bezeichnet man daher zur Unterscheidung den Werth von u für die Ränderberührungen mit (u), so wird für gemessene Ränderentfernungen

$$\pm u = (u) - (r_{,}r' - (r_{,}+r')\,\varrho_0 \sin H)\,\frac{m}{r}\,\mathrm{tg}\,b'$$

Es sind hier vier Fälle zu unterscheiden.

1) Wenn die Entfernung der nächsten Venus- und Sonnenränder gemessen worden ist, so muss der Werth von (u) für innere Ränderberührungen, nebst dem oberen Zeichen des vorstehenden Ausdrucks angewandt werden.

2) Ist die Entfernung des entgegengesetzten Venusrandes vom nächsten Sonnenrande gemessen, so muss der Werth von (u) für äussere Berührungen, und wieder das obere Zeichen angewandt werden.

3) Ist die Entfernung der am Weitesten von einander abstehenden Venus- und Sonnenränder gemessen, so ist wieder der Werth von (u) für äussere Ränderberührungen, aber das untere Zeichen des vorstehenden Ausdrucks anzuwenden.

4) Ist die Entfernung des gegenüber stehenden Venusrandes von dem entferntesten Sonnenrande gemessen, so ist der Werth von (u) für innere Ränderberührungen nebst dem unteren Zeichen anzuwenden.

18.

Wir kommen jetzt an eine sehr wichtige Untersuchung, die darin besteht, die Beobachtungsörter, an welchen die Sonnenparallaxe möglichst sicher bestimmt werden kann, von denjenigen zu unterscheiden, an welchen sie nur unsicher, oder gar nicht bestimmt werden kann. Der blose Anblick der Ausdrücke des Art. 15 für ϱ_0 zeigt schon, dass die Sonnenparallaxe nicht durch Beobachtungen im Zenith, oder nahe demselben bestimmt werden kann, weil dort $\cos H = 0$, oder sehr klein

wird. Es geht hieraus schon hervor, dass jedenfalls die günstigen Beobachtungsörter so ausgewählt werden müssen, dass die Höhe der Sonne während der Erscheinung des Venusvorüberganges eine gewisse Grenze nicht übersteigt.

Aber es kommen noch andere Umstände mit in Betracht, von welchen hier schon, zufolge des zweiten im Art. 15 für ϱ_0 erhaltenen Ausdrucks, gesagt werden kann, dass während der Beobachtung auch $\cos(W'-\Sigma')$ nicht Null oder klein sein darf, wenn gleich $\cos H$ möglichst gross ist. Diese und noch andere Umstände, die bei der Auswahl der Beobachtungsörter in Betracht kommen, lernt man am Besten durch die Untersuchung des Differentials der Gleichung für ϱ_0 kennen.

19.

Wir könnten zur Erlangung dieses Differentials von der quadratischen Gleichung für ϱ_0 ausgehen, aber einfacher verfährt man, wenn man die Gleichungen des Art. 15 benutzt, aus welchen die quadratische Gleichung hervorgegangen ist. Auch braucht man diese hier nicht in ihrer vollen Strenge anzuwenden, sondern kann $l=1$ setzen, wodurch $L=K$ wird. Diese sind demnach die folgenden

$$u\cos(\theta-K) = S\cos(N'-K-\Sigma') - m\varrho_0\cos H$$
$$u\sin(\theta-K) = S\sin(N'-K-\Sigma')$$

Differentiirt man diese, indem man alles ausser N' und m veränderlich setzt, so bekommt man

$$\cos(\theta-K)\,du - u\sin(\theta-K)\,d(\theta-K) =$$
$$\cos(N'-K-\Sigma')\,dS + S\sin(N'-K-\Sigma')\,d(K+\Sigma')$$
$$+ m\varrho_0\sin H dH - m\cos H d\varrho_0$$
$$\sin(\theta-K)\,du + u\cos(\theta-K)\,d(\theta-K) =$$
$$\sin(N'-K-\Sigma')\,dS - S\sin(N'-K-\Sigma')\,d(K+\Sigma')$$

Eliminirt man hieraus $d(\theta-K)$, und benutzt darauf die Gleichung

$$0 = S\sin(N'-\Sigma'-\theta) + m\varrho_0\cos H\sin(\theta-K)$$

die aus den vorstehenden Gleichungen leicht hervorgeht, so bekommt man

$$\cos H\cos(\theta-K)\,d\varrho_0 = \varrho_0\sin H\cos(\theta-K)\,dH$$
$$- \varrho_0\cos H\sin(\theta-K)\,dK$$
$$+ \frac{1}{m}\cos(N'-\Sigma'-\theta)\,dS$$
$$+ \frac{S}{m}\sin(N'-\Sigma'-\theta)\,d\Sigma'$$
$$- \frac{du}{m}$$

wobei zu bemerken ist, dass man ohne Weiteres $d\varrho_0$ in Secunden ausgedrückt erhält, wenn die Differentiale rechter Hand alle in Secunden ausgedrückt werden.

20.

Die Gleichungen des Art. 14 für H und K lassen sich leicht auf die folgende Form bringen, die auch später Anwendung finden wird,

$$\cos H \sin K = \cos\varphi_, \sin(t+\Delta\alpha')$$
$$\cos H \cos K = \sin\varphi_, \cos D - \cos\varphi_, \sin D \cos(t+\Delta\alpha')$$
$$\sin H = \sin\varphi_, \sin D + \cos\varphi_, \cos D \cos(t+\Delta\alpha')$$

durch deren Differentiation man erhält,

$$-\sin H \sin K dH + \cos H \cos K dK = \cos\varphi_, \cos(t+\Delta\alpha')\, dt$$
$$-\sin H \cos K dH - \cos H \sin K dK = \cos\varphi_, \sin D \sin(t+\Delta\alpha')\, dt$$

Aus den Gleichungen

$$S \sin\Sigma = \gamma$$
$$S \cos\Sigma = \tfrac{n}{15}(t-\lambda-\mu)$$

zieht man

$$\sin\Sigma dS + S\cos\Sigma d\Sigma = 0$$
$$\cos\Sigma dS - S\sin\Sigma d\Sigma = \tfrac{n}{15} d(t-\lambda)$$

Um diese Gleichungen so einzurichten, dass sie die Differentiale der linken Seite in Bogensecunden ausgedrückt geben, während das Differential $d(t-\lambda)$ in Zeitsecunden ausgedrückt wird, muss die rechte Seite der zweiten mit dem Factor

$$\frac{R}{240}$$

wo $R = 206265''$ ist, multiplicirt werden. Diese beiden Gleichungen werden daher

$$\sin\Sigma dS + S\cos\Sigma d\Sigma = 0$$
$$\cos\Sigma dS - S\sin\Sigma d\Sigma = \tfrac{nR}{3600} d(t-\lambda)$$

Endlich giebt der zweite Ausdruck für u des Art. 17 mit Weglassung des immer sehr kleinen mit ϱ_0 multiplicirten Gliedes

$$\pm du = -\tfrac{r,r'}{r} m db'$$

und durch Substitution der hier erhaltenen Ausdrücke geht daher die Differentialgleichung des vor. Art. in die folgende über,

$$\cos H \cos(\theta - K)\, d\varrho_0 =$$
$$-\varrho_0 \cos\varphi_, \{\sin\theta\cos(t+\Delta\alpha') + \sin D\cos\theta\sin(t+\Delta\alpha')\}\, dt$$
$$+\tfrac{Rn}{3600\, m}\cos(N'-\theta)\, d(t-\lambda)$$
$$\pm\tfrac{r,r'}{r} db'$$

Da die Function

$$\sin\theta\cos(t+\Delta\alpha') + \sin D\cos\theta\sin(t+\Delta\alpha')$$

nie grösser wie Eins werden kann, und nahe

$$\varrho_0 = 0.0000431$$

ist, so kann das erste Glied rechter Hand der vorstehenden Gleichung hier immer übergangen werden, und man kann daher setzen

$$\cos H\cos(\theta-K)\,d\varrho_0 = \frac{Rn}{3600\,m}\cos(N'-\theta)\,d\,(t-\lambda)$$
$$\pm\frac{r,r'}{r}\,db'$$

Die numerischen Werthe der beiden Glieder rechter Hand dieser Gleichung sollen weiter unten untersucht werden, während die Untersuchung des Coefficienten linker Hand sogleich vorgenommen werden wird.

21.

Aus dem für $d\varrho_0$ so eben erhaltenen Ausdruck ist ersichtlich, dass der numerische Werth, den die Function

$$\cos H\cos(\theta-K)$$

annimmt, sehr grossen Einfluss auf die Sicherheit der Bestimmung der Sonnenparallaxe aus einem Venusvorübergange vor der Sonnenscheibe ausübt, da er als Divisor in alle Glieder des Ausdrucks für $d\varrho_0$ eintritt. Die günstigsten Fälle sind also *ceteris paribus* diejenigen, in welchen diese Function möglichst gross wird.

Der Maximalwerth, den $\cos H\cos(\theta-K)$ überhaupt annehmen kann, ist augenscheinlich $= \pm 1$, und trifft nur ein, wenn zugleich

$$\cos H = 1, \text{ und } \cos(\theta-K) = \pm 1$$

sind. Dieser Maximalwerth kann also nur eintreffen, wenn die Erscheinung, die man beobachten will, sei sie Ein- oder Austritt, oder sei sie Distanzmessung, im Horizont vor sich geht. Aber im Horizont und in der Nähe desselben lassen sich selten oder nie gute Beobachtungen anstellen, ja man kann im Allgemeinen kaum in dieser Region auf die Sichtbarkeit des zu beobachtenden Gegenstandes rechnen, wenn gleich diese in höheren Höhengraden in erwünschtem Maasse statt findet. Man muss sich daher jeden Falls mit einem kleineren Werthe der genannten Function begnügen, und den günstigen Umstand benutzen, dass die Abnahme des Maximalwerthes in den unteren Höhengraden nur geringe ist. Bei $H = 40^0$ z. B. ist $\cos H = 0.766$, und der Maximalwerth unserer

Function also immer noch ein Weniges grösser als $\frac{1}{4}$ des Maximums Maximorum.

Wenn $\cos H \cos(\theta - K) < \pm 1$ ist, so entsprechen jedem, übrigens ungeänderten Werthe derselben eine Reihe von Punkten auf der Erdoberfläche, die sich zu einer stetigen Curve vereinigen, auf welcher $\cos H$ sich zwischen den Werthen 1 und k, so wie $\cos(\theta - K)$ sich zwischen den Werthen ± 1 und $\pm k$ bewegt, je nachdem der Werth der Function $= +k$ oder $= -k$ ist.

Zu bemerken ist hiebei, dass von den Werthen $+k$ und $-k$ gemeiniglich immer der eine auf der nördlichen und der andere auf der südlichen Halbkugel der Erde statt findet, und dass auf den entsprechenden Curvenpunkten die unvermeidlichen Beobachtungsfehler im entgegengesetzten Sinne auf die Sonnenparallaxe einwirken.

22.

Beschäftigen wir uns zuerst mit der Bedingung

$$\cos(\theta - K) = \pm 1$$

so bekommen wir sogleich

$$\theta = K, \text{ oder } = 180^0 + K$$

aber nennen wir θ_0 den Positionswinkel, vorläufig blos des Ein- oder Austritts der Venus, in Bezug auf den Verticalkreis, in welchem sich der im Vorhergehenden erklärte Punkt (α', δ') befindet, für welchen hier ohne Nachtheil der Sonnenmittelpunkt angenommen werden kann, so folgt aus der oben erklärten Bedeutung von θ und K leicht, dass immer

$$\theta_0 = \theta - K$$

ist, und in Folge dessen geht die eben eingeführte Bedingung in

$$\cos\theta_0 = \pm 1$$

über und giebt

$$\theta_0 = 0, \text{ oder } = 180^0$$

Da nun überhaupt, wie schon oben erwähnt wurde, die Bedingung

$$\cos H \cos\theta_0 = k$$

wo k constant ist Grundgleichung einer Anzahl von Curven auf der Erdoberfläche ist, und unter diesen sich diejenigen auszeichnen, denen ausserdem die Bedingung $\cos\theta_0 = \pm 1$ zukommt, so sollen diese letzteren die Haupthöhencurven genannt werden, und wir erhalten daher sogleich den

Lehrsatz.

»Auf allen Punkten irgend einer Haupthöhencurve auf der Erd-»oberfläche liegen während der Ein- oder Austritte der Venus die Mit-»telpunkte der Sonne und der Venus in einem und demselben Vertical-»kreise.«

Da nun für jeden Werth von H die Bedingung $\cos\theta_0 = \pm 1$ dem Maximum der Function $\cos H \cos\theta_0$ entspricht, so folgt, dass abgesehen von dem Werthe von H, die günstigsten Beobachtungsörter für die Bestimmung der Sonnenparallaxe aus Venusvorübergängen vor der Sonne diejenigen sind, auf welchen im Augenblick der Beobachtung die Mittelpunkte der Venus und der Sonne in einem und demselben Verticalkreise liegen. Dieses Kriterion kann der Beobachter ohne Weiteres erblicken, und mit den Augen verfolgen.

Das Gegentheil dieses Satzes findet auch statt, nemlich die Oerter, auf welchen die zu beobachtende Erscheinung unter einem Positionswinkel von nahe 90^0 oder 270^0 in Bezug auf den Verticalkreis eintrifft, sind zur Bestimmung der Sonnenparallaxe untauglich, und dieselbe wird absolut unmöglich wenn

$$\theta_0 = 90^0, \text{ oder } = 270^0$$

ist.

23.

Kehren wir einen Augenblick zur Bedingung

$$\cos H \cos\theta_0 = \pm 1$$

zurück, so müssen wir nothwendig $H = 0$ setzen, während die Bedingung $\theta_0 = 0$, oder $= 180^0$ fortbesteht. Aber das Zusammentreffen dieser beiden Bedingungen bedingt die Berührungspunkte des Schattenkegels der Venus und der Sonne mit dem Erdkörper (S. Abhandlung Art. 45, Gl. (34) *), und jede Haupthöhencurve hat daher in einem Berührungspunkt des genannten Schattenkegels mit der Erde ihren Anfangspunkt, von welchem sie ausgeht, oder wenn man sich so ausdrücken will, ihr Ende erreicht. Es folgt ferner hieraus, dass die Anzahl der Haupthöhencurven der der genannten Berührungspunkte gleich kommt.

---

*) Nemlich $\operatorname{tg}\theta = d \operatorname{tg} K$, also mit Uebergehung der Abplattung, $\theta = K$, oder $= 180^0 + K$, wie oben.

Man kann vorzugsweise drei Schattenkegel von einander unterscheiden, nemlich den für äussere Berührungen, den für den Mittelpunkt der Venus, und den für innere Berührungen. Da nun jeder Schattenkegel die Erde vier Mal berühren kann, so folgt dass zwölf Haupthöhencurven aufgestellt werden können. Da jedoch diese drei Schattenkegel, der Kleinheit des Venushalbmessers in Vergleich zum Sonnenhalbmesser wegen, nur wenig von einander verschieden sind, so liegen je drei der Haupthöhencurven nicht weit von einander und es gnügt daher in der Vorausberechnung eines Venusvorüberganges nur vier Haupthöhencurven von einander zu unterscheiden, für welche am Zweckmässigsten die dem Venusmittelpunkt angehörigen gewählt werden.

24.

Da die Haupthöhencurven eine so wichtige Bedeutung haben, so wird es angemessen sein, die Ausdrücke, nach welchen sie zu berechnen sind, ausführlich anzugeben. Nehmen wir zu dem Ende die Gleichungen des Art. 15 wieder vor, die wir jetzt, wenn wieder $l = 1$ gesetzt wird, wie folgt schreiben können,

$$u \cos\theta_0 = S \cos(W - \Sigma') - m\varrho_0 \cos H$$
$$u \sin\theta_0 = S \sin(W - \Sigma')$$

wo

$$W = N' - K$$

ist. Die Bedingung $\cos\theta_0 = \pm 1$ giebt hier $\sin(W - \Sigma') = 0$, und da S und u immer positiv sein müssen,

$$S = u \pm m\varrho_0 \cos H$$

durch welche man, wenn man H von 0 bis 90^0 wachsen lässt, eine doppelte Reihe von Werthen von S erhält, worauf man für jeden dieser, wieder zwei Werthe von Σ' durch die Gleichung

$$\sin\Sigma' = \frac{\gamma}{S}$$

erhält. Wenn γ positiv ist, so liegen die zwei jedem Werthe von S zukommenden Werthe von Σ' im ersten, und wenn γ negativ ist, im zweiten Halbkreise. Stellt man nun die Regel auf, dass man von diesen Werthen nur denjenigen in Betracht ziehe, welcher im ersten, oder bez. im vierten Quadranten liegt, so entspringen die folgenden vier Werthe von W und τ, die die vier, dem für u zu Grunde gelegten Werthe entsprechenden, Haupthöhencurven geben,

$$W = \Sigma' \quad , \quad W = 180^0 - \Sigma'$$
$$\tau = \mu + \frac{15}{n} S \cos \Sigma' \quad , \quad \tau = \mu - \frac{15}{n} S \cos \Sigma'$$
$$W = 180^0 + \Sigma' , \quad W = 360^0 - \Sigma'$$
$$\tau = \mu + \frac{15}{n} S \cos \Sigma' \quad , \quad \tau = \mu - \frac{15}{n} S \cos \Sigma'$$

und zwar sind die beiden ersten dieser mit Anwendung der Werthe von S und Σ' zu berechnen, die aus

$$S = u + m \varrho_0 \cos H$$

und die beiden letzten mit den Werthen, die aus

$$S = u - m \varrho_0 \cos H$$

entsprungen sind.

Die Längen und Breiten der Curvenpunkte sind hierauf durch die betreffenden Gleichungen des Art. 14 zu berechnen, die zu dem Ende wie folgt gestellt werden können. Da $K = N' - W$ ist, so rechne man die Hülfsbögen P und Q durch die folgenden Gleichungen

$$\cos P \sin Q = \sin H$$
$$\cos P \cos Q = \cos H \cos (N' - W)$$
$$\sin P = \cos H \sin (N' - W)$$

wo Q immer so zu bestimmen ist, dass $\cos P$ positiv wird, hierauf erhält man

$$\cos \varphi_, \sin (t + \Delta \alpha') = \sin P$$
$$\cos \varphi_, \cos (t + \Delta \alpha') = \cos P \sin (Q - D)$$
$$\sin \varphi_, = \cos P \cos (Q - D)$$
$$\lambda = t - \tau$$

Die Abplattung ist zwar in den vorhergehenden Ausdrücken nicht vollständig berücksichtigt, aber ihre grösste Wirkung ist darin eingeschlossen; es wäre ein Leichtes sie vollständig aufzunehmen, aber ich halte dieses im gegenwärtigen Falle für überflüssig.

Es ist noch hierzu zu bemerken, dass von den vier Haupthöhencurven, deren Berechnung im Vorstehenden erklärt worden ist, zwei und zwei, und zwar die beiden für die Eintritte und die beiden für die Austritte, im Punkte $H = 90^0$ sich an einander anschliessen, und zu Einer stetigen Curve vereinigen.

25.

Die Resultate der vorstehenden Untersuchungen, die bisher nur auf Ein- und Austritte ausgedehnt worden sind, gewinnen bedeutend

an Ausdehnung, wenn man erwägt, dass die beiden Gleichungen des Art. 22, aus welchen sie abgeleitet worden sind, nicht unumgänglich verlangen, dass für u der Werth darin substituirt werde, welcher den Ränderberührungen zukommt, sondern dass man darin für u jeden Werth substituiren darf, welcher irgend einer möglichen Phase entspricht.

Es folgt hieraus unmittelbar, dass der im Art. 22 bewiesene Lehrsatz, und die Folgerungen, die daraus gezogen wurden, nicht blos auf Ein- und Austritte, sondern auf jede mögliche Phase bezogen werden können, und für jede mögliche Phase Geltung haben.

Unter den verschiedenen möglichen Phasen ist die grösste Phase besonders in Betracht zu ziehen, da für diese einige der angeführten Umstände etwas anders sind, und daher die Rechnung etwas anders ausgeführt werden muss.

In Betreff der Curve der grössten Phase im Horizont ist zu bemerken, dass sie nur zwei Punkte besitzt, die den vier Berührungspunkten des Schattenkegels mit der Erde analog sind, und daher in Bezug auf die grösste Phase selbst nur zwei Haupthöhencurven vorhanden sind. Die Anfangs- oder Endpunkte dieser beiden Haupthöhencurven entsprechen auf der Curve der grössten Phase im Horizont, den beiden Punkten, in welchen diese Phase sich in ihrem Maximum und in ihrem Minimum befindet.

26.

Da im gegenwärtigen Falle der Halbmesser des Schattenkegels u eine Unbekannte ist, während sie in allen anderen Fällen bekannt ist, so muss die Berechnung der beiden hiezu gehörigen Haupthöhencurven etwas anders ausgeführt werden, wie im Art. 24 in Bezug auf die anderen Haupthöhencurven gezeigt wurde.

Nehmen wir die Bedingungsgleichung für die grösste Phase vor, die im Art. 43 der oft angezogenen Abhandlung gefunden wurde. Nach einigen Abkürzungen, die wir uns hier erlauben dürfen, wird diese Gleichung die folgende,

$$\left\{\frac{n}{\varkappa m \varrho_0} + \cos H \sin D \sin W - \sin H \cos D \sin N'\right\} \cos\psi$$
$$+ \left\{\cos H \sin D \cos W - \sin H \cos D \cos N'\right\} \sin\psi = 0$$

in welcher

$$\varkappa = \frac{15\,(3600)}{206265},\ \log\varkappa = 9.41797 - 10$$

und

$$\psi = \theta - N'$$

sind. Hiemit bekommt man aus den Gleichungen des Art. 14, wenn auch $d = 1$ gesetzt wird, leicht

$$u = \frac{m\varrho_0 \cos H \sin W - \gamma}{\sin \psi}$$

Da $\theta_0 = \theta - K$ ist, so folgt aus der obigen Gleichung für ψ ferner, dass

$$\theta_0 = \psi + N' - K = \psi + W$$

und da dem Vorhergehenden zufolge auf jeder Haupthöhencurve

$$\theta_0 = 0, \text{ oder } = 180^0$$

ist, so wird hier

$$W = -\psi, \text{ oder } = 180^0 - \psi$$

Substituirt man diese Werthe von W sowohl in die Bedingungsgleichung für die grösste Phase, wie in den Ausdruck für u, so wird in beiden Fällen

$$\text{tg}\,\psi = \frac{\frac{n}{\varkappa m \varrho_0} - \sin H \cos D \sin N'}{\sin H \cos D \cos N'}$$

aber für $W = -\psi$

$$u = -\frac{m\varrho_0 \cos H \sin \psi + \gamma}{\sin \psi}$$

und für $W = 180^0 - \psi$

$$u = \frac{m\varrho_0 \cos H \sin \psi - \gamma}{\sin \psi}$$

Diese Gleichung für ψ lässt den Halbkreis, in welchem ψ zu nehmen ist, unbestimmt, aber die hinzu kommende Bedingung dass u immer positiv werden muss, bestimmt ψ vollständig. Hat man hiemit ψ und u berechnet, so bekommt man nicht nur W durch die obigen Ausdrücke, sondern auch in beiden Fällen $\Sigma = -\psi$, und hiemit

$$\tau = \mu - \frac{15}{n}\gamma \,\text{cotg}\,\psi$$

Aus H, W, τ bekommt man λ und φ durch die betreffenden Ausdrücke des Art. 24. Die beiden hier betrachteten Haupthöhencurven schliessen sich auch im Punkt, welcher $H = 90^0$ angehört, an einander und vereinigen sich zu Einer Curve.

Als Schlussbetrachtung kann hier noch angeführt werden, dass die Haupthöhencurven für die Eintritte, die grösste Phase, und die Austritte auf der Erdoberfläche oft weit aus einander liegen, und dass daher

gemeiniglich die günstigsten Beobachtungsörter für diese drei Erscheinungen auch oft weit aus einander liegen.

27.

Im Vorhergehenden haben wir die Function $\cos H \cos\theta_0$ nur in dem Falle betrachtet, in welchem $\cos\theta_0 = \pm 1$ ist, also wo sie bei gegebener Sonnenhöhe ein (positives oder negatives) Maximum ist, aber man erkennt ohne Weiteres, dass sie auch bei anderen Werthen von $\cos\theta_0$ denselben Werth annehmen kann, obgleich dieser Fall nur auf Kosten der Sonnenhöhe eintreten kann, die immer kleiner sein wird, als in jenem Falle. Aber man ist nicht immer im Stande die Beobachtungsörter so auswählen zu können, dass auf denselben $\cos\theta_0 = \pm 1$ wird, und daher ist die Ermittelung der Oerter, auf welchen $\cos H \cos\theta_0$ überhaupt einem gegebenen Werthe gleich ist, von besonderer Wichtigkeit. Wir kommen hiedurch auf eine besondere Gattung von Curven, die ich, weil jede derselben in allen ihren Punkten gleichsam dieselbe Macht auf die Bestimmung der Sonnenparallaxe ausübt, die isosthenischen Curven nennen will.

Es dienen zur Ermittelung der isosthenischen Curven wieder die Gleichungen, die im zunächst Vorhergehenden angewandt worden sind, die aber für den gegenwärtigen Zweck auf eine etwas andere Form gebracht werden müssen. Man findet leicht, dass die im Art. 24 angeführten Gleichungen mit den folgenden identisch sind,

$$u = S\cos\chi - m\varrho_0\cos H\cos\theta_0$$
$$0 = S\sin\chi + m\varrho_0\cos H\sin\theta_0$$

worin

$$\chi = W - \Sigma' - \theta_0$$

gesetzt worden ist. Jede isosthenische Curve schneidet die betreffende Haupthöhencurve in Einem Punkt, und nennt man die Sonnenhöhe in diesem Durchschnittspunkt $H_,$, so können wir die charakteristische Eigenschaft der isosthenischen Curven wie folgt aufstellen,

$$\cos H\cos\theta_0 = \pm\cos H_,$$

wo $H_,$ constant, und dem Maximum der Höhen H gleich ist. Es ist mit anderen Worten $H_,$ die Sonnenhöhe, in dem Durchschnittspunkt der isosthenischen, und der Haupthöhencurven. Aus der vorstehenden Gleichung ergiebt sich zuerst

$$\cos H\sin\theta_0 = \pm\sqrt{\cos^2 H - \cos^2 H_,}$$

oder, wenn man

$$\cos\eta = \frac{\cos H_{,}}{\cos H}$$

setzt,

$$\cos H \sin\theta_0 = \pm \cos H_{,} \operatorname{tg}\eta$$

Die obigen Gleichungen geben hiemit

$$S \sin\chi = \pm m\varrho_0 \cos H_{,} \operatorname{tg}\eta$$
$$S \cos\chi = u \pm m\varrho_0 \cos H_{,}$$

womit χ und S gegeben sind. Die Gleichungen

$$S \sin\Sigma' = \gamma$$
$$S \cos\Sigma' = (\tau - \mu)\,\tfrac{n}{15}$$

in welchen, gleichwie im Art. 12 und später, die in Graden ausgedrückte Zeit des ersten Meridians mit τ bezeichnet ist, geben hierauf wieder

$$\sin\Sigma' = \frac{\gamma}{S}$$

$$\tau = \mu + \frac{15}{n} S \cos\Sigma'$$

aus welchen man Σ' und τ erhält. Da wieder jedem Werthe von $\sin\Sigma'$ zwei Bögen angehören, so bekommt man auch für jeden Werth von S zwei Werthe von τ, die verschiedenen isosthenischen Curven angehören. Endlich geben die vorhergehenden Gleichungen

$$\operatorname{tg}\theta_0 = \pm \operatorname{tg}\eta$$

und es gehören daher vier verschiedene Werthe von θ_0 zu jedem Werthe von η, nemlich

$$\theta_0 = \quad \eta$$
$$\theta_0 = 180^0 - \eta$$
$$\theta_0 = 180 + \eta$$
$$\theta_0 = 360 + \eta$$

Ist nun somit auch θ_0 berechnet, so bekommt man für jeden Werth dieses Bogens

$$W = \chi + \Sigma' + \theta_0$$

also wegen der zweifachen Werthe von Σ' für jeden Werth von S acht Werthe von W. Nachdem somit H, W, τ gegeben sind, erhält man wieder durch die Gleichungen des Art. 24 die Längen λ und die Breiten φ der Curvenpunkte.

28.

Untersuchen wir die numerischen Werthe von χ. Da auf jeder isosthenischen Curve H nur die Werthe von 0 bis $H_{,}$ annehmen kann,

so folgt aus der Gleichung des vor. Art., durch welche η bestimmt wird, dass dieser Bogen sich auch nur von 0 bis $H_{,}$ bewegen kann, und hieraus folgt, dass das Maximum von χ durch die Gleichung

$$\sin\chi = \pm \frac{m\varrho_0}{S} \sin H_{,}$$

gegeben ist. Aber in den Venusvorübergängen ist nahe

$$m\varrho_0 = 0.0277$$

und wenigstens für die Ein- und Austritte immer nahe

$$S = 1$$

*) substituirt man diese Werthe, und setzt zugleich $H_{,} = 90^0$, so wird das Maximum von χ

$$\chi = \pm 1^0\,35'$$

Dieser Werth von χ ist zugleich das Maximum Maximorum, welches für keinen anderen Werth von $H_{,}$ erreicht werden kann. Dieser grösst mögliche Werth von χ ist aber so klein, dass $\cos\chi$ sich nur sehr wenig von dem Werthe $= 1$ entfernen kann, und wenn man daher bei der Berechnung der isosthenischen Curven $\chi = 0$, folglich $\cos\chi = 1$, und

$$S = u \pm m\varrho_0 \cos H_{,}$$

setzt, so wird man sehr wenig fehlen. Hiemit werden aber in der ganzen Ausdehnung einer jeden isosthenischen Curve nicht nur S, sondern auch Σ und τ unveränderliche Grössen, und aus dieser Eigenschaft entspringt der

Lehrsatz.

»Jede isosthenische Curve ist ein Kreisbogen, dessen auf der Ku»geloberfläche gemessener Halbmesser $= H_{,}$ oder $180^0 - H_{,}$ ist, je »nachdem man diesen Halbmesser von dem einen oder dem anderen »Pole dieses Kreises misst.«

29.

Um den eben aufgestellten Lehrsatz zu beweisen, ist nichts weiter zu thun als nachzuweisen, dass sich auf der Kugeloberfläche ein Punkt angeben lässt, dessen Entfernung von allen Punkten irgend einer isosthenischen Curve dieselbe, sowie dass diese Entfernung $= H_{,}$ oder bez.

*) Dieser numerische Werth von $m\varrho_0$ ist freilich ein specieller, aus dem Vorübergange des Jahres 1874 entnommener, er kann in anderen Durchgängen wohl etwas anders werden, aber sich nie viel davon entfernen.

$= 180^0 - H_,$ ist. Seien Φ und Λ die Breite und Länge irgend eines Punkts auf der Kugel, und wie vorher φ und λ dasselbe für irgend einen Punkt irgend einer isosthenischen Curve; nennt man ausserdem ζ die auf der Kugeloberfläche gemessene Entfernung dieser beiden Punkte, so bekommt man

$$\cos\zeta = \sin\Phi \sin\varphi + \cos\Phi \cos\varphi \cos(\Lambda - \lambda)$$

Seien ferner T, H_0, K_0 in Beziehung auf den eingeführten Punkt dasselbe, was t, H, K für irgend einen Punkt der isosthenischen Curve sind, dann werden

$$\begin{aligned}
\cos\Phi \sin(T + \Delta\alpha') &= \cos H_0 \sin K_0 \\
\cos\Phi \cos(T + \Delta\alpha') &= \cos D \sin H_0 - \sin D \cos H_0 \cos K_0 \\
\sin\Phi &= \sin D \sin H_0 + \cos D \cos H_0 \cos K_0
\end{aligned}$$

während wie früher für jeden Punkt der isosthenischen Curve die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\cos\varphi \sin(t + \Delta\alpha') &= \cos H \sin K \\
\cos\varphi \cos(t + \Delta\alpha') &= \cos D \sin H - \sin D \cos H \cos K \\
\sin\varphi &= \sin D \sin H + \cos D \cos H \cos K
\end{aligned}$$

statt finden. Erwägt man nun, dass zufolge der Unveränderlichkeit von τ auf jeder einzelnen isosthenischen Curve die Gleichung

$$\Lambda - \lambda = T - t$$

statt findet, und substituirt die vorstehenden Gleichungen in die für $\cos\zeta$, so ergiebt sich

$$\cos\zeta = \sin H_0 \sin H + \cos H_0 \cos H \cos(K_0 - K)$$

Um ζ unveränderlich zu machen, braucht man nur

$$H_0 = 0\,, \quad \text{und} \quad K_0 = \theta_0 + K$$

zu setzen, denn alsdann geht vermöge der Gleichung

$$\cos H \cos\theta_0 = \pm \cos H,$$

der vorstehende Ausdruck in

$$\cos\zeta = \mp \cos H,$$

oder

$$\zeta = H,\,, \quad \text{oder} = 180^0 - H,$$

über, womit der Lehrsatz bewiesen ist. Die Pole der isosthenischen Kreisbögen, wie wir sie jetzt nennen können, sind durch die vorstehenden Werthe von H_0 und K_0 gegeben, deren zweiter wegen der Gleichungen

$$W = N' - K = \chi + \Sigma' + \theta_0 \quad \text{und} \quad \chi = 0$$

für K_0 den Ausdruck

$$K_0 = N' - \Sigma$$

giebt. Den oben eingeführten Gleichungen zufolge werden daher Φ und A durch die folgenden Gleichungen erhalten,

$$\begin{aligned} \cos\Phi \sin(T+\Delta\alpha') &= \sin(N'-\Sigma') \\ \cos\Phi \cos(T+\Delta\alpha') &= -\cos(N'-\Sigma')\sin D \\ \sin\Phi &= \cos(N'-\Sigma')\cos D \end{aligned}$$

$$A = T - \tau$$

Die Werthe von Φ und A, die hieraus hervorgehen, sind die Breite und Länge des einen Pols auf der Kugeloberfläche, und es folgt hieraus von selbst, dass $-\Phi$ und $180^0 + A$ die Breite und Länge des anderen Pols sind. Da diese Werthe sich für jeden anderen isosthenischen Kreisbogen ändern, so sind diese Kreisbögen nicht concentrisch, nur für sehr kleine Werthe von H_1 können sie annähernd für concentrisch gehalten werden, aber schon für einiger Maassen grosse Werthe von H_1 weichen sie stark von der Concentricität ab.

Im Allgemeinen gehören die isosthenischen Kreisbögen kleineren Kreisen auf der Kugeloberfläche an, und nur für $H_1 = 90^0$ gehen sie in einen Bogen grössten Kreises über. Dieser bestimmt die Oerter der Erdoberfläche, auf welchen der Coefficient des Differentials der Sonnenparallaxe Null ist, und auf welchen also die Bestimmung dieser Parallaxe absolut unmöglich ist.*)

Der vorstehenden Ableitung zufolge sind diese isosthenischen Kreisbögen nicht die vollkommen strengen Werthe der isosthenischen Curven, allein sie kommen diesen so nahe, dass man sie, ohne Gefahr merklich zu fehlen, immer anwenden kann.

30.

Für die zur grössten Phase gehörigen isosthenischen Kreisbögen sind hier keine besonderen Formeln zu entwickeln, da die anzuwendenden Werthe von u dieselben sind, die in der Berechnung der betreffenden beiden Haupthöhencurven sich ergeben haben. Aber die hieher gehörigen isosthenischen Kreisbögen besitzen die Eigenschaft, dass sie

*) Für die Parallaxe der Distanz hat Lagrange zuerst in den Memoiren der Berliner Academie für das Jahr 1766 das Vorhandensein von isosthenischen Kreisen nachgewiesen.

auf der Kugeloberfläche concentrisch sind, welche Eigenschaft, wie wir eben gesehen haben, den den anderen Erscheinungen zukommenden isosthenischen Kreisbögen abgeht. Dieser Satz soll hier bewiesen werden.

Die aus dem Art. 26 zu entnehmenden Ausdrücke für u sind

$$u = -\frac{m\varrho_0 \cos H \sin\psi + \gamma}{\sin\psi}$$

$$u = \frac{m\varrho_0 \cos H \sin\psi - \gamma}{\sin\psi}$$

Da nun, wenn γ positiv ist, ψ so nahe $= 270^0$ wird, dass die Abweichung von $\sin\psi = -1$ jedenfalls übergangen werden kann, und wenn γ negativ ist, ψ so nahe $= 90^0$ wird, dass alsdann ohne Bedenken $\sin\psi = +1$ gesetzt werden kann, so gehen die beiden obigen Ausdrücke in den folgenden einzigen über,

$$u = (\pm\gamma) \mp m\varrho_0 \cos H$$

wo die doppelten Zeichen vor γ so zu wählen sind, dass $(\pm\gamma)$ immer positiv wird. Für die isosthenischen Kreisbögen ist dem Vorhergehenden zufolge,

$$S = u \pm m\varrho_0 \cos H,$$

und da auf diesen $H_,$ immer dieselben Werthe annimmt, wie H auf den Haupthöhencurven, so ergiebt sich für jeden der hier in Rede stehenden isosthenischen Kreisbogen

$$S = (\pm\gamma)$$

und ferner

$$\Sigma = 90^0, \quad \text{oder} = 270^0$$

je nachdem γ positiv oder negativ ist, so wie in jedem Falle

$$\tau = \mu$$

Hiemit ist die Concentricität dieser Kreisbögen bewiesen, und man erkennt zugleich, dass ihre Mittelpunkte mit den Anfangspunkten der beiden betreffenden Haupthöhencurven zusammen fallen.

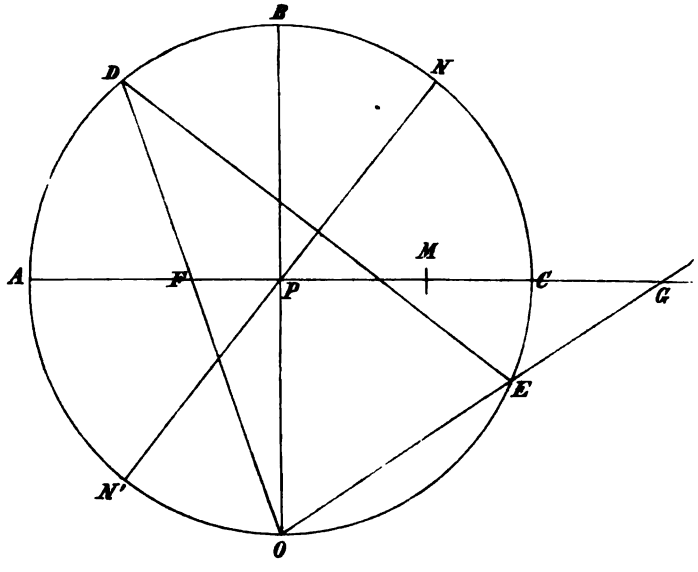
Die vorstehenden, sich auf die zur grössten Phase gehörenden isosthenischen Kreisbögen beziehenden, Regeln erleiden eine Ausnahme, wenn die Venus nahe central vor der Sonnenscheibe vorüber geht. In den beiden zunächst bevorstehenden Vorübergängen ist dieses aber nicht der Fall.

31.

Um einen Ueberblick der ganzen Erscheinung eines Venusvorüberganges zu erhalten, wird es dienlich sein, sowohl die Grenzcurven wie

die Haupthöhencurven und die isosthenischen Kreisbögen auf zwei Planigloben (eine nördliche und eine südliche) aufzuzeichnen, und man wählt für diese am Zweckmässigsten die stereographische Polarprojection. Die Regeln für das Aufzeichnen von Kreisen auf der stereographischen Projection sind allgemein bekannt, und nur für den Fall, dass sie diesem oder jenem nicht sogleich bei der Hand sein sollten, will ich sie hier angeben.

Den Satz, dass jeder (grösster oder kleinerer) Kreis auf der Kugel auf der stereographischen Projection auch ein Kreis ist, nehme ich als bekannt an, und werde daher nur zeigen, wie man den Halbmesser des Kreises und die Coordinaten des Mittelpunkts desselben auf der Projection findet.



Sei der Kreis *OABCO* die orthographische Projection einer Kugel auf eine Ebene, die durch den Mittelpunkt derselben geht, und *DE* die orthographische Projection eines kleineren Kreises auf dieser Kugel. Da *DE* eine grade Linie sein soll, so folgt, dass die Ebene des kleineren Kreises senkrecht auf der Projection stehend gedacht wird, und zieht man daher die Grade *NN'* senkrecht auf *DE* und durch den Mittelpunkt der Kugel gehend, so sind die Durchschnittspunkte *N* und *N'* mit dem Kreise der Figur die Pole des Kreises *DE* auf der Kugeloberfläche.

Sei nun *O* der Augenpunkt der stereographischen Projection, dann liegt diese letztere in der auf der Linie *ACG* senkrecht auf der orthographischen Projection zu errichtenden Ebene. Zieht man die Graden

OD und OEG, dann ist die Entfernung der Durchschnittspunkte derselben mit AC von einander, oder die Grade FG der Durchmesser des Kreises DE in der stereographischen Projection, und der Halbirungspunkt M der Linie FG ist der Mittelpunkt des Kreises in der Projection.

Sei $H_{,}$ die auf der Oberfläche der Kugel gemessene Entfernung des Kreises DE von dem Pole N desselben, also $ND = NE = H_{,}$, und ψ, ebenfalls auf der Kugeloberfläche, der Abstand des Poles N vom Punkt B, dessen Projection im Mittelpunkt der stereographischen Projection liegt, dann ist $NB = \psi$. Sei endlich r der Halbmesser der stereographischen Projection, welcher der Linie AP oder CP gleich ist.

Aus der Figur folgt nun, dass

$$DB = H_{,} - \psi$$
$$EB = H_{,} + \psi$$

sind, und folglich werden die Winkel

$$DOB = \tfrac{1}{2}(H_{,} - \psi)$$
$$EOB = \tfrac{1}{2}(H_{,} + \psi)$$

so wie die Linien

$$FP = r \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(H_{,} - \psi) = r \frac{\sin H_{,} - \sin \psi}{\cos H_{,} + \cos \psi}$$
$$GP = r \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(H_{,} + \psi) = r \frac{\sin H_{,} + \sin \psi}{\cos H_{,} + \cos \psi}$$

Bezeichnet man ferner den Halbmesser der Projection des Kreises DE, oder die Hälfte der Linie FG mit R, dann wird $2R = FP + GP$, also den vorstehenden Gleichungen zufolge

$$R = r \frac{\sin H_{,}}{\cos H_{,} + \cos \psi}$$

Bezeichnet man ferner den Abstand des Mittelpunkts des Kreises der Projection vom Mittelpunkt dieser, das ist die Linie PM mit k, so wird $2k = GP - FP$, und die Gleichungen geben

$$k = r \frac{\sin \psi}{\cos H_{,} + \cos \psi}$$

Da nun die Linie MP oder k immer in der Projection des grössten Kreises der Kugel liegt, welcher durch den Augenpunkt und die Pole des zu projicirenden Kreises geht, so ist durch die vorstehenden Ausdrücke für R und k die stereographische Projection des Kreises DE vollständig gegeben.

32.

Die im vor. Art. entwickelten Ausdrücke gelten für jede stereographische Projection, beziehen wir sie jetzt auf die stereographische Polar-

projection. In dieser ist der Punkt B der Figur der eine Pol der Kugel, dessen Projection den Mittelpunkt der genannten Polarprojection bildet, r ist der Halbmesser des Aequators in der Projection, und nennt man die geographische Länge des Poles des zu projicirenden Kreises, wie oben, A, so liegt die Projection des Mittelpunkts desselben auch unter der Länge A. Sei ferner wie oben die Polhöhe des Pols N des zu projicirenden Kreises Φ, so wird $\psi = 90^0 - \Phi$, und man bekommt

$$R = r \frac{\sin H_{,}}{\cos H_{,} + \sin \Phi}$$

$$k = r \frac{\cos \Phi}{\cos H_{,} + \sin \Phi}$$

Es kann sich ereignen, dass man den gegebenen Kreis DE der Kugel, oder wenigstens einen Theil desselben, auf die entgegengesetzte stereographische Polarprojection auftragen muss. In diesem Falle ist nichts weiteres zu thun wie $180^0 - H_{,}$ statt $H_{,}$ in die Ausdrücke für R und k zu setzen, so wie k unter der Länge $180^0 + A$ statt unter A selbst aufzutragen.

33.

Ausser dem Vorstehenden ist noch die Untersuchung des Einflusses, den die Fehler der Venus- und Sonnentafeln auf die Bestimmung der Sonnenparallaxe aus einem Venusvorübergange ausüben, von besonderer Wichtigkeit, und diese soll daher hier vorgenommen werden. Nehmen wir, wie gewiss erlaubt ist, hiebei an, dass die Tafelfehler während des Vorüberganges dieselben bleiben, so sind n und N des Art. 9 unveränderlich, und P_0 und Q_0, oder allgemein P und Q die Veränderlichen. Ihrer Seits sind daher auch γ und μ, so wie S und Σ veränderlich. Der Ausdruck für $d\varrho_0$ des Art. 19 giebt, wenn blos die mit dS und $d\Sigma$ multiplicirten Glieder berücksichtigt werden

$$\cos H \cos \theta_0 d\varrho_0 = \frac{1}{m} \cos (N' - \Sigma - \theta)\, dS$$
$$+ \frac{1}{m} \sin (N' - \Sigma - \theta)\, S d\Sigma$$

Die Differentiation der Ausdrücke für P und Q des Art. 9 geben, mit stets ausreichender Genauigkeit

$$dP = mr_{,} \cos b\, (dl - d\lambda')$$
$$dQ = mr_{,}\, (db - d\beta')$$

in welchen $d\lambda' = d\lambda$ und $d\beta' = -d\beta$ gesetzt werden müssen. Man bekommt ferner

$$d\gamma = \sin NdQ - \cos NdP$$
$$d\mu = -\frac{15}{n}\cos NdQ - \frac{15}{n}\sin NdP$$
$$dS = \sin \Sigma' d\gamma - \frac{n}{15}\cos \Sigma' d\mu$$
$$Sd\Sigma' = \cos \Sigma' d\gamma + \frac{n}{15}\sin \Sigma' d\mu$$

und durch die Gleichungen des Art. 7 bekommt man für die Conjunction

$$dl - d\lambda = \frac{r'}{r_1 \cos b}(dl' - d\lambda)$$
$$db + d\beta = \frac{r'}{r_1} d\beta$$

wo dl' den tabularischen Fehler der Sonnenlänge, sowie $d\lambda$ und $d\beta$ die tabularischen Fehler der heliocentrischen Länge und Breite der Venus bezeichnen. Aus diesen Gleichungen ergiebt sich

$$\cos H \cos \theta_0 d\varrho_0 = r' \sin (N' - N - \theta)(d\lambda - dl') + r' \cos (N' - N - \theta) d\beta$$

Die Fehler der geocentrischen Längen und Breiten der Venus kommen also, wie man sieht, hier gar nicht in Betracht; Fehler in den tabularischen Werthen der Radii Vectores haben so geringen Einfluss, dass sie keine Beachtung verdienen, und daher gänzlich übergangen werden können.

34.

Es ist nun vor Allem hier zu erwägen, dass die tabularischen Fehler der Venusörter, abgesehen von anderen Ursachen, die sie haben können, Functionen der Sonnenparallaxe, also Functionen der Unbekannten unserer Aufgabe sind, denn bei der Bearbeitung der Venustafeln hat man die Anwendung eines gewissen Werthes der Sonnenparallaxe nicht umgehen können, und der Fehler, mit welchem dieser Werth behaftet ist, hat sich mehr oder weniger auf die tabularischen Venusörter übertragen. Es ist daher von Wichtigkeit, den tabularischen Fehler dieser Oerter entweder zu eliminiren, oder auf angemessene Art in Function der Sonnenparallaxe zu bestimmen.

Betrachten wir die Bögen N und Σ' genauer. In jedem Venusvorübergange ist N ein beständiger Bogen, welcher in der Nähe von 270° liegt, wogegen Σ' während des Verlaufes der Erscheinung veränderlich, aber zwischen Werthen eingeschlossen ist, die im Mittel, jenachdem γ positiv oder negativ ist, 90° oder 270° betragen. Die möglichst grosse Abweichung des Werthes von Σ' von diesen Mittelwerthen findet bei

den Ein- und Austritten statt, die Mittelwerthe selbst sehr nahe während der grössten Phase.*) In der Regel wird $\cos(N'-N-\theta)$ grösser sein, wie $\sin(N'-N-\theta)$, und der Fehler in der Venusbreite wird auf das Resultat grösseren Einfluss äussern, wie der in der Venuslänge, aber jener ist auch in den Tafeln von dem etwaigen Fehler der bei der Bearbeitung derselben angewandten Sonnenparallaxe mehr beeinflusst als dieser.

Es geht aus allem diesen hervor, dass für die gleichartige Erscheinung — Eintritt oder Austritt oder Entfernung der Mittelpunkte in gleichem Abstand von der grössten Phase — die rechte Seite der Gleichung des vor. Art. nahe denselben Werth annimmt, es mag diese Erscheinung auf der nördlichen oder der südlichen Halbkugel der Erde beobachtet worden sein. Aber wenn auf dem einen solcher zwei Beobachtungsörter $\cos\theta_0$ positiv ist, so ist auf dem anderen Beobachtungsorte $\cos\theta_0$ negativ, und hat übrigens nahe denselben Werth. Die Tafelfehler wirken also in entgegengesetztem Sinne auf diese Beobachtungen ein, und das arithmetische Mittel aus den Resultaten derselben wird schon sehr nahe von den Tafelfehlern unabhängig sein. Sollte dieses Mittel den gewünschten Zweck nicht ausreichend erfüllen, so lässt sich immer eine andere Combination der Beobachtungen angeben, wodurch der Zweck erreicht wird; die zweckmässigste wird weiter unten entwickelt werden.

35.

Es kann sich wohl ereignen, dass das im vor. Art. erklärte Verfahren, die Tafelfehler zu eliminiren, aus Mangel an geeigneten Beobachtungen nicht angewandt werden kann. Es ist der Fall nicht unmöglich, dass auf der einen Halbkugel der Erde, wegen localer Hindernisse geeignete Beobachtungen nicht haben erlangt werden können. In diesem Falle kann man aber durch besondere Beobachtungen mit Meridianinstrumenten den Tafelfehler bestimmen, und in Function der Sonnenparallaxe darstellen. Man würde zu dem Ende vor und nach der Conjunction, in welcher ein Venusvorübergang eintritt, die Venusörter im Meridian beobachten, und die Resultate dieser Beobachtungen mit denen der Venustafeln vergleichen müssen.

---

*) Im Venusdurchgange des Jahres 1874 ist die grösste Abweichung vom Mittelwerthe ohngefähr 31^0.

Seien A und D eine im Meridian beobachtete grade Aufsteigung und Abweichung der Venus, dann ist zwar A auch die geocentrische grade Aufsteigung, aber die geocentrische Abweichung ist

$$D \pm \frac{\varrho_0}{r_,} \cos H_0$$

wenn H_0 die Meridianhöhe der Venus bezeichnet. Das obere Zeichen muss angewandt werden, wenn die Venus südlich, und das untere Zeichen, wenn sie nördlich vom Zenith des Beobachtungsortes culminirt. Aus A und D rechne man auf gewöhnliche Art Länge und Breite, und nenne diese L und B, dann wird die geocentrische Länge =

$$L \pm \frac{\varrho_0}{r_,} \cos H_0 \frac{\sin h_0}{\cos b_0}$$

und die geocentrische Breite =

$$B \pm \frac{\varrho_0}{r_,} \cos H_0 \cos h_0$$

wo h_0 der im Zeitpunkt der Beobachtung statt findende Winkel zwischen dem Breiten- und dem Abweichungskreise ist. Aus L und B rechne man die heliocentrische Länge und Breite, die mit (λ) und (β) bezeichnet werden sollen, dann wird der Tafelfehler, in soweit er aus dieser Beobachtung folgt, in heliocentrischer Länge =

$$(\lambda) - \lambda_0 \pm \frac{\varrho_0}{r} \cos H_0 \frac{\sin h_0}{\cos \beta_0} \cos (l_0 - \lambda_0)$$

und in heliocentrischer Breite =

$$(\beta) - \beta_0 \pm \frac{\varrho_0}{r} \left\{ \cos H_0 \cos h_0 \frac{\cos \beta_0}{\cos b_0} + \cos H_0 \sin h_0 \sin \beta_0 \sin (l_0 - \lambda_0) \right\}$$

Hat man nun eine Anzahl solcher Beobachtungen erhalten, und aus jeder derselben die vorstehenden Functionen berechnet, in welchen mit Ausnahme von ϱ_0, die den Grössen angehängte Null andeutet, dass sie die gleichzeitigen Werthe sein sollen, so muss man, in der Annahme, dass der Tafelfehler während derselben sich nicht ändert, aus allen das arithmetische Mittel nehmen. Sei (L) das Mittel aus den $(\lambda) - \lambda_0$, a das Mittel aus den Werthen des zu $(\lambda) - \lambda_0$ gehörigen Coefficienten von ϱ_0, (B) das Mittel aus den Werthen von $(\beta) - \beta_0$, und b das Mittel aus den dazu gehörigen Coefficienten von ϱ_0, dann wird der Tafelfehler, wenn er wie vorher mit $d\lambda$ und $d\beta$ bezeichnet wird,

$$d\lambda = (L) \pm \varrho_0 a \,, \quad d\beta = (B) \pm \varrho_0 b$$

und man bekommt durch die Gleichung des Art. 33

$$d\varrho_0 = U \pm \varrho_0 U'$$

wenn zur Abkürzung

$$U = \frac{(L)r' \sin(N'-N-\theta) + (B)r' \cos(N'-N-\theta)}{\cos H \cos\theta_0}$$

$$U' = \frac{a\, r' \sin(N'-N-\theta) + (B)r' \cos(N'-N-\theta)}{\cos H \cos\theta_0}$$

gesetzt wird. Man habe nun, ohne auf die Tafelfehler Rücksicht zu nehmen, durch eine der Gleichungen des Art. 15 für irgend welche Beobachtung den Werth von ϱ_0 berechnet, und diesen $= (\varrho_0)$ gefunden, dann wird der berichtigte Werth

$$\varrho_0 = (\varrho_0) + d\varrho_0$$

also in Folge des vorstehenden Ausdrucks

$$\varrho_0 = \frac{(\varrho_0) + U}{1 \mp U'}$$

Wenn nun in den Meridianbeobachtungen, die dem Vorhergehenden zufolge, gedient haben sollen, um U und U' zu erhalten, die Venus in der Nähe des Zeniths culminirt hat, so wird U' sehr klein, und es kann wenig verschlagen, ob U' positiv oder negativ ist. Wenn aber bei den genannten Beobachtungen die Venus beträchtlich weit vom Zenith culminirt hat, so kommt es zur sicheren Bestimmung von ϱ_0 wesentlich auf das Zeichen von U' an; dann muss dieses so beschaffen sein, dass der Divisor des vorstehenden Ausdrucks grösser wie 1 wird. Aus den vorstehenden Erklärungen findet man leicht, dass diese Bedingung immer erfüllt wird, wenn die Beobachtungsörter des Venusvorüberganges und der Bestimmung der Tafelfehler auf den entgegengesetzten Halbkugeln der Erde liegen. Im gegentheiligen Falle wird der Divisor kleiner wie 1, und kann sogar Null werden.

Die Tafelfehler der Sonnenlänge müssen bei Anwendung des eben beschriebenen Verfahrens für sich bestimmt werden, es ist aber hiebei nichts zu bemerken, da diese durch Meridianbeobachtungen unabhängig von der Sonnenparallaxe gefunden werden.

Es wäre noch die Einwirkung von Fehlern in den Halbmessern der Venus und der Sonne zu untersuchen, diese soll mit dem Inhalt der folgenden Artt. verbunden werden.

36.

Bis jetzt habe ich die Bestimmung der Sonnenparallaxe aus einem Venusdurchgange so aufgefasst, dass man aus jeder Beobachtung durch die Gleichungen des Art. 15 die aus derselben folgende Sonnenparallaxe bestimme, und auf die eine oder andere der beiden erklärten Verfahrungsarten von dem Einflusse der Tafelfehler befreie. Alle so erhaltenen

Werthe der Sonnenparallaxe sind hierauf nach den Grundsätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung so mit einander zu combiniren, dass schliesslich der wahrscheinlichste Werth der Sonnenparallaxe daraus hervorgeht, und die Angabe dieser Combination unterliegt keiner Schwierigkeit.

Aber man kann die Aufgabe aus einem andern Gesichtspunkt betrachten, und sie ist auch von den Berechnern der Venusvorübergänge des vorigen Jahrhunderts von einem andern Gesichtspunkt betrachtet worden. Man kann einen genäherten, vorläufigen Werth der Sonnenparallaxe in die Formeln substituiren, die Unterschiede berechnen, die die Beobachtungen darauf ergeben, die Differentialgleichungen zwischen diesen Unterschieden und den Verbesserungen der der Rechnung zu Grunde gelegten Elemente aufstellen, und aus der Auflösung der Gesammtheit dieser Gleichungen mit Zuziehung der Methode der kleinsten Quadrate die wahrscheinlichsten Verbesserungen aller dieser Elemente bestimmen. Hiebei braucht die Abhängigkeit der Tafelfehler von der Sonnenparallaxe nicht besonders berücksichtigt zu werden.

Für die Venusdurchgänge des vorigen Jahrhunderts, wo nur Ein- und Austritte beobachtet, oder wenigstens nur diese in Rechnung gezogen worden sind, hat man mit einer vorläufigen Sonnenparallaxe die Ein- und Austrittszeiten berechnet, mit den beobachteten verglichen, darauf die betreffenden Differentialgleichungen aufgestellt, und durch die Methode der kleinsten Quadrate aufgelöst. Bei beobachteten Ränderentfernungen lässt sich dasselbe Verfahren anwenden, aber es ist in jedem Falle weitläuftig, da die Gleichungen, aus welchen die Ein- und Austrittszeiten, oder die einer gegebenen Ränderentfernung berechnet werden müssen, transcendent sind, wenn man nicht zu mislichen Weglassungen greifen will. Die genauen Gleichungen für diese Berechnung enthalten sowohl die Zeit t selbst wie $\sin t$ und $\cos t$, und können daher nur indirect, oder durch successive Näherungen aufgelöst werden, auch werden die Coefficienten der unbekannten Verbesserungen der Elemente der Rechnung, wenn man sie genau haben will, weitläuftig.

Weit einfacher, und in jeder Beziehung direct und strenge, wird die Rechnung, wenn man einen entgegengesetzten Weg einschlägt, und aus den beobachteten Zeiten nebst einem vorläufigen Werthe der Sonnenparallaxe den Halbmesser u des Schattenkegels in der durch den Beobachtungsort gelegten Ebene berechnet, diesen bei beobachteten Ränderberührungen mit dem theoretischen, und bei beobachteten Rän-

derentfernungen mit dem beobachteten Werthe desselben vergleicht, darauf die entsprechenden Differentialgleichungen aufstellt, und durch die Methode der kleinsten Quadrate auflöst.

37.

Zur Ausführung des eben angedeuteten Verfahrens kann man den aus den Beobachtungszeiten zu berechnenden Werth von u, den ich, um ihn von dem andern oben genannten Werthe zu unterscheiden, mit u_0 bezeichnen werde, aus der quadratischen Gleichung des Art. 15 berechnen, nachdem man sie in Bezug auf u umgestellt hat. Einfacher ist es indess, dafür dieselben Gleichungen des Art. 15 anzuwenden, die zu den vorhergehenden Untersuchungen gedient haben, aber jetzt nicht abgekürzt werden dürfen. Setzt man

$$J = \theta - L$$

so werden diese Gleichungen

$$u_0 \sin J = S \sin(W' - \Sigma)$$
$$u_0 \cos J = S \cos(W' - \Sigma) - m\varrho_0 l \cos H$$

und geben nicht blos u_0, sondern auch den Winkel J, welcher weiter unten in den Differentialquotienten wieder erscheinen, und zur Berechnung dieser gebraucht werden wird.

Um u_0 und J aus den vorstehenden Gleichungen berechnen zu können, muss zuerst die Kenntniss von l, L und H erlangt werden, und diese bekommt man auf die folgende Weise. Man rechne die Hülfswinkel p und q aus den folgenden Gleichungen

$$\cos p \sin q = \cos\varphi_, \cos(t + \Delta\alpha')$$
$$\cos p \cos q = \sin\varphi_,$$
$$\sin p = \cos\varphi_, \sin(t + \Delta\alpha')$$

durch welche q immer so zu bestimmen ist, dass $\cos p$ positiv wird, dann erhält man

$$(l \cos H) \sin L = \sin p$$
$$(l \cos H) \cos L = d \cos p \cos(q + D)$$
$$\sin H = \cos p \sin(q + D)$$

Die Functionen L, $(l \cos H)$, $\sin H$ sind die einzigen die statt K und H hier gebraucht werden. Hat man jene berechnet, so erhält man

$$W' = N' - L$$

und ferner

$$S \sin\Sigma = \gamma$$
$$S \cos\Sigma = (t - \lambda - \mu)\frac{n}{15}$$

womit alle Grössen gegeben sind, die zur Berechnung von u_0 und J aus den obigen Gleichungen gebraucht werden, indem für ϱ_0 ein beliebiger, genäherter Werth zu substituiren ist.

Da hier t die beobachtete wahre Zeit des Beobachtungsortes bezeichnet, so hat man, wenn die Beobachtung nach mittlerer oder Sternzeit angestellt und niedergeschrieben worden ist, diese vor der Substitution in die obigen Ausdrücke in wahre Sonnenzeit zu verwandeln.

Betrachten wir nun den Fall der beobachteten Ränderentfernung, dann ist der daraus folgende Werth des zweiten Ausdrucks für u des Art. 17 dem obigen Werthe von u_0 gegenüber zu stellen, nemlich

$$\pm u = (u) - \{r'r_{,} - (r' + r_{,})\,\varrho_0 \sin H\}\,\frac{m}{r}\,\mathrm{tg}\,b'$$

in welchem den Artt. 4 und 15 zufolge

$$(u) = u' - m\varrho_0 \sin f \sin H$$

und

$$u' = m\,\frac{r_{,}}{r}\sin \Delta' \pm m\,\frac{r'}{r}\sin \Delta$$

$$\sin f = \frac{1}{mr_{,}}\{u' \mp m \sin \Delta\} = \frac{\sin \Delta' \pm \sin \Delta}{r}$$

sind.*) In Bezug auf die Anwendung der oberen oder der unteren Zeichen dieser Ausdrücke beziehe ich mich hier auf die in den Artt. 4 und 17 gegebenen Erklärungen.

38.

Der Unterschied zwischen u_0 und u, welcher sich ergeben wird, ist nun Folge, theils der Beobachtungsfehler, theils der Fehler der zur Berechnung dieser beiden Grössen angewandten Elemente, und bezeichnet man den Inbegriff der Fehler der letzteren mit du_0 und du, so dass die wahren Werthe $u_0 + du_0$ und $u + du$ werden, so muss, wenn keine Beobachtungsfehler vorhanden sind, die Bedingungsgleichung

$$u_0 + du_0 = u + du$$

statt finden. Dieselbe Gleichung muss aber auch bei vorhandenen Beobachtungsfehlern für jede vorhandene Beobachtung aufgestellt werden, und da der Gesammtheit dieser Bedingungsgleichungen, eben der Beobachtungsfehler wegen, nicht vollständig Gnüge geleistet werden kann, so müssen, den Grundsätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung zufolge, die

*) $\sin f$ und $\mathrm{tg}\,f$, so wie $\sin b'$ und $\mathrm{tg}\,b'$ sind hier wegen der Kleinheit der Bögen gleichbedeutend.

wahrscheinlichsten Werthe der Fehler der Elemente derselben durch die Methode der kleinsten Quadrate ermittelt werden.

39.

Es sind nun zuerst, um die oben ausgesprochene Bedingung erfüllen zu können, die Differentiale du_0 und du in Bezug auf die in ihnen enthaltenen Elemente zu entwickeln, und diese letzteren sind: die Sonnenparallaxe selbst, der Unterschied zwischen der Sonnenlänge und der heliocentrischen Venuslänge, die heliocentrische Venusbreite, und die Halbmesser der Sonne und der Venus, welchen man noch die Länge des Beobachtungsortes hinzufügen kann, obgleich diese bei der Auflösung der Gleichungen weggelassen werden muss.

Ich bemerke, dass im Vorhergehenden die heliocentrische Länge der Venus und die geographische Länge des Beobachtungsortes mit demselben Zeichen λ bezeichnet worden sind. Hier wo diese beiden Grössen neben einander vorkommen, muss eine verschiedene Bezeichnung eingeführt werden, und es wird daher im Folgenden die geographische Länge des Beobachtungsortes mit λ_0 bezeichnet werden, während nach wie vor λ die heliocentrische Länge der Venus bedeuten wird.

Die Differentiation der Gleichungen für u_0 und J des Art. 37 giebt zuerst, wenn gar keine Grössen übergangen werden,

$$\begin{aligned} du_0 = &- ml \cos H d\varrho_0 \\ &+ \cos(W' - \Sigma - J)\, dS \\ &+ \sin(W' - \Sigma - J)\, S d\Sigma \end{aligned}$$

und aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} S \sin \Sigma &= \gamma \\ S \cos \Sigma &= \tfrac{n}{15}(t - \lambda_0 - \mu) \end{aligned}$$

erhält man

$$\begin{aligned} dS &= \sin \Sigma d\gamma - \tfrac{n}{15} \cos \Sigma (d\lambda_0 + d\mu) \\ S d\Sigma &= \cos \Sigma d\gamma + \tfrac{n}{15} \sin \Sigma (d\lambda_0 + d\mu) \end{aligned}$$

die durch Hülfe der Relationen des Art. 33, und der Bemerkung über die Einheit von $d\lambda_0$ des Art. 20 in die folgenden übergehen,

$$\begin{aligned} dS = &- mr' \sin(N - \Sigma)(d\lambda - dl') + mr' \cos(N - \Sigma)\, d\beta \\ &- \tfrac{nR}{3600} \cos \Sigma d\lambda_0 \\ S d\Sigma = &\; mr' \cos(N - \Sigma)(d\lambda - dl') + mr' \sin(N - \Sigma)\, d\beta \\ &+ \tfrac{nR}{3600} \sin \Sigma d\lambda_0 \end{aligned}$$

wo $R = 206265''$, und die Einheit von $d\lambda_0$ das 15fache der Einheit der anderen Differentiale ist.

Die Gleichung für u des vorvor. Art. giebt

$$\pm du = m\left(\frac{r_,}{r} - \frac{\varrho_0}{r}\sin H\right)(d\Delta' \pm d\Delta_,) - m\left(\sin f - \frac{r'+r_,}{r}\operatorname{tg} b'\right)\sin H d\varrho_0$$

wo

$$d\Delta_, = \frac{r'}{r_,}\left(1 + \frac{\varrho_0 r}{r' r_,}\sin H\right) d\Delta$$

ist, und diese sind die Ausdrücke, die für du_0 und du in die Bedingungsgleichung

$$u_0 - u + du_0 - du = 0$$

zu substituiren sind.

40.

Den Unterschied $u_0 - u$ geben die obigen Ausdrücke für u_0 und u in Theilen des Kreishalbmessers, und die unmittelbare Substitution der im vor. Art. erhaltenen Ausdrücke für du_0 und du würde daher zur Folge haben, dass man auch $d\varrho_0$, $(dl' - d\lambda)$, $d\beta$, $S d\lambda_0$, $d\Delta'$, $d\Delta_,$, in Theilen des Kreishalbmessers ausgedrückt erhalten würde. Da es aber angemessen ist diese Verbesserungen in Bogensecunden auszudrücken, so muss bei der Substitution der Unterschied $u_0 - u$ mit $R = 206265''$ multiplicirt werden. Unterscheiden wir, um in der Anwendung der doppelten Zeichen keine Undeutlichkeit zu veranlassen, die beiden Fälle, in welchen die Entfernungen der beiden Venusränder, entweder vom nächsten oder vom entferntesten Sonnenrande gemessen worden sind, dann erhalten wir aus dem Vorhergehenden:

Im ersten Falle.

$$\begin{aligned} 0 = \frac{R}{m}(u_0 - u) &- \left\{l\cos H\cos J - \left(\sin f - \frac{r'+r_,}{r}\operatorname{tg} b'\right)\sin H\right\} d\varrho_0 \\ &+ r'\sin(W' - N - J)(d\lambda - dl') \\ &+ r'\cos(W' - N - J)\, d\beta \\ &- U\cos(W' - J)\, d\lambda_0 \\ &- \left(\frac{r_,}{r} - \frac{\varrho_0}{r}\sin H\right)(d\Delta' \pm d\Delta_,) \end{aligned}$$

wo zur Abkürzung

$$U = \frac{206265\, n}{3600\, m}$$

gesetzt worden, und J der im Art. 37 eingeführte Hülfswinkel ist.

Im zweiten Falle.

$$\begin{aligned} 0 = \tfrac{R}{m}(u_0 - u) &- \left\{ l \cos H \cos J + (\sin f - \tfrac{r'+r_1}{r} \operatorname{tg} b') \sin H \right\} d\varrho_0 \\ &+ r' \sin(W' - N - J)\,(d\lambda - dl') \\ &+ r' \cos(W' - N - J)\, d\beta \\ &- U \sin(W' - J)\, d\lambda_0 \\ &+ \left(\tfrac{r'}{r} - \tfrac{\varrho_0}{r} \sin H\right)(d\Delta' \pm d\Delta_1) \end{aligned}$$

In beiden Ausdrücken ist das obere Zeichen anzuwenden, wenn die Entfernung des entferntesten, und das untere Zeichen, wenn die Entfernung des nächsten Venusrandes bez. vom nächsten oder vom entferntesten Sonnenrande gemessen worden ist. Dieselben Regeln beziehen sich auch auf das im Ausdrucke von $\sin f$ vorkommende doppelte Zeichen.

41.

Da für beobachtete Ein- oder Austritte der Ausdruck für u etwas anders wird, so halte ich für dienlich auch für diese Fälle die Bedingungsgleichung besonders aufzustellen. Da für Ein- und Austritte

$$u = u' - m\varrho_0 \sin f \sin H$$

wird, wo u' und $\sin f$ dieselben Ausdrücke haben wie vorher, so bekommen wir jetzt

$$\begin{aligned} du = &\; m\left(\tfrac{r_1}{r} - \tfrac{\varrho_0}{r} \sin H\right)(d\Delta' \pm d\Delta_1) \\ &- m \sin f \sin H d\varrho_0 \end{aligned}$$

womit sich ergiebt

$$\begin{aligned} 0 = \tfrac{R}{m}(u_0 - u) &- \{ l \cos H \cos J - \sin f \sin H \}\, d\varrho_0 \\ &+ r' \sin(W' - N - J)\,(d\lambda - dl') \\ &+ r' \cos(W' - N - J)\, d\beta \\ &- U \sin(W' - J)\, d\lambda_0 \\ &+ \left(\tfrac{r_1}{r} - \tfrac{\varrho_0}{r} \sin H\right)(d\Delta' \pm d\Delta_1) \end{aligned}$$

und das obere Zeichen für äussere, hingegen das untere Zeichen für innere Berührungen anzuwenden ist, welche Regeln sich auch auf das in $\sin f$ enthaltene doppelte Zeichen erstrecken.

42.

Es sind zu den im Art. 40 enthaltenen Bedingungsgleichungen noch einige Bemerkungen zu machen, da gemessene Ränderentfernungen auf

verschiedene Weise behandelt werden können. Will man jede gemessene Ränderentfernung für sich behandeln, so ist zwar diesen Bedingungsgleichungen nichts hinzuzufügen, aber anders verhält es sich, wenn man verschiedene solcher Messungen mit einander vereinigen kann.

Ich nehme an, dass man zuerst die Entfernung der nächsten Ränder der Venus und der Sonne, und gleich darauf die Entfernung des entgegengesetzten Venusrandes von demselben Sonnenrande gemessen habe. Wegen der kurzen Zwischenzeit zwischen diesen beiden Messungen ist man berechtigt das arithmetische Mittel daraus zu nehmen, und als eine einzige Beobachtung anzusehen, die für das arithmetische Mittel aus den beiden Beobachtungszeiten gilt. Seien die beiden gemessenen Entfernungen d und d', und

$$b' = \tfrac{1}{2}(d + d')$$

dann ist b' die Entfernung des Mittelpunkts der Venus vom nächsten Sonnenrande, und wenn das Instrument, dessen man sich zu diesen Messungen bedient, zweckmässig eingerichtet ist, so kann man diese beiden Beobachtungen so einrichten, dass im vorstehenden Ausdruck für b' die Collimation desselben von selbst eliminirt ist. Jedenfalls ist in diesem Ausdruck der Venushalbmesser ohne Weiteres verschwunden, und es wird zwar wieder der für u anzuwendende Ausdruck

$$u = (u) - \{r_{,} r' - (r' + r_{,})\, \varrho_0 \sin H\} \frac{m}{r} \operatorname{tg} b'$$

wo wie immer

$$(u) = u' - m\varrho_0 \sin f \sin H$$

ist, aber es werden jetzt

$$u' = m \frac{r_{,}}{r} \sin \Delta'$$

$$\sin f = \frac{u}{m r_{,}} = \frac{\sin \Delta'}{r}$$

Da hiemit der Venushalbmesser vollständig eliminirt ist, so muss auch in der ersten Gleichung des Art. 40, die immer noch anzuwenden ist,

$$d\Delta_{,} = 0$$

gesetzt, oder mit anderen Worten das mit $d\Delta_{,}$ multiplicirte Glied weggelassen werden.

Hat man hingegen die Entfernungen beider Venusränder vom entferntesten Sonnenrande in einer kurzen Zwischenzeit gemessen, so wird für das Mittel aus den beiden Beobachtungszeiten

$$b'' = \tfrac{1}{2}(d'' + d''')$$

zu setzen sein, wenn d'' und d''' diese beiden Entfernungen bezeichnen.

Es ist nun b'' die Entfernung des Venusmittelpunkts vom entferntesten Sonnenrande, und

$$u = -(u) + \{r_{,}r' - (r'+r_{,})\,\varrho_0 \sin H\}\,\frac{m}{r}\,\mathrm{tg}\,b''$$

während (u) denselben Ausdruck hat wie im nächst vorhergehenden Falle. In der zweiten Gleichung des Art. 40, die auch jetzt anzuwenden ist, ist nun b'' statt b' zu substituiren und

$$d\Delta_{,} = 0$$

zu setzen, oder wieder das mit $d\Delta_{,}$ multiplicirte Glied wegzulassen.

43.

Wenn man alle vier eben beschriebenen Messungen in so kurzen Zwischenräumen angestellt hat, dass man sie unmittelbar vereinigen, und für das arithmetische Mittel aus allen vier Beobachtungszeiten gelten lassen kann, so setze man

$$b = \tfrac{1}{2}(b''-b') = \tfrac{1}{4}(d'''+d''-d'-d)$$

und es wird hierauf b die Entfernung des Mittelpunkts der Venus von dem Mittelpunkt der Sonne sein, welche unabhängig von den beiden Halbmessern gefunden worden ist. Der jetzt für die Berechnung von u anzuwendende Ausdruck ist der erste des Art. 17, nemlich

$$u = \{r'r_{,} - (r'+r_{,})\,\varrho_0 \sin H\}\,\frac{m}{r}\,\mathrm{tg}\,b$$

und da das Differential dieser Gleichung

$$du = -\frac{r'+r_{,}}{r}\,m \sin H\,\mathrm{tg}\,b\,d\varrho_0$$

ist, so nehmen die Bedingungsgleichungen die folgende Form an,

$$\begin{aligned} 0 = \tfrac{R}{m}(u_0-u) &- \left\{l\cos H\cos J - \frac{r'+r_{,}}{r}\sin H\,\mathrm{tg}\,b\right\} d\varrho_0 \\ &+ r'\sin(W'-N-J)\,(d\lambda-dl') \\ &+ r'\cos(W'-N-J)\,d\beta \\ &- U\cos(W'-J)\,d\lambda_0 \end{aligned}$$

in welcher die Verbesserungen $d\Delta'$ und $d\Delta_{,}$ gar nicht vorkommen.

Wenn man meinen sollte, dass die Annahme der Zugehörigkeit der Mittel aus den Messungen und der der Zeiten zu Ungenauigkeiten Anlass geben könnte, so lässt sich, gleichwie für Circummeridianhöhen, eine Verbesserungsformel construiren, durch deren Beihülfe man mehr wie vier einzelne Beobachtungen sicher mit einander zu Einem Resultat im Voraus verbinden kann.

Die Berechnung der Coefficienten von $d\lambda_0$ hat den Nutzen, dass man in jedem Falle den Einfluss eines Fehlers in der Länge des Beobachtungsortes kennen lernt, obgleich diese Glieder bei der Auflösung der Bedingungsgleichungen weggelassen werden müssen. Ich wiederhole, dass in den obigen Ausdrücken die Einheit von $d\lambda_0$ die Zeitsecunde ist.

§ 2. Vorausberechnung des Venusvorüberganges des Jahres 1874.

44.

Da die Conjunctionszeit der Venus und der Sonne, einer vorläufigen Rechnung zufolge im Jahre 1874 nahe Dec. 8. 16^h m. Z. Paris eintritt, so berechnete ich aus den Venustafeln von Leverrier und den Sonnentafeln von Oluffsen und mir für die beigesetzten Zeiten die folgenden drei Oerter*)

1874 Dec. 8.

m. Z. Paris	λ	β	log r
14^h	76° 48′ 43″.65	+ 0° 4′ 28″.00	9.8575367
16	76 56 47.46	56.67	9.8575312
18	77 4 51.27	5 25.34	9.8575257
	l'	log r'	m. Z. — w. Z.
14^h	256° 52′ 23″.86	9.9932894	— 7^m 37ˢ.30
16	256 57 28.90	9.9932853	35.05
18	257 2 33.94	9.9932812	32.82

und ausserdem

$$b' = -0''.41, \quad \varepsilon = 23^\circ\,27'\,27''.68, \quad \text{Aberr. d. } \odot = 20''.58$$

Da diese die ungeänderten tabularischen Oerter sind, so sind die der Venus die wahren im Raume, und die der Sonne die scheinbaren vom Mittelpunkt der Erde aus gesehenen. Aus den vorstehenden heliocentrischen Oertern der Venus ergaben sich die folgenden scheinbaren geocentrischen Oerter derselben,

*) Herr Professor Förster hat auf mein Ersuchen diese Oerter nachrechnen lassen, und erwünschte Uebereinstimmung gefunden.

m. Z. Paris	l	b	log r,
14^h	257° 3′ 43″.93	+ 0° 12′ 7″.37	9.422151
16	257 0 41.80	13 25.50	9.422148
18	256 57 39.67	14 43.61	9.422149

Die berechnete, und schon hinzugefügte Aberration ist

$$\text{in } l = + 3''.30, \quad \text{in } b = - 1''.41$$

und ferner erhielt ich die folgenden correspondirenden, aphroditocentrischen Oerter der Sonne

m. Z. Paris	λ'	β'
14^h	256° 48′ 14″.31	− 0° 4′ 27″.48
16	256 56 18.12	4 56.15
18	257 4 21.93	5 24.82

45.

Unter der Annahme des mittleren Halbmessers

$$\text{der Sonne} = 15' 59''.79$$
$$\text{der Venus} = \quad 8.305$$

erhielt ich durch die im Vorhergehenden erklärten Ausdrücke, und indem ich

$$m = 640$$

setzte,

$$u' \begin{cases} = 1.12804, \\ = 1.09282, \\ = 1.05760, \end{cases} \qquad \sin f \begin{cases} = 0.0065157 \text{ für äussere Berührung} \\ = 0.0064598 \text{ für den Mittelp. d. Venus} \\ = 0.0064039 \text{ für innere Berührung} \end{cases}$$

ferner

$$\begin{aligned} P_{-1} &= + 0.762440 \\ P_0 &= + 0.216260 \\ P_1 &= - 0.329918 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &- 0.546180 \\ &- 0.546178 \end{aligned}$$
$$p = - 0.2730895$$

$$\begin{aligned} Q_{-1} &= + 0.815948 \\ Q_0 &= + 0.903535 \\ Q_1 &= + 0.991115 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &+ 0.087587 \\ &+ 0.087580 \end{aligned}$$
$$q = + 0.04379175$$

und hieraus

$$N = 279^0\ 6'\ 36''.8$$
$$\log n = 9.441818$$
$$\gamma = -\ 0.926379$$
$$\mu = 245''.7185$$

Diese Grössenwerthe sind für den ganzen Verlauf des Vorüberganges unveränderlich.

46.

Es ergeben sich ferner aus den vorstehenden Werthen

m. Z. Paris	α'	δ'	h	a'
14^h	$255^0\ 39'\ 15''.5$	$-\ 22^0\ 52'\ 36''.1$	$-\ 5^0\ 39'\ 37''.2$	$255^0\ 44'\ 13''.4$
16	255 47 54.9	53 52.2	36 15.9	255 49 42.7
18	255 56 35.0	55 7.8	32 54.2	255 55 12.0

und hieraus

m. Z. Paris	$\Delta\alpha'$	D	$\log d$	N'
14^h	$+\ 4'\ 57''.9$	$-\ 22^0\ 56'\ 43''.1$	9.998770	$284^0\ 46'\ 14''.0$
15	+ 3 22.9	57 21.3		44 33.4
16	+ 1 47.8	57 59.3	9.998770	42 52.7
17	+ 0 12.4	58 37.2		41 11.9
18	− 1 23.0	59 15.1	9.998771	39 31.0

Da diese Grössenwerthe im Verlaufe des Vorüberganges wesentlicher Veränderung unterworfen sind, so habe ich sie für 15^h und 17^h aus den für 14^h, 16^h, 18^h, die direct berechnet worden sind, interpolirt. Bei der Berechnung von D und d aus δ' habe ich die Abplattung der Erde $= 1:300$ angenommen.

Hiemit sind alle Hülfsgrössen gegeben, deren man zur strengen Berechnung der Sonnenparallaxe aus den zu erwartenden Beobachtungen bedarf. Um jedoch im Voraus auch die Grenzcurven möglichst genau berechnen zu können, habe ich noch durch die Gleichungen (27) des Art. 38 der oft angezogenen Abhandlung die folgenden Hülfsgrössen berechnet,

$$\nu = +\ 2'\ 24'', \quad \log e = 9.99885$$
$$\nu' = -\ 2\ 23\ , \quad \log e' = 9.99992$$

die sich während der ganzen Dauer des Vorüberganges nur unmerklich ändern. Endlich habe ich in der Berechnung der Grenzcurven

$$\varrho_0 = \sin(8''.916)$$

angenommen.

47.

Im Art. 31 wurde schon angemerkt, dass um sich ein vollständiges Bild von dem Verhalten eines Venusvorüberganges vor der Sonne auf der Erdoberfläche verschaffen zu können, es dienlich sei, vor Allem die Grenzcurven dieser Erscheinung zu berechnen und aufzuzeichnen. Da im gegenwärtigen Falle der Schattenkegel die Erde ganz einhüllt, so sind die nördliche und die südliche Grenzcurve beide imaginär. Die westliche und die östliche Grenzcurve verwandeln sich in zwei Ovale, die in einander greifen, und sich in zwei Punkten schneiden, von welchen der eine in der Nähe des Nordpols, und der andere in der Nähe des Südpols liegt. Die Curve für die grösste Phase im Horizont zieht sich zwischen den beiden genannten Ovalen hindurch, und schneidet diese in vier Punkten, die in der Nähe der beiden Durchschnittspunkte liegen, die die Grenzcurven mit einander bilden.

Die folgenden Zusammenstellungen geben eine Reihe von Punkten dieser drei Curven, nebst der Zeit des ersten Meridians, dem Stundenwinkel, dem Werthe des Positionswinkels θ_0, und den beiden Hülfswinkeln W und ψ, die zu der Berechnung der Curvenpunkte dienen. Den Punkten der Curve der grössten Phase im Horizont sind überdies die jedesmalige Entfernung b des Mittelpunkts der Venus vom nächsten Sonnenrande beigefügt. Die Punkte aller drei Curven beziehen sich auf den Mittelpunkt der Venus; die Curven, welche sich auf die Venusränder beziehen, würden sich ganz in der Nähe jener erstrecken. Alle Curvenpunkte sind nach den Formeln der oft angezogenen Abhandlung berechnet, und es ist sowohl auf die Abplattung der Erde, wie auf die Strahlenbrechung bei der Berechnung Rücksicht genommen worden. Die Strahlenbrechung im Horizont habe ich $= 34'$ angenommen, sie verschiebt alle Curvenpunkte nahe um diese Grösse.

Erste westlich-östliche Grenzcurve.

$W+\nu$	ψ	τ	ι	λ	φ	θ_0
0°	122° 2′	215° 47′	275° 31′	59° 44′	+13° 47′	122° 0′
10	121 34	216 11	271 30	55 19	+ 4 34	131 32
30	120 39	216 49	263 38	46 49	−13 55	151 37
50	119 53	217 0	254 20	37 11	32 3	169 51
70	119 22	217 10	240 22	23 12	49 6	189 20
90	119 12	216 49	213 46	356 57	62 47	209 12
110	119 22	216 9	166 57	310 48	66 15	229 20
130	119 53	215 13	130 7	274 54	56 13	249 51
150	120 39	214 13	111 43	257 30	40 15	270 37
170	121 34	213 13	100 49	247 36	22 29	291 32
180	122 2	212 47	96 31	243 44	13 20	302 0
190	122 30	212 24	92 33	240 9	− 4 7	312 28
210	123 22	211 48	84 43	232 55	+14 23	333 20
230	124 4	211 33	75 31	223 58	32 34	354 2
250	124 31	211 38	61 47	210 9	49 47	14 29
270	124 40	212 0	35 3	183 3	63 44	34 38
290	124 31	212 39	346 22	133 43	67 20	54 29
310	124 4	213 29	308 42	95 13	56 59	74 2
330	123 22	214 24	290 28	76 4	40 49	93 20
350	122 30	215 22	279 43	64 21	+22 58	112 28

Zweite westlich-östliche Grenzcurve.

$W+\nu$	ψ	τ	ι	λ	φ	θ_0
0°	57° 58′	278° 40′	275° 9′	356° 29′	+13° 54′	57° 56′
10	58 26	278 13	271 13	353 0	+ 4 36	68 24
30	59 21	277 14	263 24	346 10	−13 54	89 19
50	60 7	276 14	254 7	337 53	32 2	110 5
70	60 38	275 17	240 12	324 55	49 6	130 36
90	60 48	274 38	213 38	299 0	62 49	150 46
110	60 38	274 16	166 44	252 28	66 19	170 36
130	60 7	274 18	129 50	215 32	56 16	190 5
150	59 21	274 38	111 25	196 47	40 18	209 19
170	58 26	275 16	100 31	185 15	22 32	228 24
180	57 58	275 40	96 14	180 34	13 24	237 56
190	57 30	276 5	92 15	176 10	− 4 10	247 28
210	56 38	277 2	84 27	167 25	+14 21	266 36
230	55 56	277 57	75 16	157 19	32 32	285 54
250	55 29	278 47	61 35	142 48	49 46	305 27
270	55 20	279 26	34 55	115 29	63 46	325 18
290	55 29	279 49	346 6	66 17	67 25	345 27
310	55 56	279 53	308 22	28 29	57 4	5 54
330	56 38	279 38	290 7	10 29	40 54	26 36
350	57 30	279 2	279 25	0 23	+23 1	47 28

Curve der grössten Phase im Horizont.

$W+\nu$	ψ	τ	t	λ	φ	θ_0	b
0°	89° 25′	247° 44′	275° 19′	27° 35′	+13° 49′	89° 23′	2′ 28″
10	89 26	247 43	271 23	23 40	+ 4 35	99 24	2 24
30	89 29	247 29	263 32	16 3	−13 55	119 27	2 16
50	89 37	247 2	254 14	7 12	32 3	139 35	2 9
70	89 48	246 25	240 19	353 54	49 7	159 46	2 5
90	90 0	245 43	213 43	328 0	62 48	179 58	2 4
110	90 12	245 1	166 58	281 57	66 17	200 10	2 5
130	90 23	244 25	129 58	245 33	56 13	220 21	2 9
150	90 31	243 58	111 35	227 37	40 17	240 29	2 16
170	90 35	243 44	100 42	216 58	22 31	260 33	2 24
180	90 35	243 42	96 24	212 42	13 22	270 33	2 28
190	90 34	243 44	92 26	208 42	− 4 8	280 32	2 33
210	90 30	243 59	84 36	200 37	+14 22	300 28	2 41
230	90 22	244 26	76 40	190 59	32 34	320 20	2 47
250	90 12	245 2	61 47	176 45	49 48	340 10	2 51
270	90 0	245 43	35 0	149 17	63 46	359 58	2 53
290	89 48	246 24	346 15	99 51	67 22	19 46	2 51
310	89 38	246 59	308 31	61 32	57 0	39 36	2 47
330	89 30	247 27	290 18	42 51	40 52	59 28	2 41
350	89 26	247 42	279 35	31 53	+22 59	79 24	2 33

48.

Auf den beiden dieser Abhandlung beigelegten Planigloben, die nach der stereographischen Polarprojection entworfen sind, wurden zuerst die drei vorbenannten Grenzcurven aufgetragen und ausgezogen, und an ihren Endpunkten auf jedem Planiglob mit Erklärung versehen. Die beiden Curventheile, die die Bezeichnungen »Anfang bei Sonnenuntergang«, und »Ende bei Sonnenaufgang« führen, sind die eigentlichen Grenzcurven, die den Theil der Erdoberfläche, auf welchem die Erscheinung des Venusvorüberganges sichtbar ist, von dem Theil absondert, auf welchem sie unsichtbar ist.

Die Sichtbarkeit dieses Venusvorüberganges umfasst, diesen Grenzcurven gemäss, auf der nördlichen Halbkugel fast ganz Nordafrica, einen Theil von Italien nebst Griechenland und der Türkei, ferner den grössten Theil von Russland, und fast ganz Asien, so wie eine Anzahl von Inseln. Auf der südlichen Halbkugel sieht man diese Erscheinung in fast ganz Südafrica, auf den ostindischen Inseln, Australien, fast allen jetzt bekannten Continenten am Südpol, und fast allen Inseln der Südsee. In ganz Amerika, und in dem grössten Theil von Europa ist dieser Vorübergang unsichtbar.

Nicht auf allen, eben genannten, Theilen der Erdoberfläche sieht man den Vorübergang vollständig, auf den beiden Erdflächen, die einestheils von den oben genannten Grenzcurvenzweigen, und anderntheils von denjenigen eingeschlossen werden, denen die Bezeichnungen »Anfang bei Sonnenaufgang«, und »Ende bei Sonnenuntergang« beigefügt worden sind, sieht man den Vorübergang nur unvollständig; die Sonne geht während desselben entweder auf oder unter. Nur auf der Erdfläche, die von den zuletzt genannten Grenzcurvenzweigen eingeschlossen ist, wird der ganze Vorübergang gesehen.

Zwischen den eben genannten beiden westlich-östlichen Grenzcurven zieht sich die Curve der grössten Phase im Horizont hindurch und durchschneidet jede derselben zwei Mal. Diese Curve sondert also den Theil der Erdoberfläche, auf welchem die grösste Phase sichtbar ist, von demjenigen ab, wo dieses nicht der Fall ist.

Ich habe noch eine vierte Curve berechnet und aufgezeichnet, und zwar die, welche ihre Endpunkte auf der Curve der grössten Phase im Horizont hat, und den Aequator unter ohngefähr 113^0—114^0 der Länge schneidet. Diese ist die Curve der grössten Phase im Mittage oder bez. der Mitternacht; westlich von dieser Curve sieht man den Vorübergang, oder wenigstens den grössten Theil desselben am Vormittage, östlich am Nachmittage.

49.

Auf den beiden westlich-östlichen Grenzcurven liegen die vier Berührungspunkte des Schattenkegels mit der Erde, und zwar zwei auf jeder dieser beiden Curven. Die Punkte, denen sie angehören, und von welchen die Haupthöhencurven ausgehen, kann man, für den Schattenkegel, welcher dem Mittelpunkt der Venus angehört, aus den Verzeichnissen der Curvenpunkte des Art. 47 durch Interpolation finden, da sie den Bedingungen $\theta_0=0$, oder $\theta_0=180^0$ entsprechen. Ich habe indess vorgezogen diese Punkte, so genau wie möglich, für sich nach den betr. Formeln der oft angezogenen Abhandlung zu berechnen, und zwar nicht blos für den eben genannten Schattenkegel, sondern auch für die beiden Schattenkegel, die den äusseren und inneren Ränderberührungen zukommen. Die Resultate, die ich erhalten habe, sind die folgenden.

1) Erste äussere Berührungen der drei Schattenkegel mit der Erde.
Anfang des Vorüberganges überhaupt.
Eintritt der Venus bei Sonnenuntergang.

$$\theta_0 = 0,$$

m. Z. Paris.

$\tau = 13^h\ 45^m\ 22^s$ äussere Ränderberührung.
$= 13\ 58\ 32$ Mittelpunkt der Venus.
$= 14\ 12\ 38$ innere Ränderberührung.

östliche Längen.	Polhöhen.
$\lambda = 225^0\ 29'$	$\varphi = +35^0\ 27'$
$= 220\ 44$	$= +37\ 39$
$= 215\ 28$	$= +40\ 8$

2) Erste innere Berührungen der drei Schattenkegel mit der Erde.
Eintritt der Venus bei Sonnenaufgang.

$$\theta_0 = 180^0$$

m. Z. Paris.

$\tau = 14^h\ 6^m\ 22^s$ äussere Ränderberührung.
$= 14\ 21\ 16$ Mittelpunkt der Venus.
$= 14\ 37\ 37$ innere Ränderberührung.

östliche Längen.	Polhöhen.
$\lambda = 36^0\ 33'$	$\varphi = -38^0\ 28'$
$= 30\ 49$	$= -41\ 7$
$= 24\ 4$	$= -44\ 12$

3) Zweite innere Berührung der drei Schattenkegel mit der Erde.
Austritt der Venus bei Sonnenuntergang.

$$\theta_0 = 180^0$$

m. Z. Paris.

$\tau = 17^h\ 53^m\ 1^s$ innere Ränderberührung.
$= 18\ 9\ 25$ Mittelpunkt der Venus.
$= 18\ 24\ 12$ äussere Ränderberührung.

östliche Längen.	Polhöhen.
$\lambda = 243^0\ 0'$	$\varphi = -64^0\ 24'$
$= 231\ 37$	$= -62\ 42$
$= 222\ 27$	$= -61\ 0$

4) Zweite äussere Berührungen der drei Schattenkegel mit der Erde.
Ende des Vorüberganges überhaupt.
Austritt der Venus bei Sonnenaufgang.

$$\theta_0 = 0$$

m. Z. Paris.

$\tau = 18^h\,17^m\,57^s$ innere Ränderberührung.

$= 18\ 32\ 3$ Mittelpunkt der Venus.

$= 18\ 45\ 13$ äussere Ränderberührung.

östliche Längen.	Polhöhen.
$\lambda = 41^0\,26'$	$\varphi = +61^0\,27'$
$= 36\ 33$	$= +60\ 56$
$= 29\ 29$	$= +59\ 17$

Die beiden merklichen Punkte der Curve der grössten Phase im Horizont, nemlich das Maximum und das Minimum dieser Phase, welche Punkte den Werthen $\theta_0 = 0$, und $= 180^0$ entsprechen, und von welchen die hier zu betrachtenden Haupthöhencurven ausgehen, habe ich aus dem Verzeichniss der Curvenpunkte des Art. 47 entnommen.

50.

Die Haupthöhencurven, die auch auf den beiden anliegenden Planigloben aufgezeichnet worden sind, wurden nach den Ausdrücken der Artt. 24 und 26 berechnet, und die folgenden Punkte derselben erhalten.

Haupthöhencurven für die Eintritte.

H	λ	φ	λ	φ
10°	209° 18′	+31° 57′	43° 18′	−45° 49′
20	200 5	25 55	57 36	48 43
30	191 37	19 25	73 1	49 44
40	183 46	12 33	88 31	48 42
50	176 12	+ 5 31	103 1	45 46
60	168 48	− 1 39	115 48	41 22
70	161 24	8 53	126 57	35 54
80	153 44	16 1	136 49	29 41
90	145 37	−23 0	145 37	−23 0

Haupthöhencurven für die Austritte.

H	λ	φ	λ	φ
10°	47° 57′	+51° 58′	215° 32′	−70° 46′
20	54 57	43 7	184 45	75 41
30	60 19	33 57	144 52	74 42
40	64 44	24 37	119 6	68 35
50	68 41	15 10	105 26	60 21
60	72 19	+ 5 40	97 10	51 23
70	75 45	− 3 54	91 24	42 4
80	79 15	13 29	86 48	32 35
90	82 53	−23 3	82 53	−23 3

Haupthöhencurven für die grösste Phase.

H	λ	φ	λ	φ
10°	139° 18′	+54° 9′	343° 49′	−70° 59′
20	133 38	44 50	14 36	76 9
30	129 33	35 18	55 36	75 16
40	126 20	25 40	84 40	69 5
50	123 37	15 57	94 54	60 46
60	121 11	+ 6 13	102 25	51 43
70	118 51	− 3 33	107 22	42 18
80	116 29	13 18	111 1	32 43
90	113 57	−23 2	113 57	−23 2

Die Punkte dieser Curven, die den nebenstehenden Sonnenhöhen H entsprechen, sind auf den Planigloben mit den Zahlen 10, 20, 30, etc. bezeichnet, und von kleinen Kreisen umschlossen.

51.

Endlich enthalten die Planigloben auch die isosthenischen Kreisbögen für die Haupthöhen $H_{,}$ von 10 zu 10 Graden. Um diese auftragen zu können, wurden sowohl deren Pole oder Mittelpunkte auf der Kugeloberfläche, wie ihre Halbmesser, und die Entfernung ihrer Mittelpunkte vom Mittelpunkt der Projection nach den Ausdrücken der Artt. 29, 30 31 berechnet. Es ist hiebei zu bemerken, dass in dem bei der Anfertigung der Planigloben angewandten Maassstabe der Halbmesser des Aequators oder

$$r = 201.4$$

ist. Man kann die angegebenen Maasse von R und k hiemit auf jede andere Maasseinheit hinführen.

Halbmesser und Mittelpunkte der isosthenischen Kreisbögen für die Eintritte.

a) Auf der nördlichen Halbkugel und dem Planiglob.

$H,$	A	Φ	R	k
10°	219° 35′	+37° 12′	22.0	101.0
20	219 25	37 17	44.6	103.7
30	219 5	37 26	68.3	108.5
40	218 43	37 36	94.1	115.9
50	218 13	37 50	122.8	126.6
60	217 38	38 6	156.1	141.9
70	216 59	38 24	196.5	163.9
80	216 17	38 44	248.1	196.5
90	215 32	39 5	319.5	247.9
80	214 46	39 25	429.9	337.2
70	214 1	+39 46	635.5	519.9

b) Auf der südlichen Halbkugel und dem Planiglob.

H,	A	Φ	R	k
10°	31° 2′	−41° 9′	21.3	92.3
20	31 16	41 3	43.1	95.1
30	31 35	40 54	66.2	100.1
40	32 6	40 40	91.3	107.7
50	32 39	40 25	119.5	118.7
60	33 19	40 6	152.5	134.6
70	34 1	39 46	192.7	157.6
80	34 46	39 25	245.2	192.4
90	35 32	39 5	319.5	247.9
80	36 17	38 44	438.8	347.5
70	36 59	38 24	678.0	565.5
60	37 38	−38 6	1484.5	1349.7

Halbmesser und Mittelpunkte der isosthenischen Kreisbögen für die Austritte.

a) Auf der nördlichen Halbkugel und dem Planiglob.

H,	A	Φ	R	k
10°	37° 52′	+60° 10′	18.9	54.1
20	38 10	60 14	38.1	55.3
30	38 40	60 21	58.0	57.4
40	39 11	60 27	79.1	60.7
50	39 58	60 37	100.0	65.3
60	40 51	60 48	127.0	71.5
70	41 50	61 1	155.5	80.2
80	42 58	61 14	188.8	92.3
90	44 8	61 28	229.2	109.5
80	45 19	61 42	280.7	135.1
70	46 30	+61 55	350.2	175.5

b) Auf der südlichen Halbkugel und dem Planiglob.

H,	A	Φ	R	k
10°	231° 20′	−62° 48′	18.7	49.1
20	230 59	62 44	37.7	50.5
30	230 26	62 38	57.4	52.8
40	229 37	62 30	78.3	56.3
50	228 44	62 21	100.9	61.2
60	227 38	62 8	126.0	68.0
70	226 30	61 55	154.5	77.4
80	225 19	61 42	188.1	90.6
90	224 8	61 28	229.2	109.5
80	222 58	61 14	282.2	137.5
70	221 50	−61 1	355.2	183.2

Halbmesser und Mittelpunkte der isosthenischen Kreisbögen für die grösste Phase.

Die gemeinschaftlichen Mittelpunkte oder Pole auf der Kugeloberfläche, die diesen Kreisbögen zukommen, liegen unter

$$A = 148^0\ 12',\qquad \Phi = +\ 62^0\ 56'$$

und

$$A = 328^0\ 12',\qquad \Phi = -\ 62^0\ 56'$$

Die Halbmesser und Mittelpunkte sind für die beigesetzten Werthe der Haupthöhen $H_,$ auf beiden Planigloben die folgenden.

$H_,$	R	k
10°	18.6	48.9
20	37.6	50.1
30	57.3	52.2
40	78.1	55.3
50	100.6	59.8
60	125.4	65.9
70	153.5	74.3
80	186.4	86.1
90	226.2	102.9
80	276.7	127.8
70	345.1	167.1
60	446.8	234.7

Die Haupthöhen sind auf den Planigloben an den Endpunkten der isosthenischen Kreisbögen angeführt, und die Kreisbögen für $H_, = 90^0$ mit einer Anzahl schwarzer Scheibchen versehen, um sie von den andern auffällig zu machen. Da auf diesen der Coefficient von $d\varrho_0 = 0$ ist, so ist an den Oertern, die von ihnen getroffen werden, die Bestimmung der Sonnenparallaxe absolut unmöglich.

Auf diesen beiden Planigloben kann man jetzt für jeden Ort den Coefficienten von $d\varrho_0$ für die Eintritte, die grösste Phase und die Austritte gleichsam ablesen, man braucht nur auf die beigesetzten Zahlen, die die entsprechenden Bögen $H_,$ angeben, zu achten, die Cosinusse dieser Bögen sind bis auf sehr Weniges dem Coefficienten von $d\varrho_0$ gleich. Man kann also ohne Weiteres sich über die Zweckmässigkeit oder Unzweckmässigkeit irgend eines Beobachtungsortes, sei es für die Eintritte, oder für die grösste Phase oder für die Austritte durch Hülfe dieser Planigloben eine sichere Vorstellung machen. *)

*) Die Einzeichnung der Länderumrisse auf diesen Planigloben hat auf meinen Wunsch Herr Professor Dr. Petermann die Güte gehabt ausführen zu lassen, wofür ich hier meinen besten Dank ausspreche.

52.

Es sollen jetzt für den in Rede stehenden Venusvorübergang die numerischen Werthe der Glieder rechter Hand der Differentialgleichung des Art. 20 untersucht werden. Diese Gleichung ist

$$\pm \cos H_{,} d\varrho_0 = \frac{206265\,n}{3600\,m} \cos(N'-\theta)\,(dt-d\lambda) \pm \frac{r_{,}r'}{r}\,db'$$

Der Coefficient von $dt-d\lambda$ dieser Gleichung giebt in der vorstehenden Form nicht die geeigneteste Uebersicht über die verschiedenen Werthe, die er im Verlaufe des Vorüberganges annimmt, aber man kann ihm leicht eine Form geben, die diese Uebersicht gewährt. Nehmen wir die im Vorhergehenden oftmals angewandten Gleichungen des Art. 15 vor, die nachdem $l=1$ gesetzt worden ist, in die folgenden übergehen,

$$u\cos(\theta-K) = S\cos(N'-K-\Sigma) - m\varrho_0\cos H$$
$$u\sin(\theta-K) = S\sin(N'-K-\Sigma')$$

und aus welchen man leicht

$$u\cos(N'-\theta) = S\cos\Sigma' - m\varrho_0\cos H\cos(N'-K)$$

erhält. Erwägt man nun, dass

$$S\cos\Sigma' = \tfrac{n}{15}(t-\lambda-\mu)$$

ist, übergeht das kleine mit $m\varrho_0$ multiplicirte Glied in Bezug auf das vorhergehende, und setzt $u=1$, welches hier erlaubt ist, so ergiebt sich

$$\cos(N'-\theta) = \tfrac{n}{15}(t-\lambda-\mu)$$

und die obige Differentialgleichung wird

$$\pm \cos H_{,} d\varrho_0 = A(t-\lambda-\mu)(dt-d\lambda) \pm \frac{r_{,}r'}{r}\,db'$$

wenn zur Abkürzung

$$A = \frac{206265\,n^2}{54000\,m}$$

gesetzt wird. Beschäftigen wir uns zuerst blos mit dem mit $dt-d\lambda$ multiplicirten Gliede. Für den in Rede stehenden Venusvorübergang findet man

$$\log A = 6.6594-10$$

und die Verzeichnisse der Curvenpunkte des Art. 47 zeigen, dass für die Ein- und Austritte des Mittelpunkts der Venus $(t-\lambda-\mu) = \pm 34^0$ werden kann. Für die äusseren Ränderberührungen kann diese Grösse immerhin auf 35^0 oder gar 36^0 gehen, allein wir wollen bei dem vorstehenden Werthe stehen bleiben. Substituirt man diesen, so erhält man

$$\pm \cos H_{,} d\varrho_0 = \pm 0.0155\ (dt - d\lambda)$$

Die Beobachtungen der Venusvorübergänge des vorigen Jahrhunderts haben aber gezeigt, dass wenigstens damals der mittlere Fehler der Beobachtung eines Ein- oder Austrittes 7^s betrug, nehmen wir in Ermangelung anderer Angaben diesen Betrag wieder an, so ergiebt sich aus dieser Ursache

$$\cos H_{,} d\varrho_0 = \pm 0''.109$$

oder mehr wie eine Zehntelsecunde, welcher Fehler noch dadurch vergrössert wird, dass $\cos H_{,}$ in der Wirklichkeit immer kleiner wie Eins ist. Der Fehler in der Länge des Beobachtungsortes kann wohl zuweilen grösser wie 7^s sein, er kann zufällig die eben gefundene Wirkung des Beobachtungsfehlers verkleinern, er kann sie aber auch vergrössern, und wir dürfen daher wohl annehmen, dass die Gesammtwirkung dieser beiden Fehler auf die aus Ein- oder Austritten gefolgerte Sonnenparallaxe im Mittel für jede einzelne Beobachtung grösser wie 0".1 ist.

53.

Gehen wir zu den Distanzmessungen um die Zeit der grössten Phase über, so sehen wir sowohl aus den betreffenden Formeln, wie aus dem obigen Verzeichnisse der Punkte der Curve der grössten Phase im Horizont, und auf den beiden dazu gehörigen Haupthöhencurven, dass $(t - \lambda - \mu)$ sehr nahe $= 0$ ist, und dasselbe findet daher auch auf allen für die Beobachtungen um die Zeit der grössten Phase günstigen Beobachtungsörtern statt. Nehmen wir daher im gegenwärtigen Falle als Maximum $(t - \lambda - \mu) = 0^{\circ}5$ an, da hier wohl selten diese Function grössere Werthe annehmen wird, so ergiebt sich

$$\cos H_{,} d\varrho_0 = \pm 0.00023\ (dt - d\lambda)$$

und es würde also ein Beobachtungs- oder Längenfehler von ohngefähr

$$7^m\ 20^s = 1^{\circ}\ 50'$$

erforderlich sein, um 0".1 in $d\varrho_0$ hervorzubringen. Ein solcher Fehler kann nie erwartet werden, und es kann daher der Satz aufgestellt werden,

»dass durch Distanzmessungen um die Zeit der grössten Phase, an »übrigens günstig gelegenen Beobachtungsörtern, die Sonnenparallaxe »fast unabhängig von den Fehlern der Länge des Beobachtungsortes »und der Beobachtungszeiten gefunden wird.«

Ich bin geneigt, dieses für einen grossen Vortheil dieser Bestimmungsart zu halten.

Man kann diesen Satz weiter ausdehnen. Da der Coefficient $(t-\lambda-\mu)$ der Zeit proportional, und während der grössten Phase fast Null ist, so muss er für Beobachtungen in gleichen Zeitintervallen vor und nach der grössten Phase nahe denselben Werth bekommen, aber für die erste von je zweien solcher Beobachtungen negativ, und für die zweite positiv sein. Da ferner gleichartige Ein- und Austritte in nahe gleichen Zeitintervallen von der grössten Phase erfolgen, so muss für diese derselbe Fall eintreten. Da endlich in der grössten Phase auch der Coefficient des Fehlers der Beobachtungszeit sein Zeichen wechselt, wie aus den Gleichungen des Art. 20 hervorgeht, so bekommen wir den folgenden

Satz.

»Die Verweilungen der Venus vor der Sonnenscheibe sind, wenig»stens an den günstigen Beobachtungsörtern, von der Länge des »Beobachtungsortes, und folglich auch von dem Fehler derselben fast »unabhängig.«

Man darf indess hieraus nicht schliessen, dass es unbedingt vortheilhaft ist, statt der Ein- und Austritte selbst ihre Unterschiede, die Verweilungen, der Rechnung zu unterwerfen. Durch dieses Verfahren würde man das Resultat in Bezug auf die Sonnenparallaxe abschwächen, indem die Beobachtung einer Verweilung nur das halbe Gewicht der Beobachtung eines Ein- oder Austrittes hat, und der Coefficient der Sonnenparallaxe in der der Verweilung entsprechenden Bedingungsgleichung nicht auf das Doppelte, wie es unter diesen Umständen sein sollte, wächst. Gemeiniglich hat dieser Coefficient nur entweder für den Eintritt, oder nur für den Austritt eine angemessene, oder günstige Grösse, und kann daher in der Addition der beiden Bedingungsgleichungen für Ein- und Austritt nicht das Doppelte des günstigen Coefficienten erreichen. Es bleibt daher, ungeachtet des obigen Satzes, das Vortheilhafteste, Ein- und Austritte für sich der Rechnung zu unterwerfen.

54.

Gehen wir zu dem mit db' multiplicirten Gliede der Differentialgleichung des vorvorigen Art. über, so finden wir für den in Rede stehenden Venusvorübergang

$$\cos H_{,} d\varrho_0 = \pm 0.361\ db'$$

also 1″ Fehler in der gemessenen einzelnen Entfernung, würde wenigstens 0″.36 Fehler in der Sonnenparallaxe geben. Aber da man so kleine Winkel, wie die, welche hier zu messen sind, mit Anwendung von zweckmässigen Mikrometern, zumal wenn die Beobachtungen so oft, wie im gegenwärtigen Falle möglich ist, wiederholt werden, weit genauer wie auf Eine Secunde messen kann, so wird der aus den Distanzmessungen auf einer Station hervorgehende mittlere Fehler um so mehr kleiner angenommen werden müssen, und es darf erwartet werden, dass er in seiner Wirkung auf die Sonnenparallaxe 0″.1 nicht erreichen wird.

Um die Verkleinerung des Fehlers durch Wiederholung der Messungen noch mehr hervor zu heben, mache ich darauf aufmerksam, dass zufolge des Art. 43 die gemessene Entfernung b der Mittelpunkte der Venus und der Sonne aus den vier einzelnen gemessenen Ränderentfernungen d, d', d'', d''' durch den Ausdruck

$$b = \tfrac{1}{4}(d''' - d'' - d' - d)$$

gefunden wird. Nehmen wir aber den mittleren Fehler Einer Beobachtung einer Ränderberührung zur Einheit an, so ist der mittlere Fehler einer Bestimmung von b aus vier einzelnen Beobachtungen der Ränderberührungen $= \frac{1}{2}$, und drücken wir dieses in der obigen Formel aus, so bekommen wir schon

$$\cos H_{,} d\varrho_0 = \pm 0.181\ db$$

Setzt man den mittleren Fehler Einer Beobachtung einer Ränderberührung $= 0''.5$, welche Annahme wohl eher zu gross als zu klein ist, so wird aus Einer beobachteten Mittelpunktsentfernung schon

$$\cos H_{,} d\varrho_0 = \pm 0''.090$$

erhalten, und die Wiederholungen der Messungen der Mittelpunktsentfernungen müssen nothwendiger Weise diesen mittleren Fehler noch bedeutend verkleinern.

55.

Wirft man nach diesen Auseinandersetzungen wieder einen Blick auf die beiden Planigloben, so wird man finden, dass günstige Beobachtungen in der Nähe der grössten Phase auf der südlichen Halbkugel der Erde, während des Venusvorüberganges des Jahres 1874 wohl in den Bereich der Unmöglichkeit fallen werden. Denn die südliche Haupthöhencurve der grössten Phase, und die dazu gehörigen isosthenischen Kreisbögen, liegen in ihren günstigen Theilen theils in dem antarktischen Eismeere, theils auf den noch zweifelhaften oder ganz unbekannten Continenten am Südpole, die, wenn sie auch inzwischen constatirt werden sollten, wohl so unwirthlich sein werden, dass keine Rechnung auf sie gemacht werden kann.

Dahingegen bietet die nördliche Halbkugel für Beobachtungen um die Zeit der grössten Phase ein weites Feld dar, welches in Sibirien, ohngefähr bei Tomsk anfangend, sich bis zum Okhotschen Meere erstreckt, und das Amurgebiet, die Küsten der Mandschurei, die Japanesischen und einen Theil der Kurilischen Inseln, die Halbinsel Korea, sowie einen Theil von China in sich fasst. Hier, meine ich, ist die vortheilhafteste Ausbeutung der zunächst bevorstehenden Erscheinung des Venusvorüberganges zu erwarten.

56.

Um auch den Verlauf des nächsten Venusvorüberganges an einigen gegebenen Oertern kennen zu lernen, habe ich nach den Ausdrücken des § 8 der oft angezogenen Abhandlung diesen zunächst für vier Oerter, von welchen zwei auf der nördlichen Halbkugel in der Nähe der Haupthöhencurve für die grösste Phase, und zwei auf der südlichen Halbkugel in der Nähe der Haupthöhencurven für die Ein- und Austritte liegen, berechnet, und die folgenden Resultate erhalten.

Nertschinsk.

$\varphi = 51^\circ 28' 26''$, $\lambda = 114^\circ 14' 44''$

		w. Z. d. Beobachtungsortes			
Erste äussere Ränderberührung	Dec. 8.	21^h	37^m	8^s	
Erste innere » »		22	3	50	
Grösste Phase	Dec. 9.	0	2	4	$b' = 2' 55''$
Zweite innere Ränderberührung		2	0	10	
Zweite äussere » »		2	26	48	

mit den Positionswinkeln

$\theta = 51^0\,28'$,	$\theta_0 = 73^0\,\;8'$
$= 46\;\;4$	$= 64\;\;5$
$= 14\;29$	$= 14\;\;9$
$= 342\;55$	$= 324\;21$
$= 337\;31$	$= 315\;19$

Man sieht, dass hier in der grössten Phase der Positionswinkel θ_0 den Werth 0 noch nicht erreicht hat, wie auch aus dem Planiglob hervorgeht, da Nertschinsk beträchtlich westlich von der Haupthöhencurve liegt. Man kann sehr günstige Beobachtungen erhalten, wenn man die Distanzmessungen bei ohngefähr $\theta_0 = 25^0$, und vielleicht noch grösserem Werthe, anfängt, und fortsetzt bis θ_0 auf der anderen Seite des Verticalkreises ohngefähr denselben Werth erreicht. Da $\mu = 245^0\,43'$ ist, so findet man dass in der grössten Phase

$$(t-\lambda-\mu) = 0^0\,33'$$

also noch sehr klein ist, obgleich Nertschinsk beträchtlich weit von der Haupthöhencurve für die grösste Phase liegt. Der Coefficient von $dt-d\lambda$ hat hier also sehr nahe denselben Werth, welcher in dem Beispiel des Art. 53 angenommen wurde. Die vorstehenden Werthe der Positionswinkel θ_0 zeigen, dass die Beobachtungen der Ein- und Austritte nur geringen Werth haben können, und dass der Austritt grösseren Werth haben muss als der Eintritt, zeigt der Planiglob schon dadurch an, dass Nertschinsk der Haupthöhencurve für die Austritte näher liegt als der für die Eintritte. Dass die grösste Phase kurz nach dem wahren Mittage statt finden muss, zeigt auch der Planiglob an, indem Nertschinsk der Curve für die grösste Phase im Mittage sehr nahe, und auf der östlichen Seite derselben liegt.

Hakodadi (Khakodad, Hakooao).

$$\varphi = 41^0\,46'\,57'', \quad \lambda = 138^0\,24'\,42''$$

	w. Z. d. Beobachtungsortes	
Erste äussere Ränderberührung	Dec. 8. $23^h\,12^m\,16^s$	
Erste innere » »	23 38 47	
Grösste Phase	Dec. 9. 1 36 22,	$b' = 2'\,51''$
Zweite innere Ränderberührung	3 34 17	
Zweite äussere » »	4 0 58	

mit den Positionswinkeln

$\theta = 51^0\ 32'$	$\theta_0 = 61^0\ 16'$
$= 46\ 10$	$= 50\ 34$
$= 14\ 38$	$= 355\ 30$
$= 343\ 6$	$= 308\ 41$
$= 337\ 44$	$= 297\ 9$

Die Distanzmessungen sind hier eben so einzurichten wie im vorigen Beispiel. Man sieht, dass hier kurze Zeit vor dem Eintreffen der grössten Phase $\theta_0 = 0$ wird, welches der Planiglob bestätigt, indem Hakodadi ein wenig östlich von der Haupthöhencurve liegt. In der grössten Phase wird hier

$$(l - \lambda - \mu) = -0^0\ 2'$$

also äusserst klein. Die Beobachtungen der Ein- und Austritte haben hier nur geringen Werth.

Kerguelens Inseln (Weihnachtshafen).

$$\varphi = -48^0\ 41'\ 15'', \quad \lambda = 66^0\ 42'\ 0''$$

		w. Z. d. Beobachtungsortes	
Erste äussere Ränderberührung	Dec. 8.	$18^h\ 39^m\ 54^s$	
Erste innere » »		19 10 19	
Grösste Phase		20 53 16	$b' = 2'\ 13''$
Zweite innere Ränderberührung		22 36 36	
Zweite äussere » »		23 6 13	

mit den Positionswinkeln

$\theta = 47^0\ 34'$	$\theta_0 = 182^0\ 27'$
$= 41\ 11$	$= 175\ 30$
$= 14\ 17$	$= 151\ 19$
$= 347\ 5$	$= 139\ 46$
$= 340\ 49$	$= 141\ 39$

Die Eintritte haben hier, wie vorausgesehen werden konnte, eine günstige Lage, in der grössten Phase ist die Lage nicht ganz ungünstig, aber die Austritte haben fast gar keinen Werth, zumal die Sonne während derselben sehr hoch steht.

Aucklands-Inseln (Bai, Sarahs Busen).

$\varphi = -50^{0}\,33'\,45''$, $\lambda = 163^{0}\,54'\,27''$

	w. Z. d. Beobachtungsortes	
Erste äussere Ränderberührung	Dec. 9.	$1^{h}\ 0^{m}\ 48^{s}$
Erste innere » »		1 30 0
Grösste Phase		3 14 29, $b' = 2'\,4''$
Zweite innere Ränderberührung		4 59 19
Zweite äussere » »		5 29 1

mit den Positionswinkeln

$\theta = 48^{0}\,32'$	$\theta_0 = 247^{0}\,59'$
$= 42\ 23$	$= 249\ 10$
$= 14\ 50$	$= 235\ 59$
$= 347\ 18$	$= 210\ 53$
$= 341\ 6$	$= 204\ 4$

Hier sind die Austritte, wie voraus zu sehen war, die günstigsten, und dass in denselben θ_0 sich 24^{0} bis 31^{0} von 180^{0} entfernt, rührt davon her, dass die Aucklandsinseln ziemlich weit von der betreffenden Haupthöhencurve entfernt liegen. Sowohl die grösste Phase wie die Eintritte haben hier nur geringen Werth.

Ich füge dem Vorstehenden hinzu, dass ich die geographischen Positionen der Conn. des temps entnommen habe.

57.

Die Regeln, nach welchen im Vorhergehenden die verschiedenen Oerter in Bezug auf die Günstigkeit zur Bestimmung der Sonnenparallaxe beurtheilt worden sind, besitzen freilich keine vollständige geometrische Strenge, aber sie sind in solchem Grade genähert, dass sie eine sehr nahe richtige Einsicht in die Sachlage gewähren. Um vollständig genau die statt findenden Umstände in Erfahrung zu bringen, giebt es aber ein einfaches Mittel, und dieses besteht darin, dass man die Coefficienten der Bedingungsgleichungen für die Verbesserung der der Rechnung untergelegten Elemente nach den im Art. 40 u. f. dafür entwickelten Ausdrücken berechnet, denn diese zeigen mit vollständiger Schärfe die Günstigkeit oder Ungünstigkeit für die Erlangung der Sonnenparallaxe.

Ich habe diese Coefficienten daher für die vier im vor. Art. betrachteten Beobachtungsörter berechnet, und die folgenden Resultate erhalten,

deren jedes sich auf die fünf berechneten Zeitmomente bezieht. Die letzte Columne giebt die jedesmalige Sonnenhöhe.

Coefficienten der Bedingungsgleichungen.

Nertschinsk.

$d\varrho_0$	$d\lambda - dl'$	$d\beta$	$dl' \pm dl$,	$d\lambda_0$	H
−0.2842	−0.7062	+0.6864	−0.3669	+0.01480	9° 21′
−0.4260	−0.6385	+0.7497	−0.3669	+0.01286	11 27
−0.9292	−0.1523	+0.9729	0	−0.00009	15 40
−0.7937	+0.3791	+0.9092	−0.3669	−0.01303	11 6
−0.6997	+0.4623	+0.8694	−0.3669	−0.01495	8 58

Hakodadi.

$d\varrho_0$	$d\lambda - dl'$	$d\beta$	$dl' \pm dl$,	$d\lambda_0$	H
−0.4340	−0.7070	+0.6854	−0.3669	+0.01482	24° 26′
−0.5716	−0.6393	+0.7487	−0.3669	+0.01290	25 9
−0.9226	−0.1544	+0.9727	0	−0.00004	21 36
−0.5739	+0.3758	+0.9102	−0.3669	−0.01296	8 34
−0.4529	+0.4595	+0.8658	−0.3669	−0.01487	4 42

Kerguelens-Inseln.

$d\varrho_0$	$d\lambda - dl'$	$d\beta$	$dl' \pm dl$,	$d\lambda_0$	H
+0.9206	−0.6578	+0.7328	−0.3669	+0.01341	23° 30′
+0.8790	−0.5723	+0.8015	−0.3669	+0.01102	28 30
+0.6192	−0.1486	+0.9737	0	−0.00018	45 16
+0.3908	+0.3116	+0.9366	−0.3669	−0.01147	59 32
+0.3700	+0.4119	+0.8967	−0.3669	−0.01380	62 15

Aucklands-Inseln.

$d\varrho_0$	$d\lambda - dl'$	$d\beta$	$dl' \pm dl$,	$d\lambda_0$	H
+0.1910	−0.6701	+0.7216	−0.3669	+0.01376	60° 5′
+0.1952	−0.5889	+0.7895	−0.3669	+0.01147	57 21
+0.1093	−0.1581	+0.9720	0	+0.00005	43 29
+0.7648	+0.3077	+0.9352	−0.3669	−0.01137	27 1
+0.8117	+0.1071	+0.8963	−0.3669	−0.01367	22 24

Diese Coefficienten bestätigen die im Vorhergehenden abgeleiteten allgemeinen Bemerkungen, und prägen sie schärfer aus. Man sieht, dass die Coefficienten von $d\varrho_0$ für die Beobachtungsgattungen, die im Voraus

als günstig bezeichnet werden konnten, der Zahl Eins sehr nahe kommen, so wie dass die Coefficienten von $d\varrho_0$ für die Beobachtungen, die im Voraus als wenig günstig bezeichnet wurden, in der That viel kleiner als Eins sind.

In Nertschinsk und Hakodadi, die in den günstigen Bereich der isosthenischen Kreisbögen für die grösste Phase fallen, werden für diese die Coefficienten zwar hinreichend gross, aber für die Ein- und Austritte werden sie viel kleiner; die Coefficienten für die Austritte in Nertschinsk möchten indessen für hinreichend gross gehalten werden können. Auf den Kerguelens-Inseln, die in den günstigen Bereich der isosthenischen Kreisbögen für die Eintritte fallen, sind auch die Coefficienten für die Eintritte hinreichend gross, aber für die übrigen Phasen werden sie klein, und dasselbe trifft bei den Aucklands-Inseln in entgegen gesetzter Beziehung ein.

Man sieht ferner, dass die Coefficienten der übrigen Verbesserungen auf allen vier in Betracht gezogenen Stationen fast dieselben sind, und dass die Coefficienten für $d\lambda_0$ in der grössten Phase überall so klein werden, dass sie für Null erachtet werden können.

Ferner erkennt man, dass die Coefficienten von $d\varrho_0$ auf der nördlichen, und der südlichen Halbkugel entgegengesetzte Zeichen haben, während die Coefficienten der tabularischen Fehler $d\lambda - dl'$ und $d\beta$ dieselben Zeichen behalten. Hieraus entspringt die Eigenschaft, dass man durch Verbindung von Beobachtungen auf beiden Halbkugeln die Tafelfehler vom Fehler des vorläufig angenommenen Werthes der Sonnenparallaxe trennen, und beide sicher bestimmen kann.

Fragt man nach den Coefficienten der Bedingungsgleichungen für die Verweilungen, so bekommt man diese aus den vorstehenden durch blose Addition. Man erhält z. B. für die Aucklands-Inseln die folgenden Coefficienten für die Verweilungen zwischen den äusseren und inneren Ränderberührungen,

$d\varrho_0$	$d\lambda - dl'$	$d\beta$	$dA' \pm dA_1$	$d\lambda_0$
+1.0357	−0.2630	+1.6179	−0.7338	+0.00009
+0.9600	−0.2812	+1.7247	−0.7338	+0.00010

die dem Unterschied zwischen den betreffenden Berührungen entsprechen. Die Coefficienten von $d\lambda_0$ sind zwar sehr klein geworden, aber die Coefficienten von $d\varrho_0$ haben sich für eine sichere Bestimmung dieser

Grösse nicht hinreichend vergrössert. Da das Gewicht der Beobachtung einer Verweilung nur halb so gross ist, wie das Gewicht der Beobachtung einer Ränderberührung, so hätten, um gleiche Genauigkeit geben zu können, die vorstehenden Coefficienten von $d\varrho_0$ nahe gleich der Zahl Zwei werden müssen, während sie nur ohngefähr gleich Eins sind.

In Bezug auf $d\lambda_0$ bemerke ich noch, dass dieser Grösse selbstverständlich für jeden vorhandenen Beobachtungsort ein anderer Werth beigelegt werden muss, oder dass man eben so viele verschiedene $d\lambda_0$ einführen muss als Beobachtungsörter vorhanden sind. Ich wiederhole, dass man bei der Auflösung der Bedingungsgleichungen durch die Methode der kleinsten Quadrate, die Werthe der verschiedenen $d\lambda_0$ nicht zugleich bestimmen darf, da dieses eine schädliche Rückwirkung auf die Bestimmung der übrigen Unbekannten bewirken kann. Aber man braucht deshalb die Glieder, welche die $d\lambda_0$ enthalten, nicht wegzulassen, sondern kann sie in der Auflösung der Bedingungsgleichungen mit durchgehen lassen, und auf diese Weise die übrigen Unbekannten in Function der verschiedenen $d\lambda_0$ bestimmen; man gelangt dadurch zur Kenntniss des Einflusses, den die Fehler in den angenommenen Längen der Beobachtungsörter auf das Endresultat ausüben.

58.

Da in dem Venusvorübergange des Jahres 1874 die günstigen Beobachtungsörter auf der südlichen Halbkugel der Erde nur spärlich vorhanden sind, so habe ich, um genauer über den relativen Werth einiger derselben entscheiden zu können, die Coefficienten der Bedingungsgleichungen noch einiger anderer, dort allenfalls auch auswählbarer Stationen berechnet, bin aber dabei mit weniger Genauigkeit als bei den vorstehenden Oertern verfahren, und habe auch statt der Coefficienten der Ränderberührungen, die der Berührung des Venusmittelpunkts mit den Sonnenrändern angesetzt; man kann durch diese sich schon eine Vorstellung von der Grösse der Coefficienten für die Ränderberührungen machen.

Crozets-Inseln (Seegelbai).

$\varphi = -46^\circ\,26'\,18''$, $\lambda = 49^\circ\,30'\,19''$

Erste Berührung des Mittelpunkts	Dec. 8.	$17^h\,47^m$
Grösste Phase		$19\;45$, $b' = 2'\,11''$
Zweite Berührung des Mittelpunkts		$21\;43$

mit den Positionswinkeln

$$\theta_0 = 179^{\circ}1$$
$$= 145.7$$
$$= 122.9$$

und den Coefficienten der Bedingungsgleichungen

$d\varrho_0$	$d\lambda - dl'$	$d\beta$	$d\Delta' \pm d\Delta_1$	$d\lambda_0$	H
+0.969	−0.615	+0.769	−0.367	+0.0119	14°3
+0.683	−0.149	+0.973	0	−0.0002	34.3
+0.318	+0.360	+0.946	−0.367	−0.0128	54.0

Edwards-Inseln (die westlichste).

$$\varphi = -46^{\circ}\,45'\,0'', \quad \lambda = 35^{\circ}\,15'\,55''$$

Erste Berührung des Mittelpunkts Dec. 8. $16^h\,51^m$
Grösste Phase . . . . . $18\;49$, $b' = 2'\,10''$
Zweite Berührung des Mittelpunkts $20\;46$

mit den Positionswinkeln

$$\theta_0 = 183^{\circ}1$$
$$= 146.7$$
$$= 118.1$$

und den Coefficienten der Bedingungsgleichungen

$d\varrho_0$	$d\lambda - dl'$	$d\beta$	$d\Delta' \pm d\Delta_1$	$d\lambda_0$	H
+0.994	−0.614	+0.771	−0.367	+0.0119	5°5
+0.760	−0.149	+0.974	0	−0.0002	24.6
+0.334	+0.357	+0.948	−0.367	−0.0128	44.7

Mauritius (Ludwigshafen).

$$\varphi = -20^{\circ}\,9'\,45'', \quad \lambda = 55^{\circ}\,12'\,0''$$

Erste Berührung des Mittelpunkts Dec. 8. $18^h\;8^m$
Grösste Phase . . . . . $20\;10$, $b' = 2'\,20''$
Zweite Berührung des Mittelpunkts $22\;11$

mit den Positionswinkeln

$$\theta_0 = 153^{\circ}2$$
$$= 112.7$$
$$= 71.6$$

und den Coefficienten der Bedingungsgleichungen

$d\varrho_0$	$d\lambda - d\lambda'$	$d\beta$	$d\Delta' \pm d\Delta_1$	$d\lambda_0$	H
+0.880	—0.629	+0.759	—0.367	+0.0126	9°5
+0.311	—0.148	+0.974	0	—0.0002	36.7
—0.139	+0.380	+0.910	—0.367	—0.0130	64.5

Es liessen sich noch mehrere solcher Oerter aufstellen, allein ich meine mich mit der Aufstellung der vorstehenden begnügen zu können.

Zusatz 1.

Die Parallaxe der Distanz betreffend.

59.

In der Anmerkung des Art. 30 habe ich die isosthenischen Kreisbögen erwähnt, die Lagrange in Bezug auf die Parallaxe der Distanz erhalten hat, es kann daher von Interesse sein zu ermitteln, ob diese mit den hier entwickelten isosthenischen Kreisbögen, die sich auf den Coefficienten von $d\varrho_0$ beziehen, identisch sind oder nicht. Suchen wir zu dem Ende einen einfachen Ausdruck für die Parallaxe der Distanz. Denken wir uns, gleichwie Lagrange, zwei Gestirne in messbaren Entfernungen von der Erde, denen in irgend einem Zeitpunkte die Horizontalparallaxen p und p' zukommen.

Seien in demselben Zeitpunkt der Azimuthunterschied dieser beiden Gestirne a, ihre vom Mittelpunkt der Erde aus gesehenen Höhen H und H', dieselben von irgend einem Punkt der Erdoberfläche aus gesehenen $H_,$ und $H_,'$, ihre vom Mittelpunkt der Erde aus gesehene gegenseitige Entfernung Z, und dieselbe von demselben Punkt der Erdoberfläche aus gesehene $Z_,$, dann erhalten wir sogleich

$$\cos Z = \sin H \sin H' + \cos H \cos H' \cos a$$
$$\cos Z_, = \sin H_, \sin H_,' + \cos H_, \cos H_,' \cos a$$

Mit Uebergehung der Quadrate und höheren Potenzen der Parallaxen sind aber

$$H_, = H - p \cos H$$
$$H_,' = H' - p' \cos H'$$

durch deren Substitution in die vorstehenden Gleichungen sich

$$\cos Z_{,} = \cos Z - p\,\{\cos H \sin H' - \sin H \cos H' \cos a\}\cos H \\ - p'\,\{\sin H \cos H' - \cos H \sin H' \cos a\}\cos H'$$

ergiebt. Betrachten wir das Dreieck, welches die obige Gleichung für $\cos Z$ gegeben hat, näher. In diesem sind die Seiten

$$Z,\ 90^0 - H,\ 90^0 - H'$$

und der der Seite Z gegenüberliegende Winkel ist a. Nennen wir die den beiden anderen Seiten bez. gegenüberliegenden Winkel θ_0 und θ'_0, so sind θ_0 und θ'_0 die vom bez. Verticalkreise an gezählten Positionswinkel des einen Gestirns in Bezug auf das andere, von welchen der eine oder der andere mit dem im Vorhergehenden θ_0 genannten Positionswinkel bis auf sehr Weniges identisch ist. Das bezeichnete Dreieck giebt aber

$$\begin{aligned} \cos H' \cos a &= \cos Z \cos H - \sin Z \sin H \cos \theta_0' \\ \sin H' &= \cos Z \sin H + \sin Z \cos H \cos \theta_0' \\ \cos H \cos a &= \cos Z \cos H' - \sin Z \sin H' \cos \theta_0 \\ \sin H &= \cos Z \sin H' + \sin Z \cos H' \cos \theta_0 \end{aligned}$$

durch deren Anwendung der obige Ausdruck für $\cos Z$ in den folgenden übergeht,

$$\cos Z_{,} = \cos Z - p \sin Z \cos H \cos \theta_0' - p' \sin Z \cos H' \cos \theta_0$$

woraus

$$Z_{,} = Z + p \cos H \cos \theta'_0 + p' \cos H' \cos \theta_0$$

Die Parallaxe der Distanz hat also

$$p \cos H \cos \theta'_0 + p' \cos H' \cos \theta_0$$

zum Ausdruck, während der Coefficient von $d\varrho_0$ in der Gleichung zur Bestimmung der Sonnenparallaxe aus einem Venusvorübergange

$$\cos H' \cos \theta_0$$

zum Ausdruck hat, da nemlich hier H' sehr nahe dasselbe ist, was oben H war. Diese beiden Ausdrücke sind zwar mit einander verwandt, aber nicht identisch, und die isosthenischen Kreisbögen, die aus denselben entspringen, sind also auch mit einander nicht identisch.

Zusatz 2.

Von der Strahlenbrechung der Distanz und des Positionswinkels.

60.

Seien z' und z'' die scheinbaren Zenithdistanzen irgend zweier Punkte der Himmelskugel, a der Azimuthalunterschied derselben, D der Bogen grössten Kreises, welcher diese Punkte mit einander verbindet, also die scheinbare Distanz derselben. Theilen wir den Bogen D in zwei gleiche Theile, nennen die Zenithdistanz des Halbirungspunkts z, den Positionswinkel an diesem Punkte p, und bezeichnen die Azimuthalunterschiede zwischen z und z' mit a', und zwischen z und z'' mit a'', dann geben die beiden sphärischen Dreiecke, die somit entstehen,

$$\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}D\sin p &= \sin z'\sin a' \\
\sin\tfrac{1}{2}D\cos p &= -\cos z'\sin z + \sin z'\cos z\cos a' \\
\hline
\sin\tfrac{1}{2}D\sin p &= \sin z''\sin a'' \\
\sin\tfrac{1}{2}D\cos p &= \cos z''\sin z - \sin z''\cos z\cos a'' \\
\hline
\cos\tfrac{1}{2}D &= \cos z'\cos z + \sin z'\sin z\cos a' \\
&= \cos z''\cos z + \sin z''\sin z\cos a''
\end{aligned}$$

Da nur die erste Potenz der Strahlenbrechung berücksichtigt zu werden braucht, so kann die Wirkung derselben auf D und p durch die Differentiation der vorstehenden Gleichungen ermittelt werden, wobei zu bemerken ist, dass auch a' und a'' veränderlich angenommen werden müssen. Da aber

$$a = a' + a''$$

und a von der Strahlenbrechung nicht geändert wird, so ergiebt sich

$$da' = -da''$$

Setzt man ferner, der Einrichtung der Strahlenbrechungstafeln gemäss,

$$\begin{aligned}
dz' &= r'\,\mathrm{tg}\,z' \\
dz'' &= r''\,\mathrm{tg}\,z''
\end{aligned}$$

so giebt die Differentiation, nach einigen leichten Reductionen, zuerst

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}D\sin p\,dD + \sin\tfrac{1}{2}D\cos p\,dp = \\
&\qquad r'\sin\tfrac{1}{2}D\sin p + \sin z'\cos a'\,da' \\
&\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}D\cos p\,dD - \sin\tfrac{1}{2}D\sin p\,dp = \\
&\qquad r'\left(\sin\tfrac{1}{2}D\cos p + \frac{\sin z}{\cos z'}\right) - \cos\tfrac{1}{2}D\,dz - \sin z'\cos z\sin a'\,da'
\end{aligned}$$

$$\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}D\sin p\,dD + \sin\tfrac{1}{2}D\cos p\,dp =$$
$$r''\sin\tfrac{1}{2}D\sin p + \sin z''\cos a''\,da''$$
$$\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}D\cos p\,dD - \sin\tfrac{1}{2}D\sin p\,dp =$$
$$r''\left(\sin\tfrac{1}{2}D\cos p - \frac{\sin z}{\cos z''}\right) + \cos\tfrac{1}{2}D\,dz + \sin z''\cos z\sin a''\,da''$$

und durch die Elimination von dp aus diesen Gleichungen entstehen

$$\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}DdD = r'\left(\sin\tfrac{1}{2}D + \frac{\sin z}{\cos z'}\cos p\right) - \cos\tfrac{1}{2}D\cos p\,dz$$
$$+ \sin z'\,(\cos a'\sin p - \sin a'\cos p\cos z)\,da'$$
$$\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}DdD = r''\left(\sin\tfrac{1}{2}D - \frac{\sin z}{\cos z''}\cos p\right) + \cos\tfrac{1}{2}D\cos p\,dz$$
$$+ \sin z''\,(\cos a''\sin p + \sin a''\cos p\cos z)\,da''\,.$$

Man findet nun leicht, dass die Coefficienten von da' und da'' in diesen Gleichungen einander gleich sind, denn die beiden oben eingeführten Dreiecke geben, wenn mit p' und p'' die beiden, gleichartig gezählten, Positionswinkel an den Endpunkten von D bezeichnet werden,

$$\cos a'\sin p - \sin a'\cos p\cos z = \cos\tfrac{1}{2}D\sin p'$$
$$\cos a''\sin p + \sin a''\cos p\cos z = \cos\tfrac{1}{2}D\sin p''$$
$$\sin z'\sin p' = \sin z''\sin p'' = \sin z\sin p$$

Unsere Gleichungen werden hiemit

$$\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}DdD = r'\left(\sin\tfrac{1}{2}D + \frac{\sin z}{\cos z'}\cos p\right) - \cos\tfrac{1}{2}D\cos p\,dz + \cos\tfrac{1}{2}D\sin z\sin p\,da'$$
$$\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}DdD = r''\left(\sin\tfrac{1}{2}D - \frac{\sin z}{\cos z''}\cos p\right) + \cos\tfrac{1}{2}D\cos p\,dz + \cos\tfrac{1}{2}D\sin z\sin p\,da''$$

deren Summe, wegen $da' + da'' = 0$,

$$\cos\tfrac{1}{2}DdD = r'\left(\sin\tfrac{1}{2}D + \frac{\sin z}{\cos z'}\cos p\right) + r''\left(\sin\tfrac{1}{2}D - \frac{\sin z}{\cos z''}\cos p\right)$$

giebt. Diese Gleichung gilt für jeden Werth von D, nehmen wir aber an, dass D auch eine kleine Grösse erster Ordnung sei, von welcher nur die erste Potenz berücksichtigt zu werden braucht, so wird diese Gleichung, da jetzt

$$\frac{1}{\cos z'} = \frac{1}{\cos z} + \sin\tfrac{1}{2}D\,\frac{\sin z}{\cos^2 z}\cos p$$
$$\frac{1}{\cos z''} = \frac{1}{\cos z} - \sin\tfrac{1}{2}D\,\frac{\sin z}{\cos^2 z}\cos p$$

gesetzt werden dürfen,

$$dD = \tfrac{1}{2}r'\,D\,(1 + \operatorname{tg}^2 z\cos^2 p) + r'\operatorname{tg} z\cos p$$
$$+ \tfrac{1}{2}r''\,D\,(1 + \operatorname{tg}^2 z\cos^2 p) - r''\operatorname{tg} z\cos p$$

Seien ferner

$$r' + r'' = 2r$$
$$r' - r'' = 2\Delta r$$

dann kann r für den Coefficienten der Strahlenbrechung gehalten werden, welcher dem Halbirungspunkt des Bogens D, oder der Zenithdistanz z angehört, und eliminirt man hiemit r' und r'' aus dem vorstehenden Ausdruck, so bekommt man

$$dD = rD(1 + \operatorname{tg}^2 z \cos^2 p) + 2\Delta r \operatorname{tg} z \cos p$$

wobei wir vorläufig stehen bleiben wollen.

61.

Gehen wir zur Strahlenbrechung des Positionswinkels über. Aus dem vor. Art. nehme ich die Gleichungen

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}D \sin p\, dD + \sin\tfrac{1}{2}D \cos p\, dp &= \\ r' \sin\tfrac{1}{2}D \sin p + \sin z' \cos a'\, da' & \\ \tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}D \sin p\, dD + \sin\tfrac{1}{2}D \cos p\, dp &= \\ r'' \sin\tfrac{1}{2}D \sin p + \sin z'' \cos a''\, da'' & \end{aligned}$$

und eliminire daraus, mit Benutzung der Gleichungen

$$\begin{aligned} \sin z' \cos a' &= \cos\tfrac{1}{2}D \sin z + \sin\tfrac{1}{2}D \cos z \cos p \\ \sin z'' \cos a'' &= \cos\tfrac{1}{2}D \sin z - \sin\tfrac{1}{2}D \cos z \cos p \\ 0 &= da' + da'' \end{aligned}$$

die Differentiale da' und da'', wodurch

$$\begin{aligned} 2\cos p\, dp = {} & r' (\sin p + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}D \operatorname{cotg} z \sin p \cos p) \\ & + r'' (\sin p - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}D \operatorname{cotg} z \sin p \cos p) \\ & - \frac{\cos\frac{1}{2}D}{\sin\frac{1}{2}D} \sin p\, dD \end{aligned}$$

erhalten wird, und schafft man hieraus dD durch die oben erhaltene Gleichung

$$\cos\tfrac{1}{2}D\, dD = r'\left(\sin\tfrac{1}{2}D + \frac{\sin z}{\cos z'}\cos p\right) + r''\left(\sin\tfrac{1}{2}D - \frac{\sin z}{\cos z''}\cos p\right)$$

fort, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} dp = {} & -\tfrac{1}{2}r'\left(\frac{\sin z}{\sin\frac{1}{2}D \cos z'} \sin p - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}D \operatorname{cotg} z \sin p\right) \\ & + \tfrac{1}{2}r'\left(\frac{\sin z}{\sin\frac{1}{2}D \cos z''} \sin p - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}D \operatorname{cotg} z \sin p\right) \end{aligned}$$

welcher Ausdruck für jeden Werth von D gilt. Nimmt man wieder an, dass D eine kleine Grösse erster Ordnung sei, und eliminirt $\cos z'$ und $\cos z''$ durch die im vor. Art. dafür gegebenen Ausdrücke, so verwandelt sich der Ausdruck für dp in den folgenden,

$$\begin{aligned} dp = {} & -\tfrac{1}{2}r'\left(\frac{\operatorname{tg} z \sin p}{\sin\frac{1}{2}D} + \operatorname{tg}^2 z \sin p \cos p\right) \\ & + \tfrac{1}{2}r''\left(\frac{\operatorname{tg} z \sin p}{\sin\frac{1}{2}D} - \operatorname{tg}^2 z \sin p \cos p\right) \end{aligned}$$

woraus durch die Einführung von r und Δr

$$dp = -r\,\mathrm{tg}^2 z \sin p \cos p - 2\Delta r \frac{\mathrm{tg}\, z \sin p}{D}$$

entsteht.

62.

Die im vor. und vorvor. Art. enthaltenen Ausdrücke für dp und dD sind schon für die Anwendung geeignet, allein sie können in andere umgestaltet werden, die zweckmässiger sind. Zuerst bemerke ich, dass zufolge des Taylorschen Satzes mit hier ausreichender Genauigkeit

$$2\Delta r = \frac{dr}{dz}(z' - z'')$$

ist, wofür man auch

$$2\Delta r = r \frac{d.\log r}{m\,dz}(z' - z'')$$

schreiben kann, wenn m den Modul der angewandten Logarithmen bedeutet. Ferner ist mit demselben Grade der Genauigkeit

$$z' - z'' = D\cos p$$

und hiemit gehen die genannten Ausdrücke in die folgenden über,

$$dD = rD(1 + \mathrm{tg}^2 z \cos^2 p) + rD \frac{d.\log r}{m\,dz} \mathrm{tg}\, z \cos^2 p$$

$$dp = -r\,\mathrm{tg}^2 z \sin p \cos p - r \frac{d.\log r}{m\,dz} \mathrm{tg}\, z \sin p \cos p$$

Setzt man nun

$$r_0 = r + r \frac{d.\log r}{m\,dz} \sin z \cos z$$

und führt r_0 in die ersten Glieder der vorstehenden Gleichungen ein, so werden diese

$$dD = r_0 D(1 + \mathrm{tg}^2 z \cos^2 p) - rD \frac{d.\log r}{m\,dz} \sin z \cos z \sin^2 p$$

$$dp = -r_0\,\mathrm{tg}^2 z \sin p \cos p - r \frac{d.\log r}{m\,dz} \sin z \cos z \sin p \cos p$$

Der Vortheil, den diese Ausdrücke, den vorhergehenden gegenüber, gewähren, besteht darin, dass die zweiten Glieder derselben so klein sind, dass man sie nur in den seltensten Fällen zu berücksichtigen braucht. Sie wachsen *ceteris paribus* mit der Zenithdistanz, man wird aber aus der unten folgenden Tafel sehen, dass, wenn man die wahren Werthe von z und p anwendet, bei $z = 85^0$ und $D = 1000''$ die Maxima der zweiten Glieder in

$$dD \ldots 0''.054$$
$$dp \ldots 5''.5$$

betragen. Nimmt man hingegen für z und p die scheinbaren Werthe, so werden diese Maxima in

$$dD \ldots 0''.045$$
$$dp \ldots 4''.7$$

die gemeiniglich bei Beobachtungen unter der genannten Zenithdistanz vergeben werden können, zumal da in dem Positionswinkel eine Genauigkeit bis auf $0'.1$ gewöhnlich ausreicht. Diese Maxima treffen für die Distanz bei $p = 90^0$, und $= 270^0$, und für den Positionswinkel bei $p = 45^0$ oder $= 135^0$, oder $= 225^0$, oder $= 315^0$ ein, und da aus der vorstehenden Abhandlung hervorgeht, dass bei den Beobachtungen der Venusvorübergänge Positionswinkel, die in der Nähe von 90^0 oder 270^0 liegen, vermieden werden müssen, so werden die obigen zweiten Glieder bei der Reduction der Beobachtungen dieser Erscheinung wohl übergangen werden können. Um aber Nichts zu vergeben, habe ich sie in der unten folgenden Tafel für die numerischen Werthe von r_0 mit aufgenommen.

63.

Es ist noch der Einfluss des Standes der meteorologischen Instrumente auf den Werth von r_0 zu entwickeln. Ich werde von der Besselschen Form der Strahlenbrechung ausgehen, nemlich

$$r = \alpha \beta^A \gamma^\lambda$$

setzen, wo β vom Barometer-, und γ vom Thermometerstand abhängig, von der Zenithdistanz unabhängig sind, während α, A, λ blos von der Zenithdistanz abhängen. Eben so soll

$$r_0 = \alpha_0 \beta^{A_0} \gamma^{\lambda_0}$$

sein, und es sind daher die Ausdrücke für α_0, A_0, λ_0 unabhängig von β und γ zu entwickeln.

Nehmen wir von der oben eingeführten Relation

$$r_0 = r + r \frac{d \cdot \log r}{m\, dz} \sin z \cos z$$

den Logarithmus, und setzen in diesen die vorstehenden Ausdrücke von r und r_0, dann erhalten wir die Gleichung

$$\log\alpha_0 + A_0\log\beta + \lambda_0\log\gamma = \log\alpha + A\log\beta + \lambda\log\gamma$$
$$+ \log\left\{1 + \frac{d.\log\alpha}{mdz}\sin z\cos z + \left[\frac{dA}{mdz}\log\beta + \frac{d\lambda}{mdz}\log\gamma\right]\sin z\cos z\right\}$$
$$= \log\alpha + A\log\beta + \lambda\log\gamma$$
$$+ \log\left\{1 + \frac{d.\log\alpha}{mdz}\sin z\cos z\right\}$$
$$+ \log\left\{1 + \frac{\frac{dA}{mdz}\log\beta + \frac{d\lambda}{mdz}\log\gamma}{1 + \frac{d.\log\alpha}{mdz}\sin z\cos z}\sin z\cos z\right\}$$

oder wenn der letzte Logarithmus in eine Reihe aufgelöst wird, und man bei der ersten Potenz der immer kleinen Differentiale von A und γ stehen bleibt,

$$\log\alpha_0 + A_0\log\beta + \lambda_0\log\gamma = \log\alpha + A\log\beta + \lambda\log\gamma$$
$$+ \log\left\{1 + \frac{d.\log\alpha}{mdz}\sin z\cos z\right\}$$
$$+ \frac{\frac{dA}{dz}\sin z\cos z}{1 + \frac{d.\log\alpha}{mdz}\sin z\cos z}\log\beta + \frac{\frac{d\lambda}{dz}\sin z\cos z}{1 + \frac{d.\log\alpha}{mdz}\sin z\cos z}$$

und da dieser Ausdruck unabhängig von β und γ statt finden muss,

$$\alpha_0 = \alpha\left\{1 + \frac{d.\log\alpha}{mdz}\sin z\cos z\right\}$$
$$A_0 = A + \frac{\alpha}{\alpha_0}\frac{dA}{dz}\sin z\cos z$$
$$\lambda_0 = \lambda + \frac{\alpha}{\alpha_0}\frac{d\lambda}{dz}\sin z\cos z$$

Nach diesen Ausdrücken, und indem ich

$$\alpha'_0 = -r\frac{d.\log r}{mdz}\sin z\cos z$$

setzte, habe ich mit Zugrundelegung der Besselschen Strahlenbrechungstafel, deren Argument die scheinbare Zenithdistanz ist,*) die erste Abtheilung der unten folgenden Tafel berechnet, welche $\log\alpha_0$, $\log\alpha'_0$, A_0, λ_0 giebt. Die beiden Logarithmen gehören den in Theilen des Kreisradius ausgedrückten Werthen von α_0 und α'_0 an, weshalb in dem Ausdruck für die Strahlenbrechung der Distanz der Factor D in Secunden auszudrücken ist. Da es zweckmässig erscheint, den Positionswinkel und die dahin gehörige Strahlenbrechung in Minuten und Decimaltheilen davon auszudrücken, so ist der obige Ausdruck für die letztere mit $3437'',7$ zu multipliciren.

---

*) Bessel, Astronomische Untersuchungen. Erster Theil, Seite 198 u. 199. Tafel I.

64.

In den vorstehenden Ableitungen sind wir von den scheinbaren Zenithdistanzen ausgegangen, und selbstverständlich sind daher auch in den erhaltenen Ausdrücken für die Strahlenbrechungen auch die scheinbaren Werthe von D und p zu substituiren. Es ist aber sehr leicht zu erkennen, dass wir auch von den wahren Zenithdistanzen hätten ausgehen können, und dass wir in diesem Falle dieselben Ausdrücke für die Strahlenbrechungen erhalten haben würden, nur müssten in diesem Falle die wahren Werthe von D und p darin substituirt werden.

In der Anwendung kann sich ereignen, dass es in gewissen Fällen am Angemessensten ist jene Werthe, und in gewissen anderen Fällen diese Werthe anzuwenden, und deshalb habe ich der im vor. Art. erwähnten Tafel die zweite Abtheilung hinzugefügt, deren Argument die wahre Zenithdistanz ist, und deren Anwendung folglich auch den wahren Werth von D und p verlangt. Wenn der wahre Werth von z bekannt ist, so kann man auch leicht den wahren Werth von p erhalten, aber von D kennt man gemeiniglich nur den scheinbaren Werth und deshalb ist die Anwendung dieser Abtheilung der Tafel von jener etwas verschieden, insofern die Strahlenbrechung der Distanz zu berechnen ist.

Sei wie vorher D die scheinbare, und $D + dD$ die wahre Distanz, wobei bemerkt werden kann, dass dD immer positiv ist. Nehmen wir nun blos das erste Glied der Strahlenbrechung der Distanz vor, da die auszuführende Reduction auf das zweite, sehr kleine Glied keinen merklichen Einfluss äussern kann. Wir haben also jetzt

$$dD = r_0 (D + dD)(1 + \mathrm{tg}^2 z \cos^2 p)$$

wo unter z und p die wahren Werthe derselben zu verstehen sind. Dieser Ausdruck kann nun, in der Voraussetzung, dass r_0 in Theilen des Kreisradius ausgedrückt wird, wie in der Tafel der Fall ist, in die folgenden umgeformt werden. Sei

$$x = r_0 (1 + \mathrm{tg}^2 z \cos^2 p)$$

dann wird

$$dD = D \frac{x}{1 - x}$$

und nach diesen Ausdrücken ist also die Strahlenbrechung der Distanz aus der zweiten Abtheilung der Tafel zu berechnen, während die Berechnung der Strahlenbrechung des Positionswinkels keine Abänderung erleidet. Zu bemerken ist hiebei noch, dass der Divisor $1 - x$ nur für sehr grosse Zenithdistanzen und Distanzen der beiden Gestirne merklich

von der Eins verschieden ist, und dass man ihn bis $z = 75^0$ wohl immer unberücksichtigt lassen kann.

Ich lasse nicht unerwähnt, dass man, wenigstens annähernd, den Divisor $1 - x$ dem Factor r_0 einverleiben kann, wenn man $\frac{r_0}{1 - r \sec^2 z}$ statt r_0 in die Tafel aufnimmt. Allein dieses ist erstens nicht genau, und zweitens würde die Anwendung des so abgeänderten Factors auf die Strahlenbrechung des Positionswinkels diese fehlerhaft machen. Ich führe noch an, dass ich die oben entwickelten Formeln für dD und dp, so wie eine Tafel für $\log \alpha_0$ schon im Jahre 1827, in meiner Abhandlung über das Heliometer, gegeben habe.

65.

Tafel für die Strahlenbrechung der Distanz und des Positionswinkels.

	Arg. Scheinbare Zenithdistanz.						Arg. Wahre Zenithdistanz.					
z	$\log \alpha_0$	$D.$	$\log \alpha'_0$	$D.$	A_0	λ_0	$\log \alpha_0$	$D.$	$\log \alpha'_0$	$D.$	A_0	λ_0
0°	6.4472						6.4472					
		1						1				
10	471						471					
		3						3				
20	468						468					
		4						4				
30	464						464					
		5						7				
40	459					1.002	457					1.002
		4										
45	6.4455					1.003	6.4452					1.003
		6						8				
50	449					1.006	444					1.005
		9						13				
55	440					1.010	431					1.008
		3						3				
56	6.4437					1.011	6.4428					1.008
		3						3				
57	434					1.012	425					1.009
		3						4				
58	431					1.012	421					1.009
		3						4				
59	428					1.013	417					1.010
		4						4				
60	424		4.312			1.013	413		4.393			1.011
		4		30				5		32		
61	6.4420		4.342			1.014	6.4408		4.425			1.012
		4		31				5		34		
62	416		4.373			1.016	403		4.459			1.013
		4		32				6		36		
63	412		4.405			1.017	397		4.495			1.014
		5		34				7		37		
64	407		4.439			1.018	390		4.532			1.015
		6		37				7		38		
65	401		4.476			1.020	383		4.570			1.016
		6		38				8		38		
66	6.4395		4.514			1.022	6.4375		4.608			1.018
		8		40				9		38		
67	387		4.554			1.024	366		4.646			1.020
		9		42				10		39		
68	378		4.596			1.027	356		4.685			1.022
		10		42				13		42		
69	368		4.638			1.030	343		4.727			1.024
		11		44				15		44		
70	357		4.682			1.033	328		4.771			1.027
		13		45				16		46		
71	6.4344		4.727			1.037	6.4312		4.817			1.029
		15		47				18		48		
72	329		4.774			1.041	294		4.865			1.032
		18		50				21		48		
73	311		4.824			1.045	273		4.913			1.035
		21		53				25		50		
74	290		4.877		1.005	1.049	248		4.963		0.993	1.039
		23		55				30		52		
75	267		4.932		1.006	1.053	218		5.015		0.992	1.045

Tafel für die Strahlenbrechung der Distanz und des Positionswinkels.

	Arg. Scheinbare Zenithdistanz.						Arg. Wahre Zenithdistanz.					
z	$\log \alpha_0$	$D.$	$\log \alpha'_0$	$D.$	A_0	λ_0	$\log \alpha_0$	$D.$	$\log \alpha'_0$	$D.$	A_0	λ_0
75° 0′	6.4267	15	4.932	28	1.006	1.053	6.4218	18	5.015	27	0.992	1.045
30	252	16	4.960	29	1.006	1.057	200	19	5.042	28	0.992	1.048
76 0	236	18	4.989	29	1.007	1.062	181	20	5.070	29	0.992	1.051
30	218	19	5.018	29	1.007	1.068	161	23	5.099	29	0.992	1.055
77 0	199	21	5.047	30	1.008	1.074	138	26	5.128	30	0.991	1.060
30	178	23	5.077	30	1.008	1.082	112	29	5.158	31	0.991	1.065
78 0	6.4155	8	5.107	10	1.009	1.087	6.4083	11	5.189	10	0.991	1.070
10	147	9	5.117	10	1.009	1.089	072	11	5.199	11	0.991	1.071
20	138	9	5.128	11	1.009	1.093	061	11	5.210	11	0.991	1.073
30	129	9	5.139	11	1.009	1.096	050	12	5.221	11	0.991	1.075
40	120	10	5.150	11	1.009	1.098	038	12	5.232	11	0.991	1.077
50	110	10	5.161	11	1.010	1.100	026	13	5.243	11	0.990	1.079
79 0	6.4100	11	5.172	12	1.010	1.103	6.4013	13	5.254	11	0.990	1.081
10	089	11	5.184	12	1.010	1.105	6.4000	14	5.265	12	0.990	1.082
20	078	12	5.196	12	1.010	1.107	6.3986	15	5.277	12	0.989	1.084
30	066	12	5.208	13	1.010	1.110	971	15	5.289	13	0.989	1.086
40	054	14	5.221	13	1.010	1.112	956	16	5.302	13	0.989	1.088
50	040	15	5.234	14	1.011	1.114	940	17	5.315	14	0.988	1.090
80 0	6.4025	15	5.248	12	1.011	1.117	6.3923	17	5.329	12	0.988	1.092
10	6.4010	15	5.260	12	1.011	1.119	906	19	5.341	12	0.987	1.094
20	6.3995	15	5.272	12	1.012	1.121	887	19	5.353	12	0.987	1.097
30	980	15	5.284	12	1.012	1.124	868	20	5.365	13	0.986	1.099
40	965	15	5.296	11	1.013	1.127	848	20	5.378	12	0.986	1.102
50	950	16	5.307	12	1.013	1.131	828	21	5.390	12	0.985	1.104
81 0	6.3934	16	5.319	11	1.014	1.135	6.3807	22	5.402	12	0.985	1.107
10	918	18	5.330	12	1.014	1.140	785	22	5.414	13	0.985	1.110
20	900	19	5.342	12	1.015	1.146	763	23	5.427	12	0.985	1.114
30	881	21	5.354	13	1.015	1.152	740	25	5.439	12	0.984	1.118
40	860	22	5.367	13	1.015	1.158	715	26	5.451	12	0.984	1.122
50	838	24	5.380	14	1.016	1.164	689	28	5.463	13	0.984	1.126
82 0	6.3814	25	5.394	15	1.017	1.171	6.3661	29	5.476	13	0.983	1.131
10	789	26	5.409	14	1.018	1.177	632	32	5.489	14	0.983	1.136
20	763	26	5.423	14	1.018	1.183	600	33	5.503	14	0.982	1.141
30	737	27	5.437	14	1.019	1.190	567	36	5.517	15	0.981	1.146
40	710	30	5.451	14	1.020	1.196	531	38	5.532	14	0.980	1.151
50	680	32	5.465	14	1.021	1.203	493	40	5.546	15	0.979	1.156
83 0	6.3648	34	5.479	15	1.021	1.210	6.3453	41	5.561	15	0.978	1.161
10	614	37	5.494	16	1.022	1.216	412	44	5.576	14	0.977	1.166
20	577	40	5.510	16	1.023	1.223	368	48	5.590	15	0.976	1.171
30	537	42	5.526	17	1.024	1.230	320	51	5.605	15	0.975	1.177
40	495	45	5.543	17	1.025	1.238	269	53	5.620	15	0.974	1.182
50	450	48	5.560	16	1.026	1.246	216	56	5.635	14	0.973	1.187
84 0	402		5.576		1.027	1.254	160		5.649		0.972	1.193

Tafel für die Strahlenbrechung der Distanz und des Positionswinkels.

	Arg. Scheinbare Zenithdistanz.						Arg. Wahre Zenithdistanz.					
z	$\log \alpha_0$	$D.$	$\log \alpha'_0$	$D.$	A_0	λ_0	$\log \alpha_0$	$D.$	$\log \alpha'_0$	$D.$	A_0	λ_0
84° 0′	6.3402	51	5.576	16	1.027	1.254	6.3160	60	5.649	15	0.972	1.193
10	351	52	5.592	16	1.028	1.263	100	64	5.664	15	0.971	1.198
20	299	53	5.608	14	1.029	1.272	6.3036	67	5.679	14	0.969	1.204
30	246	54	5.622	13	1.031	1.282	6.2969	69	5.693	14	0.967	1.210
40	192	54	5.635	11	1.032	1.291	900	72	5.707	13	0.965	1.215
50	138	55	5.646	11	1.034	1.301	828	73	5.720	13	0.963	1.221
84 0	083		5.657		1.036	1.311	755		5.733		0.961	1.227

Arg. Stand des Thermometers am Barometer.

Fahrenheit.	
	$\log T$
−30°	+0.0024
−20	20
−10	16
0	13
10	9
20	5
30	+0.0001
40	− 0.003
50	7
60	11
70	15
80	19
90	23
100	−0.0026

Reaumur.	
	$\log T$
−35°	+0.0031
−30	26
−25	22
−20	18
−15	13
−10	9
− 5	+0.0004
0	0.0000
5	−0.0004
10	9
15	13
20	18
25	22
30	26
35	−0.0031

Centesimal.	
	$\log T$
−35°	+0.0025
−30	21
−25	18
−20	14
−15	11
−10	7
− 5	+0.0004
0	0.0000
5	−0.0004
10	7
15	11
20	14
25	18
30	21
35	−0.0024

Arg. Barometerstand.

Pariser Linien.	
	log *B*
315	−0.0245
316	231
317	217
318	203
319	190
320	176
321	163
322	149
323	136
324	122
325	109
326	95
327	82
328	69
329	56
330	43
331	29
332	16
333	−0.0003
334	+0.0010
335	23
336	36
337	49
338	62
339	74
340	87
341	100
342	113
343	125
344	138
345	151
346	163
347	176
348	188
349	201
350	+0.0213

Englische Zolle.	
	log *B*
27.5	−0.0319
27.6	303
27.7	288
27.8	282
27.9	256
28.0	241
28.1	225
28.2	210
28.3	195
28.4	179
28.5	164
28.6	149
28.7	134
28.8	119
28.9	104
29.0	89
29.1	74
29.2	59
29.3	44
29.4	29
29.5	−0.0014
29.6	+0.0001
29.7	15
29.8	30
29.9	44
30.0	59
30.1	73
30.2	88
30.3	102
30.4	116
30.5	131
30.6	145
30.7	159
30.8	173
30.9	187
31.0	+0.0201

Millimeter.			
	log *B*		log *B*
710	−0.0248	750	−0.0010
711	242	751	−0.0004
712	236	752	+0.0002
713	230	753	8
714	224	754	13
715	218	755	19
716	212	756	25
717	205	757	30
718	199	758	36
719	193	759	42
720	187	760	48
721	181	761	53
722	175	762	59
723	169	763	65
724	163	764	70
725	157	765	76
726	151	766	82
727	145	767	87
728	139	768	93
729	133	769	99
730	127	770	104
731	122	771	110
732	116	772	116
733	110	773	121
734	104	774	127
735	98	775	132
736	92	776	138
737	86	777	144
738	80	778	149
739	74	779	155
740	68	780	160
741	63	781	166
742	57	782	171
743	51	783	177
744	45	784	183
745	39	785	188
746	33	786	194
747	27	787	199
748	22	788	204
749	16	789	210
750	−0.0010	790	+0.0216

Arg. Stand des Thermometers im Freien.

Fahrenheit.				Réaumur.		Centesimal.	
	log γ		log γ		log γ		log γ
−20°	+0.0628	28°	+0.0180	−35°	+0.0899	−35°	+0.0737
−19	618	29	171	−30	783	−30	648
−18	608	30	162	−25	670	−25	560
−17	599	31	154	−24	648	−24	542
−16	589	32	145	−23	625	−23	525
−15	579	33	136	−22	603	−22	508
−14	569	34	127	−21	582	−21	491
−13	560	35	119	−20	560	−20	473
−12	550	36	110	−19	538	−19	456
−11	540	37	101	−18	516	−18	439
−10	531	38	92	−17	495	−17	423
− 9	521	39	84	−16	473	−16	406
− 8	512	40	75	−15	452	−15	389
− 7	502	41	66	−14	431	−14	372
− 6	492	42	58	−13	410	−13	356
− 5	483	43	49	−12	389	−12	339
− 4	473	44	41	−11	368	−11	323
− 3	464	45	32	−10	347	−10	306
− 2	455	46	23	− 9	327	− 9	290
− 1	445	47	15	− 8	306	− 8	273
0	436	48	+0.0006	− 7	286	− 7	257
1	426	49	−0.0002	− 6	265	− 6	241
2	417	50	11	− 5	245	− 5	225
3	408	51	19	− 4	225	− 4	209
4	398	52	28	− 3	205	− 3	193
5	389	53	36	− 2	185	− 2	177
6	380	54	44	− 1	165	− 1	161
7	370	55	53	0	145	0	145
8	361	56	61	1	125	1	129
9	352	57	70	2	105	2	113
10	343	58	78	3	86	3	98
11	334	59	86	4	66	4	82
12	324	60	95	5	47	5	66
13	315	61	103	6	28	6	51
14	306	62	111	7	+0.0009	7	35
15	297	63	120	8	−0.0011	8	20
16	288	64	128	9	30	9	+0.0005
17	279	65	136	10	49	10	−0.0011
18	270	66	144	11	68	11	26
19	261	67	153	12	86	12	41
20	252	68	161	13	105	13	56
21	243	69	169	14	124	14	71
22	234	70	177	15	142	15	86
23	225	71	185	16	161	16	101
24	216	72	193	17	179	17	116
25	207	73	202	18	197	18	131
26	198	74	210	19	216	19	146
27	189	75	218	20	234	20	161
28	+0.0180	76	−0.0226	21	−0.0252	21	−0.0175

Arg. Stand des Thermometers im Freien.

Fahrenheit.			
	$\log\gamma$		$\log\gamma$
76°	−0.0226	83°	−0.0282
77	234	84	290
78	242	85	298
79	250	86	306
80	258	87	314
81	266	88	322
82	274	89	329
83	−0.0282	90	−0.0337

Réaumur.	
	$\log\gamma$
21°	−0.0252
22	270
23	288
24	306
25	324
30	411
35	−0.0498

Centesimal.	
	$\log\gamma$
21°	−0.0175
22	190
23	205
24	219
25	234
30	306
35	−0.0377

Die Strahlenbrechung der Distanz findet man aus den vorstehenden Tafeln auf folgende Weise.

1) Mit Zugrundelegung der scheinbaren Werthe von z, p, D, und Benutzung der ersten Abtheilung der ersten Tafel:

$$\log P = \log\alpha_0 + A_0(\log B + \log T) + \lambda_0\log\gamma + \log D$$
$$\log Q = \log P + 2\log\operatorname{tg} z + 2\log\cos p$$
$$\log R = \log\alpha'_0 + \log D + 2\log\sin p$$
$$dD = P + Q + R$$

2) Mit Zugrundelegung der wahren Werthe von z und p, aber des scheinbaren Werthes von D und Benutzung der zweiten Abtheilung der ersten Tafel:

$$\log r_0 = \log\alpha_0 + A_0(\log B + \log T) + \lambda_0\log\gamma$$
$$\log y = \log r_0 + 2\log\operatorname{tg} z + 2\log\cos p$$
$$x = r_0 + y$$
$$\log Q = \log D + \log x - \log(1-x)$$
$$\log R = \log\alpha'_0 + \log D + 2\log\sin p$$
$$dD = Q + R$$

Die Strahlenbrechung des Positionswinkels findet man in beiden Fällen, je nach Benutzung der ersten oder der zweiten Abtheilung der ersten Tafel auf folgende Weise:

$$\log H = 3.5363 + \log r_0 + 2\log\operatorname{tg} z + \log\sin p\cos p$$
$$\log K = 3.536 + \log\alpha'_0 + \log\sin p\cos p$$
$$dp = -H + K$$

Die Strahlenbrechung der Distanz erhält man durch diese Ausdrücke in Secunden, wenn man D in Secunden ausgedrückt substituirt, und die

des Positionswinkels jedenfalls in Minuten ausgedrückt; es sind jedoch bei der Berechnung der letzteren die algebraischen Vorzeichen von $\sin p$ und $\cos p$ zu beachten. Die Glieder R und K können gemeiniglich übergangen werden.

66.

Um die Genauigkeit der vorstehenden ersten Tafel durch ein Beispiel anschaulich zu machen, will ich zwei Punkte in einem und demselben Verticalkreise annehmen, die 30′ von einander entfernt sind, und deren scheinbare Zenithdistanzen 84° 30′ und 85° 0′ betragen, folglich $z = 84^\circ\,45'$, $D = 30'$ werden. Diese Lage der beiden Punkte bedingt bis auf sehr Weniges die grösste Strahlenbrechung, die überhaupt aus den vorstehenden Tafeln hervorgehen kann, und ist einer einfachen Prüfung fähig.

Es soll nun für diese beiden Punkte die Strahlenbrechung der Distanz in fünf verschiedenen Annahmen über den Stand der meteorologischen Instrumente berechnet werden, und zwar

1) für $\log B + \log T = 0$ $\log\gamma = 0$
2) für $\log B + \log T = +0.02160$, $\log\gamma = 0$
3) für $\log B + \log T = 0$ $\log\gamma = +0.06050$
4) für $\log B + \log T = +0.02160$, $\log\gamma = +0.06050$
5) für $\log B + \log T = -0.02160$, $\log\gamma = -0.06050$

welche nahe die grössten Werthe dieser Factoren sind, die vorkommen können.

Da nun die erste Abtheilung der obigen Tafel für $z = 84^\circ\,45'$

$$\log\alpha_0 = 6.3165, \qquad A_0 = 1.033, \qquad \lambda_0 = 1.296$$

giebt, und im gegenwärtigen Falle das zweite Glied der Strahlenbrechung der Distanz Null ist, so erhalten wir für diese fünf Fälle

$$\log\alpha_0 + A_0(\log B + \log T) + \lambda_0 \log\gamma =$$

1) 6.3165, und hiemit $dD = 44''.56$
2) 6.3388, $= 46.90$
3) 6.3949, $= 53.37$
4) 6.4172, $= 56.18$
5) 6.2158, $= 35.34$

Da im gegenwärtigen Falle die Strahlenbrechung der Distanz dem Unterschiede der Strahlenbrechungen in den zwei Endpunkten derselben gleich ist, so können die vorstehenden Resultate durch Berechnung dieser beiden Strahlenbrechungen geprüft werden. Die a. a. O. befindliche Besselsche Tafel I giebt zu dem Ende für $z = 84^\circ\,30'$

$$\log\alpha = 1.71749, \qquad A = 1.0110, \qquad \lambda = 1.1082$$

und hiemit erhält man

$$\log\alpha + A(\log B + \log T) + \lambda\log\gamma =$$

1)	1.71749 ,	Strahlenbrechung = 541″.89
2)	1.73933 ,	= 569.84
3)	1.78455 ,	= 632.37
4)	1.80639 ,	= 664.99
5)	1.62859 ,	= 441.58

Dieselbe Tafel giebt für $z = 85^\circ\,0'$

$$\log\alpha = 1.71020, \qquad A = 1.0127, \qquad \lambda = 1.1229$$

also

$$\log\alpha + A(\log B + \log T) + \lambda\log\gamma =$$

1)	1.71020 ,	Strahlenbrechung = 586″.47
2)	1.73207 ,	= 616.77
3)	1.77814 ,	= 685.79
4)	1.80001 ,	= 721.20
5)	1.62039 ,	= 476.91

und die Unterschiede dieser Strahlenbrechungen geben

dD = 44″.58 ,	Unterschiede gegen oben = − 0″.02
= 46.93 ,	= − 0.03
= 53.42 ,	= − 0.05
= 56.21 ,	= − 0.03
= 35.33 ,	= + 0.01

welches eine befriedigende Uebereinstimmung ist.

67.

Prüfen wir die zweite Abtheilung der obigen Tafel auf dieselbe Art. Seien wieder

$$z = 84^0\,45', \quad D = 30'$$

wo aber unter z die wahre Zenithdistanz verstanden werden muss; der leichteren Vergleichung wegen soll auch hier unter D die wahre Distanz verstanden werden, weshalb die Rechnung nach den obigen Vorschriften für die erste Abtheilung der Tafel durchzuführen ist. Die zweite Abtheilung der Tafel giebt nun

$$\log\alpha_0 = 6.2864\,, \quad A_0 = 0.964\,, \quad \lambda_0 = 1.218$$

also

$$\log\alpha_0 + A_0(\log B + \log T) + \lambda_0 \log\gamma =$$

1) 6.2864 , und hiemit $dD = 41''.58$
2) 6.3072 , $= 43.62$
3) 6.3601 , $= 49.26$
4) 6.3809 , $= 51.68$
5) 6.1919 , $= 33.45$

Die Besselsche Tafel II d. a. O. giebt für $z = 84^0\,30'$

$$\log\alpha' = 1.70782\,, \quad A' = 0.9888\,, \quad \lambda' = 1.0802$$

also

$$\log\alpha' + A'(\log B + \log T) + \lambda' \log\gamma =$$

1) 1.70782 , Strahlenbrechung $= 529''.95$
2) 1.72918 , $= 556.68$
3) 1.77317 , $= 616.01$
4) 1.79453 , $= 647.07$
5) 1.62111 , $= 434.04$

Dieselbe Tafel giebt für $z = 85^0\,0'$

$$\log\alpha' = 1.69902\,, \quad A' = 0.9870\,, \quad \lambda' = 1.0903$$

also

$$\log\alpha' + A'(\log B + \log T) + \lambda' \log\gamma =$$

1) 1.69902 , Strahlenbrechung $= 571''.57$
2) 1.72034 , $= 600.33$
3) 1.76498 , $= 665.32$
4) 1.78630 , $= 698.80$
5) 1.61174 , $= 467.51$

und die Unterschiede dieser Strahlenbrechungen geben

$dD = 41''.62$,	Unterschiede gegen oben	$= -0''.04$
$= 43.65$,		$= -0.03$
$= 49.31$,		$= -0.05$
$= 51.73$,		$= -0.05$
$= 33.47$,		$= -0.02$

welche auch befriedigend sind.

68.

Um die beiden Abtheilungen der obigen Tafel mit einander zu vergleichen, nehme ich wieder die scheinbaren Werthe

$$z = 84^\circ\,45', \qquad D = 30'$$

an. Hiemit giebt die Besselsche Tafel I

$$\log\alpha = 1.71403, \quad A = 1.0118, \quad \lambda = 1.1154$$

also

$$\log\alpha + A(\log B + \log T) + \lambda\log\gamma =$$

1) 1.71403 ,	Strahlenbrechung	$= 9'\,23''$
2) 1.73588 ,		$= 9\;52$
3) 1.78152 ,		$= 10\;58$
4) 1.80337 ,		$= 11\;32$
5) 1.62469 ,		$= 7\;39$

und die wahren Zenithdistanzen

$$\begin{aligned} z &= 84^\circ\,54'\,23'' \\ &= 84\;54\;52 \\ &= 84\;55\;58 \\ &= 84\;56\;32 \\ &= 84\;52\;39 \end{aligned}$$

Geht man hiemit in die zweite Abtheilung der obigen Tafel ein, so erhält man

$\log\alpha_0 = 6.2769,$	$= 6.2792,$	$= 6.2784,$	$= 6.2781,$	$= 6.2809$
$A_0 =$ ----	$= 0.962$,	$=$ ----	$= 0.962$,	$= 0.963$
$\lambda_0 =$ ----	$=$ ---- ,	$= 1.224$,	$= 1.224$,	$= 1.223$

und hiemit

$$\log \alpha_0 + A_0 (\log B + \log T) + \lambda_0 \log \gamma =$$

1)	6.2796 ,	$x = 0.0242$,	$dD = 44''.55$
2)	6.3000 ,	$= 0.0254$,	$= 46.90$
3)	6.3525 ,	$= 0.0289$,	$= 53.49$
4)	6.3730 ,	$= 0.0304$,	$= 56.37$
5)	6.1860 ,	$= 0.0193$,	$= 35.33$

Dieselben Strahlenbrechungen wurden aber im vorvor. Art. aus der ersten Abtheilung der obigen Tafel berechnet, und fanden sich

$dD = 44''.56$, Unterschiede gegen die vorstehenden	$= - 0''.02$
$= 46.90$	$= 0.00$
$= 53.37$	$= + 0.12$
$= 56.18$	$= + 0.19$
$= 35.34$	$= - 0.01$

Die grösseren Unterschiede, die hier zum Vorschein gekommen sind, rühren davon her, dass die Besselschen Tafeln I und II bei den grossen Zenithdistanzen nicht genau mit einander übereinstimmen, und namentlich der Thermometerexponent der Tafel II etwas zu gross zu sein scheint. Wir fanden im vor. Art. aus der Besselschen Tafel II für $z = 85^0\,0'$, und im vierten Falle die Strahlenbrechung $= 11'\,38''.80$, und es wird daher die dazu gehörige scheinbare Zenithdistanz

$$z = 84^0\,48'\,21''.20$$

Geht man hiemit in die Besselsche Tafel I ein, so erhält man

$$\log \alpha = 1.71321, \qquad A = 1.0120, \qquad \lambda = 1.1170$$

also im vierten Falle

$$\log \alpha + A (\log B + \log T) + \lambda \log \gamma = 1.80265$$

und die Strahlenbrechung $=$

$$11'\,38''.33$$

das ist, $0''.47$ kleiner als aus der Tafel II.

Ausserdem habe ich noch bemerkt, dass die Besselsche Tafel für $\log B$, in der Abtheilung, die das Meter zum Argument hat, mit den beiden anderen Abtheilungen nicht genau übereinstimmt, sondern dass alle Angaben der genannten Abtheilung der Verbesserung $= - 0.00013$ bedürfen, um die Uebereinstimmung herbei zu führen. Diese Verbesserung habe ich in der obigen Tafel für $\log B$ schon angebracht.

Zusatz 3.

Ableitung einiger neuen Ausdrücke, um photographische Aufnahmen eines Venusvorüberganges vor der Sonne zur Bestimmung der Sonnenparallaxe zu verwenden.

69.

Nehmen wir die oben zu Ende des Art. 14 erhaltenen Gleichungen vor, substituiren darin mit Uebergehung des immer unmerklichen Gliedes $(r_{,}+r')\varrho_0 \sin H$ (Art. 17)

$$u = m\frac{r_{,}r'}{r}\operatorname{tg} b\,, \quad \tau = t-\lambda$$
$$l \sin L = \sin K$$
$$l \cos L = d \cos K$$

dann werden diese Gleichungen

$$\frac{r_{,}r'}{r}\operatorname{tg} b \sin\theta + \frac{\gamma}{m}\cos N' - (\tau-\mu)\frac{n}{15\,m}\sin N' = -\varrho_0 l \cos H \sin L$$
$$\frac{r_{,}r'}{r}\operatorname{tg} b \cos\theta - \frac{\gamma}{m}\sin N' - (\tau-\mu)\frac{n}{15\,m}\cos N' = -\varrho_0 l \cos H \cos L$$

Seien für einen zweiten Beobachtungsort b', θ', $N_{,}'$, τ', l', H', L' dasselbe was b, θ, N', τ, l, H, L für den ersten bedeuten, dann erhalten wir für diesen Ort, den vorstehenden Gleichungen analog, die folgenden.

$$\frac{r_{,}r'}{r}\operatorname{tg} b' \sin\theta' + \frac{\gamma}{m}\cos N_{,}' - (\tau'-\mu)\frac{n}{15\,m}\sin N_{,}' = -\varrho_0 l' \cos H' \sin L'$$
$$\frac{r_{,}r'}{r}\operatorname{tg} b' \cos\theta' - \frac{\gamma}{m}\sin N_{,}' - (\tau'-\mu)\frac{n}{15\,m}\cos N_{,}' = -\varrho_0 l' \cos H' \cos L'$$

70.

Die vorstehenden vier Gleichungen sind mehr wie hinreichend zur Lösung der Aufgabe, und man kann daher eine grosse Anzahl von Lösungen daraus entwickeln. Auch selbst in dem Falle, dass man die Lösungen so einrichtet, dass sie von den tabularischen Elementen möglichst unabhängig sind, lassen sich mehrere Lösungen ableiten; aber wenn man zugleich den Längenunterschied der beiden Beobachtungsörter eliminiren will, dann ist nur Eine Lösung möglich.

Um den Unterschied zwischen $N_{,}'$ und N' zu berücksichtigen, setze ich

$$N_0' = \tfrac{1}{2}(N_{,}' + N') \ , \qquad \tau_0 = \tfrac{1}{2}(\tau' + \tau)$$

woraus

$$N' = N_0' + \tfrac{n_0}{15}(\tau - \tau_0)$$

$$N_{,}' = N_0' + \tfrac{n_0}{15}(\tau' - \tau_0)$$

entstehen, wenn n_0 die stündliche Aenderung von N' bezeichnet. Die Substitution dieser Werthe von N' und $N_{,}'$ in die Gleichungen des vor. Art. giebt,

$$\tfrac{r,r'}{r}\operatorname{tg} b \sin\theta + \tfrac{\gamma}{m}\cos N_0' - (\tau-\mu)\tfrac{n}{15\,m}\sin N_0'$$
$$-(\tau-\tau_0)\tfrac{\gamma n_0}{15\,m}\sin N_0' - (\tau-\tau_0)(\tau-\mu)\tfrac{nn_0}{(15)^2 m}\cos N_0' = -\varrho_0 l\cos H\sin L$$

$$\tfrac{r,r'}{r}\operatorname{tg} b\cos\theta - \tfrac{\gamma}{m}\sin N_0' - (\tau-\mu)\tfrac{n}{15\,m}\cos N_0'$$
$$-(\tau-\tau_0)\tfrac{\gamma n_0}{15\,m}\cos N_0' + (\tau-\tau_0)(\tau-\mu)\tfrac{nn_0}{(15)^2 m}\sin N_0' = -\varrho_0 l\cos H\cos L$$

$$\tfrac{r,r'}{r}\operatorname{tg} b'\sin\theta' + \tfrac{\gamma}{m}\cos N_0' - (\tau'-\mu)\tfrac{n}{15\,m}\sin N_0'$$
$$-(\tau'-\tau_0)\tfrac{\gamma n_0}{15\,m}\cos N_0' - (\tau'-\tau_0)(\tau'-\mu)\tfrac{nn_0}{(15)^2 m}\sin N_0' = -\varrho_0 l'\cos H'\cos L'$$

$$\tfrac{r,r'}{r}\operatorname{tg} b'\cos\theta' - \tfrac{\gamma}{m}\sin N_0' - (\tau'-\mu)\tfrac{n}{15\,m}\cos N_0'$$
$$-(\tau'-\tau_0)\tfrac{\gamma n_0}{15\,m}\sin N_0' + (\tau'-\tau_0)(\tau'-\mu)\tfrac{nn_0}{(15)^2 m}\cos N_0' = -\varrho_0 l'\cos H'\sin L'$$

71.

Multiplicirt man von den eben erhaltenen Gleichungen die erste mit $\sin N_0'$, die zweite mit $\cos N_0'$ und addirt die Producte, so erhält man

$$\tfrac{r,r'}{r}\operatorname{tg} b\cos(N_0'-\theta) - (\tau-\mu)\tfrac{n}{15\,m} - (\tau-\tau_0)\tfrac{\gamma n_0}{15\,m} =$$
$$-\varrho_0 l\cos H\cos(N_0'-L)$$

die dritte und die vierte Gleichung geben eben so

$$\tfrac{r,r'}{r}\operatorname{tg} b'\cos(N_0'-\theta') - (\tau'-\mu)\tfrac{n}{15\,m} - (\tau'-\tau_0)\tfrac{\gamma n_0}{15\,m} =$$
$$-\varrho_0 l'\cos H'\cos(N_0'-L')$$

und aus dem Unterschiede dieser beiden Gleichungen geht

$$\varrho_0 = \frac{\tfrac{r,r'}{r}\{\operatorname{tg} b\cos(N_0'-\theta) - \operatorname{tg} b'\cos(N_0'-\theta')\} + \tfrac{\tau'-\tau}{15}\left(\tfrac{n+\gamma n_0}{m}\right)}{l'\cos H'\cos W_0' - l\cos H\cos W_0}$$

hervor, wenn der oben (Art. 15) eingeführten Bezeichnung analog

$$W_0 = N_0' - L\,, \qquad W_0' = N_0' - L'$$

gesetzt werden. Dieser Ausdruck für ϱ_0 kann als unabhängig von den Tafelfehlern betrachtet werden. Zwar kommen N_0', n, γ darin vor, allein wir haben oben (Art. 33) gesehen, dass unter der gewiss zulässigen Annahme, dass die Tafelfehler während des Zeitraums des Vorüberganges der Venus sich nicht ändern, N' und n von diesen Fehlern unabhängig sind. Freilich ist γ von diesen Fehlern abhängig, aber mit der sehr kleinen Grösse n_0 multiplicirt, und das Product γn_0 äussert so geringe Wirkung, dass der Tafelfehler in γ nicht in Betracht kommen kann. Ein Fehler hingegen in dem Längenunterschied der beiden Beobachtungsörter ist nicht ohne merkliche Einwirkung, da das Glied, welches das Product $(\tau' - \tau)n$ enthält, schon für kleine Werthe von $\tau' - \tau$ ohngeachtet des Divisors $15m$ merkliche Werthe annimmt.

Um den Nenner des vorstehenden Ausdrucks möglichst gross zu erhalten, dürfen an beiden Beobachtungsörtern die Sonnenhöhen nicht gross sein, und es dürfen ausserdem von den beiden Bögen W_0 und W_0' der eine sich nicht weit von 0, der andere sich nicht weit von 180^0 entfernen.*) In der Regel wird der eine Beobachtungsort auf der nördlichen, und der andere auf der südlichen Halbkugel der Erde liegen. Zur Auswahl dieser Oerter kann man, nach geringer Aenderung der Formeln für die Grenzcurven, die Curven berechnen, auf welchen $W = 0$, oder $= 180^0$ ist, und auf den Planigloben aufzeichnen.

72.

Aus den beiden ersten Gleichungen des vor. Art. kann man durch Addition einen anderen Ausdruck für ϱ_0 erhalten. Sie geben auf diese Weise

$$\varrho_0 = -\frac{\frac{r_1 r'}{r}\left\{\operatorname{tg} b \cos(N_0' - \theta) + \operatorname{tg} b' \cos(N_0' - \theta')\right\} - 2\,\frac{\tau_0 - \mu}{15}\cdot\frac{n}{m}}{l' \cos H' \cos W_0' + l \cos H \cos W_0}$$

zu welchem Ausdruck aber bemerkt werden muss, dass er zufolge des Factors $\tau_0 - \mu$ im letzten Gliede des Zählers sowohl von den Tafelfehlern

*) Eine Entfernung von 20^0 von diesen Werthen hat wenig zu bedeuten, da $\cos 20^0 = 0.94$ ist, also sich wenig von Eins entfernt. Ja man kann im Nothfall noch weiter gehen. Diese Bemerkung gilt auch für die folgenden Ausdrücke.

wie von den Längenfehlern der Beobachtungsörter beeinflusst werden kann; er ist also minder vortheilhaft wie der Ausdruck des vor. Art. Er verlangt übrigens, dass beides W_0' und W_0 sich entweder nicht weit von 0, oder von 180° entfernen, und die beiden Beobachtungsörter werden daher auf derselben Halbkugel der Erde liegen müssen.

73.

Um noch einen andern Ausdruck für ϱ_0 abzuleiten, multiplicire man die erste Gleichung des Art. 70 mit $\cos N_0'$, die zweite mit $\sin N_0'$, und subtrahire die Producte. Hiemit entsteht

$$\frac{r_1 r'}{r} \operatorname{tg} b \sin(N_0' - \theta) - \frac{\gamma}{m} + (\tau - \tau_0)(\tau - \mu)\frac{nn_0}{(15)^2 m} = -\varrho_0 l \cos H \sin(N_0' - L)$$

die dritte und die vierte Gleichung geben auf dieselbe Weise

$$\frac{r_1 r'}{r} \operatorname{tg} b' \sin(N_0' - \theta') - \frac{\gamma}{m} + (\tau' - \tau_0)(\tau' - \mu)\frac{nn_0}{(15)^2 m} = -\varrho_0 l' \cos H' \sin(N_0' - L')$$

aus deren Unterschied man erhält

$$\varrho_0 = \frac{\frac{r_1 r'}{r}\left\{\operatorname{tg} b \sin(N_0' - \theta) - \operatorname{tg} b' \sin(N_0' - \theta')\right\} - \frac{\tau' - \tau}{15} \cdot \frac{\tau_0 - \mu}{15} \cdot \frac{nn_0}{m}}{l' \cos H' \sin W_0' - l \cos H \sin W_0}$$

welcher Ausdruck sowohl von den möglichen Tafelfehlern, wie von den Längenfehlern der beiden Beobachtungsörter als unabhängig betrachtet werden kann, da wegen der Kleinheit des Products nn_0 das letzte Glied des Zählers immer sehr klein ist*); dieser Ausdruck ist also vortheilhafter als die beiden vorhergehenden, und überhaupt der vortheilhafteste, welcher sich auf diese Weise entwickeln lässt. Es dürfen wieder hier die Sonnenhöhen nicht gross sein, und von den beiden Bögen W_0 und W_0' dürfen der eine sich nicht viel von 90°, und der andere sich nicht viel von 270° entfernen. Man kann wieder auf die oben angedeutete Art die betreffenden Curven berechnen, und auf den Planigloben aufzeichnen.

---

*) Im Venusvorübergange des Jahres 1874 ist

$$\frac{nn_0}{m} = -0''.0436$$

und es müssten daher der Fehler, sowohl von $\frac{\tau' - \tau}{15}$ wie der von $\frac{\tau_0 - \mu}{15}$ eine volle Stunde betragen, um einen Fehler von 0″.04 in diesem Gliede hervorzubringen. Solche Fehler sind aber undenkbar.

74.

Die beiden folgenden, im Vorhergehenden schon erhaltenen Gleichungen

$$\frac{r,r'}{r}\left\{\operatorname{tg} b\cos(N_0'-\theta)-\operatorname{tg} b'\cos(N_0'-\theta')\right\}+\frac{\tau'-\tau}{15}\left(\frac{n+\gamma n_0}{m}\right)=$$
$$\varrho_0\{l'\cos H'\cos W_0'-l\cos H\cos W_0\}$$

$$\frac{r,r'}{r}\left\{\operatorname{tg} b\sin(N_0'-\theta)-\operatorname{tg} b'\sin(N_0'-\theta')\right\}-\frac{\tau'-\tau}{15}\cdot\frac{\tau_0-\mu}{15}\cdot\frac{nn_0}{m}=$$
$$\varrho_0\{l'\cos H'\sin W_0'-l\cos H\sin W_0\}$$

geben zu noch einem anderen Ausdruck für ϱ_0 Veranlassung. Erhebt man jede derselben ins Quadrat, und zieht von der Summe der Quadrate die Wurzel aus, so bekommt man den Ausdruck

$$\varrho_0=\frac{\sqrt{\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{r,r'}{r}\right)^2\Delta^2+\left(\frac{\tau'-\tau}{15}\right)^2\left(\frac{n+\gamma n_0}{m}\right)^2\\ +2\frac{\tau-\tau}{15}\cdot\frac{r,r'}{r}\left(\frac{n+\gamma n_0}{m}\right)\left(\operatorname{tg} b\cos(N_0'-\theta)-\operatorname{tg} b'\cos(N_0'-\theta')\right)\\ -2\frac{\tau'-\tau}{15}\cdot\frac{\tau_0-\mu}{15}\cdot\frac{r,r'}{r}\cdot\frac{nn_0}{m}\left(\operatorname{tg} b\sin(N_0'-\theta)-\operatorname{tg} b'\sin(N_0'-\theta)\right)\end{array}\right\}}}{\sqrt{\{l^2\cos^2 H+l'^2\cos^2 H'-2ll'\cos H\cos H'\cos(W_0'-W_0)\}}}$$

in welchem zur Abkürzung

$$\Delta^2=\operatorname{tg}^2 b+\operatorname{tg}^2 b'-2\operatorname{tg} b\operatorname{tg} b'\cos(\theta-\theta')$$

gesetzt worden ist, und folglich Δ die Entfernung der Mittelpunkte der Venus von einander auf den beiden Photographien ist.

Dieser Ausdruck für ϱ_0 kann auch als von den Tafelfehlern unabhängig betrachtet werden, da n und N_0' davon unabhängig sind, und γ und μ mit dem sehr kleinen Factor n_0 multiplicirt sind. Aber der Fehler des Längenunterschiedes der beiden Beobachtungsörter, welcher in $\tau'-\tau$ enthalten ist, übt merklichen Einfluss auf diese Bestimmung von ϱ_0 aus. Ueberhaupt wachsen, wenn $\tau'-\tau$ nicht ganz klein ist, das mit $(\tau'-\tau)^2$, und das erste der beiden mit $(\tau'-\tau)$ multiplicirten Glieder so sehr an, dass sie grösser werden können als das mit Δ^2 multiplicirte Glied, aber sie haben in diesem Falle das entgegengesetzte Zeichen, ihre Summe wird negativ und immer kleiner als das erste Glied des Zählers. Dieser Ausdruck ist zusammengesetzter, und minder vortheilhaft als der des vor. Art.

Bei der Anwendung desselben dürfen wieder, wie immer, auf beiden Beobachtungsörtern die Sonnenhöhen nicht zu gross sein, und es darf sich ausserdem der Bogen $W_0'-W_0$, oder der Unterschied der

beiden parallactischen Winkel, nicht weit von 180° entfernen. Man kann unter jedem Azimuth in Bezug auf die Oerter, über welchen die Sonne im Zenith culminirt, Oerter angeben, die diesen Bedingungen gnügen.

75.

Wenn $\tau' = \tau$ ist, oder wenn beide Photographien gleichzeitig aufgenommen worden sind, welche Bedingung aber unter andern eine genaue Kenntniss des Längenunterschiedes der beiden Beobachtungsörter voraussetzt, dann vereinfacht sich der Ausdruck des vor. Art. beträchtlich, und geht in den folgenden über,

$$\varrho_0 = \frac{r_1 r'}{r} \cdot \frac{\Delta}{\sqrt{\{l^2 \cos^2 H + l'^2 \cos^2 H' - 2\, ll' \cos H \cos H' \cos (W_0' - W_0)\}}}$$

Dieser Ausdruck ist, wenn man von der Abplattung der Erde absieht, mit dem Ausdruck identisch, den der Herr Geheime Canzelleirath Paschen ganz vor Kurzem veröffentlicht und empfohlen, aber auf ganz andere Weise abgeleitet hat.

76.

Die hier entwickelten Ausdrücke weichen von allen bisherigen darin ab, dass sie ausser der Entfernung der Mittelpunkte der Sonne und der Venus von einander, auch die Beobachtung des Positionswinkels der Venus auf jeder der beiden Stationen verlangen, welche letztere Beobachtungen man bisher aus den Ausdrücken sorgfältig eliminirt hat. Man darf, dieser neu hinzugekommenen Forderung wegen, diese Ausdrücke nicht unbeachtet lassen, sondern muss sich bemühen, sie auf ihren richtigen Platz zu stellen.

Um die Abmessung des Positionswinkels auf den Photographien zu ermöglichen, kann man, wie der eben genannte Verfasser vorschlägt, im Brennpunkt des Fernrohrs des parallactisch aufgestellten Instruments, welches zur Aufnahme der Photographien dient, einen Spinnefaden einziehen, welcher in der Ebene des Abweichungskreises liegt, sich auf der Photographie mit abbilden wird, und als Grundlinie für die Messung des Positionswinkels dienen soll. Mit welchem Grade der Genauigkeit man auf diese Weise den Positionswinkel erhalten kann, bin ich gegenwärtig nicht im Stande anzugeben, da ich keine Gelegenheit gehabt

habe Versuche darüber anzustellen, mir auch derartige Versuche von Andern nicht bekannt sind.

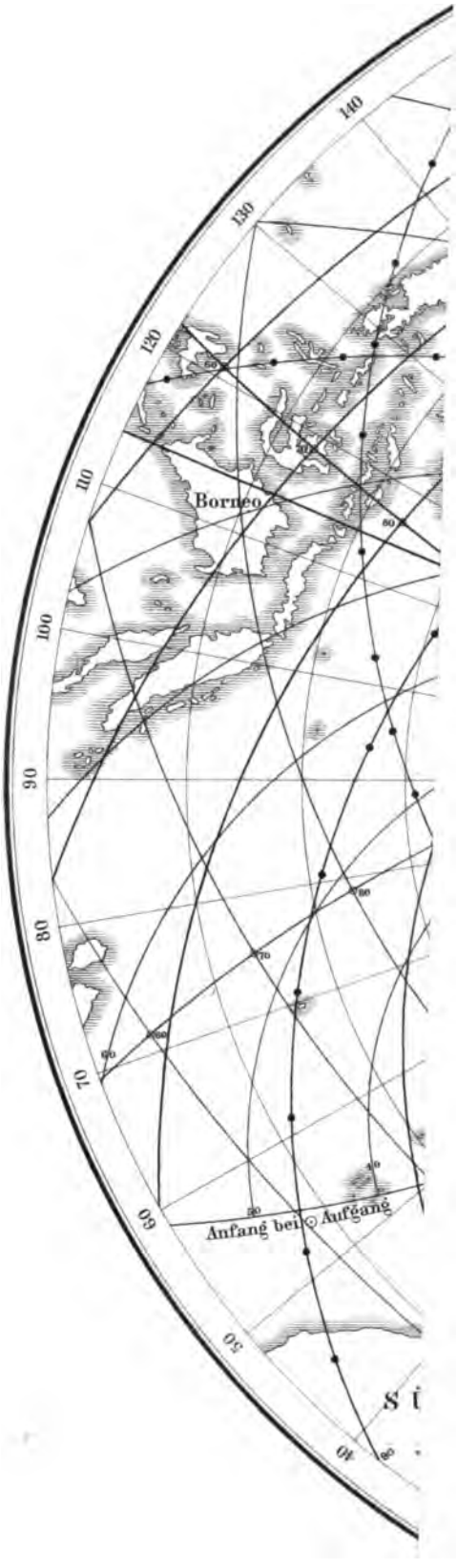
Ich habe zwar aus Amerika Photographien der vorjährigen Sonnenfinsterniss erhalten, auf welchen solche Fäden mit abgebildet sind, allein diese Photographien sind zu klein, um hinreichend genaue Messungen darauf vornehmen zu können. Selbst wenn sie hiefür hinreichende Grösse hätten, würde es unter anderen darauf ankommen, mit welcher Genauigkeit das angewandte Instrument den Abweichungskreis hat angeben können. Schliesslich bemerke ich noch, dass wenn die Instrumente, deren man sich zur directen Messung der Ränderentfernungen bedient, so eingerichtet sind, dass sie den Positionswinkel mit ausreichender Genauigkeit geben, die vorstehenden Ausdrücke selbstverständlich auch auf diese Beobachtungen angewandt werden können.

Druckfehler.

S. 465 Z. 5 v. u. lies: a' statt a

S. 470 Z. 4 v. u. lies: Grössen statt Grösse

140
130
120
110
100
90
80
70
60
50
40
Borneo
Anfang der ☉ Aufgänge


140
130
120
110
100
90
80
70
60
50
40
Borneo
Anfang bei ☉ Aufgang

ZUR

EXPERIMENTALEN AESTHETIK

VON

GUSTAV THEODOR FECHNER.

ERSTER THEIL.

Vorerinnerung.

Der vorliegende erste Theil der hier zu bietenden Untersuchungen wird ausser allgemeinen Gesichtspuncten, historischen und kritischen Erörterungen, nur erst die Darlegung der Methoden der Untersuchung enthalten; indess die zur Verwerthung der Versuche nöthigen Rechnungsregeln mit den Versuchen selbst dem folgenden Theile vorbehalten bleiben. Diese Versuche sind in vieler Beziehung noch zu vervollständigen und gern würde ich die Veröffentlichung des Ganzen bis zu dieser Vervollständigung verschoben haben, um nicht wiederholt auf die Zukunft desshalb verweisen zu müssen, da manche, schon hier zu berührende wichtige Puncte, sowohl was Methoden als Resultate anlangt, noch nicht hinreichend erledigt sind, wenn nicht der Wunsch, durch Veröffentlichung dieses ersten Theiles als Festschrift einen Beitrag zu einer, für die königliche Gesellschaft wichtigen, Feier zu geben, mit dem Bedürfnisse und dem Wunsche zusammengetroffen wäre, dadurch die Fortsetzung der Versuche selbst zu fördern. Jene Feier betrifft das fünfzigjährige Ordinariatsjubiläum des hochverehrten Seniors der Leipziger Universität und Secretärs der mathematisch-physischen Classe der königlichen Gesellschaft, Professors Ernst Heinrich Weber (am 8. Januar 1871). Abgesehen von seinen anderweiten hohen Verdiensten war derselbe seit Galilei's Zeiten wohl der erste, welcher (durch seine bahnbrechenden psychophysischen Versuche) das Gebiet exacter Untersuchung über scheinbare Gränzen desselben hinaus erweitert hat, und zwar nach einer Richtung, in welche nach der im folgenden Eingange gemachten Bemerkung die jetzige Untersuchung aus gewissem Gesichtspuncte

hineintritt, worin die Darbietung der Schrift bei dieser Gelegenheit ein Motiv finden konnte. Die Hoffnung und das Bedürfniss aber, durch diese Veröffentlichung des Anfanges der Untersuchung den Fortschritt derselben selbst zu fördern, ruht darin, dass dadurch eine grössere Geneigtheit für Betheiligung an den dazu nöthigen Versuchen hervorgerufen werden könnte, als ich bei der Fremdartigkeit der Gesichtspuncte, die der Untersuchung unterliegen, bisher zu erzielen vermochte.

Jedenfalls hat diese Untersuchung keinen Vorwurf Seitens des Sprüchwortes: »Nonum prematur in annum« zu fürchten, da sie schon im Jahre 1861 begonnen, und, freilich mit langen Unterbrechungen und oft ziemlich schläfrigem Betriebe, bis jetzt fortgesetzt worden ist, wobei ich einer Unterstützung Seitens der Herrn Grabau und Dr. Nies dankbar zu gedenken habe; nur dass theils die mangelnde Gelegenheit, eine hinreichende Zahl von Versuchssubjecten dazu zusammenzubringen, theils die Nöthigung, frühere, zum Theil schon längere Zeit fortgesetzte, Versuchsreihen wegen unzweckmässiger Einrichtung wieder fallen zu lassen, wie diess in einem ganz neuen Versuchsfelde wohl erklärlich ist, keinen raschen und ergiebigen Fortschritt gestattete und für die Entscheidung mancher erst spät auftretenden Fragen noch kein hinreichendes Versuchsmaterial hat gewinnen lassen. Eine vorläufige Anzeige des allgemeinen Gesichtspunctes und Hauptresultates der Untersuchung ist gelegentlich einer dahineintretenden Specialfrage im Naumann-Weigelschen Archive für zeichnende Künste (1865, XI) gegeben.

Nach Allem meine ich nicht, wenn ich im folgenden Eingange die Anfänge einer exacten Behandlung der Aesthetik in Aussicht stelle, dass die Exactheit der Resultate in dieser Lehre überhaupt so weit getrieben werden könne, als in Astronomie und Physik; ich meine aber, dass durch Anwendung und weitere Ausbildung der hier auseinanderzusetzenden Methoden der Genauigkeit und Sicherheit so nahe wie möglich gekommen werden könne. Es giebt überhaupt in dieser Hinsicht Unterschiede zwischen verschiedenen Lehren und zwischen verschiedenen Aufgaben jeder einzelnen Lehre. Auch die Physiologie kann hinsichtlich der Exactheit ihrer Resultate allgemeingesprochen nicht mit Astronomie, Physik und Chemie wetteifern, weil sie die Bedingungen, die es zu untersuchen gilt, nicht

eben so isolirt vorfindet oder eben so leicht isoliren kann. Und diese Schwierigkeit der Isolirung trifft auch unsere Lehre. Aber man thut in dieser Hinsicht, was man kann, und erreicht damit doch mehr Sicherheit im Allgemeinen, als wenn man sich überhaupt nur an allgemeine Aperçus hält oder aus complicirten Bedingungen einfache Schlüsse zieht, und kann selbst über viele Specialpuncte mit Sicherheit entscheiden.

I. Eingang.

Unstreitig kann es nur erwünscht erscheinen, wenn für ein Gebiet, was sich bisher einer exacten Untersuchung zu entziehen schien, Angriffspuncte und Anfänge einer solchen gefunden werden. Aus diesem Gesichtspuncte mag das Folgende beurtheilt werden, was sich auf eine Lehre bezieht, welche bisher fast blos eine Sache philosophischer Speculation und künstlerischer Aperçus war, d. i. die Aesthetik; indem hier Seiten und Wege derselben aufgesucht sind, wodurch sie ins Bereich des Experimentes, des Masses und der Rechnung tritt. Insofern diess aber der Fall ist, kann sie als ein Zweig der äussern Psychophysik gelten, die sich nach dem von mir aufgestellten Begriffe derselben, welchen ich wohl als acceptirt ansehen darf, mit den Massbeziehungen zwischen Reiz und Empfindung oder allgemeiner zwischen äusseren körperlichen Anregungen und innern psychischen Folgen zu beschäftigen hat. Denn auch die Lust und Unlust, die man bei der Wahrnehmung eines äussern Gegenstandes empfindet, d. i. das Gefallen und Missfallen daran, womit die Aesthetik zu thun hat, tritt unter diesen Gesichtspunct. Ein triftiger Weg der Untersuchung hat aber in diesem wie in jedem Felde mit den elementarsten Verhältnissen zu beginnen, und so macht auch unsere Untersuchung nicht im Entferntesten den Anspruch, Zielpuncte der Aesthetik festzustellen, sondern nur Elemente dazu beizutragen. Sie ist noch unvollkommen und unvollständig, enthält aber, wie ich glaube, den Keim zu fruchtbarer Fortentwicklung, und mehr wird man von einem Anfange nicht verlangen können.

Die Frage, die hier zunächst in Angriff genommen werden soll, ist die, ob gewisse Dimensions- und Abtheilungsverhältnisse der Gegenstände einen Vorzug der Wohlgefälligkeit vor andern haben, und im Fall der Bejahung, welche es sind. Nun sind die Formen der meisten Gegenstände durch Idee, Zweck, Bedeutung derselben bedingt oder doch mitbedingt; jede Form kann durch ihre Angemessenheit dazu gefallen, jede durch ihre Unangemessenheit dazu missfallen, Ersteres namentlich, wenn der Zweck, die Bedeutung des Gegenstandes selbst uns zusagen, indem sich das Wohlgefallen daran unwillkührlich auf die Form des Gegenstandes überträgt. Da nun die Zwecke und Bedeutungen der Gegenstände die allerverschiedensten sind, so können auch die allerverschiedensten Formen, je nachdem sie dazu passen oder nicht passen, wohlgefällig oder missfällig werden, und erscheint hienach unsere Aufgabe als eine ganz unbestimmte. Aber es fragt sich, ob die Angemessenheit oder Unangemessenheit einer Form zu etwas, was über die Form an sich hinausliegt, der einzige Grund des Gefallens oder Missfallens daran ist, nicht in den Formverhältnissen an sich selbst Bedingungen der Wohlgefälligkeit und Missfälligkeit liegen, welche bei den Verwendungen und im ästhetischen Urtheil Mitrücksicht erfodern. Mag man es nun auch bei den Verwendungen vor Allem als Regel setzen, der Angemessenheit Rechnung zu tragen, so lässt aber diese sehr oft noch die Wahl zwischen verschiedenen Dimensions- und Abtheilungsverhältnissen frei, und sollte es also überhaupt gewisse Verhältnisse geben, die an sich wohlgefälliger sind, als andere, so könnten sie in solchen Fällen praktisch bevorzugt und bei ästhetischer Beurtheilung ein Grund der Wohlgefälligkeit darin gefunden werden; wo aber Zweck oder Bedeutung bestimmte Foderungen an die Form stellen, könnte die Wohlgefälligkeit wachsen, wenn ein an sich wohlgefälliges Verhältniss das passende ist und einen Abzug erfahren, wenn es ein an sich ungefälliges ist. Gelegenheiten aber, unsere Frage aus diesen Gesichtspuncten zu erheben, bieten sich in Fülle dar. Z. B. es gilt, ein Haus zu bauen: welches Verhältniss wird man seiner Breite zu seiner Höhe und der Mauerhöhe zur Dachhöhe zu geben haben, damit es sich architektonisch gut ausnehme? Nirgends häufiger spricht man ja von schönen Verhältnissen als in der Architektur, aber welches sind sie? Welche Höhe hat man einer

Statue im Verhältniss zu ihrem Postament zu geben? wie hoch den Querbalken eines Schmuckkreuzes zu stellen, wie lang ihn im Verhältniss zum Längsbalken zu machen? u. s. w. Jeder fühlt in der unmittelbaren Anschauung, dass es hier überall ein Zuviel und ein Zuwenig giebt; aber welches ist die rechte Mitte? Giebt es überhaupt allgemein gültige Bestimmungen in dieser Beziehung? Insofern jede Form überhaupt ausser von den Verhältnissen der Geradlinigkeit, Ebenheit, Eckigkeit, Krümmung ihres Umrisses oder ihrer Oberfläche durch die Verhältnisse ihrer Dimensionen und Abtheilungen als bestimmt angesehen werden kann, gewinnt auch unsere Frage in allgemeinster Fassung die allgemeinste Bedeutung, nur dass es bemerktermassen gilt, zuerst die einfachsten Fälle vorzunehmen.

Dabei bleibt zuzugestehen, dass sie für die höhere Aesthetik insofern nur ein untergeordnetes Interesse hat, als die Schönheit aus höherem Gesichtspunct immer an der Erfüllung von Foderungen hängt, welche über den Gesichtspunct einer Formwohlgefälligkeit an sich weit hinausgreifen. Aber denken wir an das Gedicht, dessen höhere Schönheit auch an solchen Foderungen hängt; doch trägt der Wohllaut des Reimes und Versmasses wesentlich zur vollen Schönheit des Gedichtes bei, ja mehr bei, als man nach der Wirkung für sich (bei einem Gedichte in fremder Sprache) vermuthen sollte, indem nach einem bisher freilich in keinem Lehrbuch der Aesthetik zu findenden, doch von uns mehrfach zu erwähnenden, ästhetischen Principe, welches ich das ästhetische Hülfsprincip nenne, der niedere und höhere Reiz sich bei widerspruchslosem Zusammentreffen wechselseits steigern; oder denken wir an die Musik, deren höhere Schönheit in Melodie und Harmonie ruht, doch tragen die untergeordneten Momente, Wohllaut der einzelnen Töne und Tact, die für sich (bei gleichartigen Tönen) nicht viel sagen wollen, zur vollen Schönheit einer Musik nach demselben Principe viel bei. Also werden auch an sich wohlgefällige Dimensions- und Abtheilungsverhältnisse, giebt es anders solche, unstreitig zwar nicht reichen, ohne Zutritt höherer Factoren höhere Schönheit zu erzeugen, doch aber im Zusammentreffen mit solchen, als Basis der höheren Beziehungen selbst, nach jenem Principe wichtigen Antheil an der vollen Schönheit gewinnen können. Um so mehr wird ein Vortheil davon bei Gegenständen zu erwarten sein, die keine höhere Bedeutung überhaupt beanspruchen,

die man doch aber auch wohlgefällig herzustellen wünscht, als namentlich den Werken der sog. Tektonik, d. i. Kunst der Gefässe, Geräthe, Möbel, Waffen, Kleider, Teppiche, Schmucksachen u. dgl. bis in die allerdings auch höherer ideeller Bezüge nicht ermangelnde Architektur hinein,*) endlich in der Ornamentik.

Insofern der Eindruck, welchen Formen, Farben, Töne, so wie die Verhältnisse von Formen, Farben, Tönen durch ihre eigene Beschaffenheit machen, von dem Eindruck, den sie als Träger gewisser Bedeutungen, im Dienste gewisser Zwecke oder Ideen machen, jedenfalls zu unterscheiden ist, nenne ich der Kürze halber ersteren den directen, letzteren den associativen Eindruck, oder, insofern beide zu einem einheitlichen Eindruck verschmelzen, ersteren den directen, letzteren den associativen Factor des Eindrucks; und spreche, wo ein Mitspiel des letztern zum erstern in Betracht kommt, von einer associativen Mitbestimmung desselben. Man bringt sich nämlich leicht zum Bewusstsein, dass Bedeutung, Zweck, Idee, nicht an sich selbst aus den Formen heraus sprechen und wirken, sondern nach Gesetzen der Vorstellungs-Association von Innen daran angeknüpft werden. Die Bedeutung der Formen will so gut erlernt sein, als die der Worte; brächten sie ihre Bedeutung von selbst dem Geiste entgegen, so bedürfte es des Erlernens nicht für den nur eben operirten Blindgebornen; aber erst nach wiederholter Erfahrung über den Zusammenhang der Formen mit gewissen Bedeutungen oder Zwecken knüpft sich allmälig im Geiste eins an das andere. Unsere Aufgabe nun ist hier nur, zu ermitteln, was die einfachsten Formverhältnisse abgesehen von associativer Mitbestimmung in ästhetischer Beziehung wirken; wozu es Mittel zu finden gilt, sie von dieser Mitbestimmung zu emancipiren oder dieselbe zu compensiren. Der associative Einfluss wird dann seinerseits in möglichster Abstraction vom directen zu untersuchen, und endlich die Untersuchung auf die

*) Böttger, der meines Wissens den Ausdruck Tektonik zuerst in seiner »Tektonik der Hellenen« gebraucht hat, rechnet die Architektur selbst mit zur Tektonik; aber in einem engeren Sinne setzt man auch wohl die Architektur als höhere Kunst der Tektonik als der Gesammtheit der obgenannten, wesentlich auf gleichen Principien beruhenden, doch niedern, Künste gegenüber, welchem Gebrauch ich mich hier anschliesse, weil das Bedürfniss dieser Unterscheidung aus gewissem Gesichtspuncte wirklich vorliegt.

Verhältnisse ihres Zusammentreffens, wonach beide einstimmig oder in Conflict wirken können, zu richten sein; wir beschäftigen uns aber hier nur mit der ersten dieser drei Aufgaben.

Welcher Art und welchen Ursprungs auch der ästhetische Eindruck einer Form sei, so kann er durch die Zusammensetzung oder Zusammenstellung mit andern gleichen oder verschiedenen Formen eine Abänderung erleiden, was ich den combinatorischen Einfluss nenne. Derselbe kann direct oder associativ sein; ersteres, wenn durch die Verhältnisse der Zusammensetzung oder Zusammenstellung neue Bedingungen der Wohlgefälligkeit oder Missfälligkeit an sich erwachsen, wie z. B. ein Kreis sich ohne nachweisbare associative Mitbestimmung besser in einem als um ein Quadrat ausnimmt; letzteres, wenn neue Bedeutungen, Zweckbeziehungen, ideelle Beziehungen dadurch hervorgehen. Hienach kann etwas, was für sich oder in gewisser Zusammenstellung wohlgefällt, in andrer missfällig erscheinen und umgekehrt; obwohl es auch ästhetisch gleichgültige Combinationen giebt. Sei z. B. bei einem Fenster, wenn es für sich betrachtet wird, ein gewisses Verhältniss der Höhe zur Breite als das vortheilhafteste erschienen, weil es mit dem ästhetisch vortheilhaftesten Verhältniss eines isolirten Rechtecks überhaupt übereinstimmt, so folgt daraus noch gar nicht, dass es denselben Vortheil auch in der Zusammenstellung des Fensters mit den andern parallel angebrachten Fenstern behauptet, und lässt sich denken, dass sich die Verhältnisse der Fenster mit nach den Verhältnissen der Häuserfronte, worin sie angebracht sind, zu richten haben, das Verhältniss der Häuserfronte aber durch die Verhältnisse des Daches ästhetisch mitbestimmt ist. Wonach sich überhaupt fragen lässt, was damit gewonnen sei, den ästhetischen Werth eines Verhältnisses für sich erkannt zu haben, wenn dieser Werth sich in jeder andern Zusammensetzung und Zusammenstellung abändert. Hierauf aber ist zu erwiedern: erstens, dass in vielen Fällen zusammengesetzter Formen doch ein gewisses Verhältniss die Hauptgestalt des Gegenstandes bestimmt, hienach einen dominirenden Einfluss gewinnt; dass zweitens bei vielen Gegenständen, namentlich Kunstgegenständen, durch Umrahmung oder absichtliche Herstellung einer gleichgültigen Umgebung eine Isolirung von äussern Einflüssen künstlich bewerkstelligt, hiemit der Einfluss der Zusammenstellung seiner Form mit andern For-

men merklich beseitigt wird; dass drittens bei vielen Gegenständen die Umgebung nach Zufall wechselt, was den Einfluss im Ganzen compensirt. Insofern aber der betreffende Einfluss im Allgemeinen doch weder abzuleugnen noch zu unterschätzen, nicht überall zu beseitigen, vielmehr möglichst vortheilhaft zu verwenden ist, wird die Aufgabe unserer Untersuchung dadurch nicht aufgehoben, sondern erweitert, indem es nun auch den Einfluss der Zusammenstellungen und Zusammensetzungen zu ermitteln gilt. Sind auch deren unendlich viele, so sind doch der Gesetze, welchen sich dieser Einfluss unterordnet, nicht unendlich viele, und hauptsächlich auf deren Ermittelung ist die Absicht zu richten. Dabei bleibt aber der Ausgang immer von Untersuchung des ästhetischen Werthes möglichst einfacher isolirter Formen zu nehmen, als welcher so zu sagen central für alle durch die verschiedenen Zusammensetzungen und Zusammenstellungen bedingten Abweichungen bleibt, und nach Massgabe reiner hervortritt, als das betreffende Formverhältniss mehr dominirt und sich vollkommener isolirt, überhaupt der combinatorische Einfluss mehr zurücktritt. Wie denn in unserm eben so als in jedem andern Untersuchungsfelde nur dadurch Klarheit und Erfolg zu erzielen ist, dass man untersucht, was jede Bedingung für sich leistet, und was an der Zusammensetzung derselben hängt. So ist es in der Physik, so wird es auch in der Aesthetik sein. Nun wird man freilich, so weit man auch die Regeln der Zusammensetzung treiben mag, kein schönes Bauwerk oder schönes sichtbares Kunstwerk überhaupt nach diesen Regeln zu Stande bringen; nur das Gefühl des Künstlers ist fähig, alle im Sinne einer Aufgabe liegenden Bedingungen der Wohlgefälligkeit zum vortheilhaftesten Resultat zu combiniren. Aber ist diess wohl anders bei der musikalischen Composition; und ist desshalb eine Lehre von den Tonleitern, den dissonirenden und consonirenden Accorden, den Auflösungen der Dissonanzen, dem Tact und Rhythmus u. s. w. überflüssig? Es würde lästig sein, auseinanderzusetzen, warum sie nicht überflüssig ist; genug, man kann die Anwendung davon auf unser Gebiet machen.

Dabei kommt in Rücksicht, dass der associative Factor überhaupt in der Musik nur die Nebenrolle, der directe die Hauptrolle spielt, indess in den höhern Künsten der Sichtbarkeit die Hauptrolle dem associativen Factor anheimfällt. Aber der Unterschied ist nur

relativ; denn auch in Malerei und Plastik kann nicht Alles auf den associativen Factor geschrieben werden, und die Tektonik, in der sich allgemeingesprochen beide Factoren die Wage halten oder mit dem Uebergewicht wechseln, so wie in der Ornamentik, wo der directe allgemeingesprochen das Uebergewicht hat, wollen auch beide Factoren bis zu den elementarsten Bestimmungen herab berücksichtigt werden.

Nach Allem ist unnöthig, das Interesse unserer Frage erst weitläufig zu beweisen, nachdem es sich schon hinreichend historisch bewiesen hat, sofern eine Mehrzahl namhafter Aesthetiker, Kunstschriftsteller, insbesondere auch Architekten, worüber Näheres im folgenden Abschnitte, sich damit ernsthaft beschäftigt hat. Darunter giebt es allerdings einige, welche, wie Böttger in seiner Tektonik der Hellenen, die Frage in negativem Sinne dahin beantworten, dass es an sich wohlgefällige Formverhältnisse in unserm Sinne überhaupt nicht gebe; abgesehen von Rücksichten der Verwendung sei jedes Verhältniss ästhetisch gleichgültig. Ja im Gespräch mit Künstlern wird man diesen Satz zumeist als einen Fundamentalsatz ausgesprochen finden.*) Inzwischen wird demselben schon durch die Symmetrie widersprochen, die freilich durch Unangemessenheit zur Idee, dem Zweck oder der Bedeutung der Gegenstände, kurz in Widerspruch mit dem associativen Factor, auch missfallen kann, daher in den Künsten der Sichtbarkeit über Ornamentik, Tektonik und Architektur hinaus zumeist missfällt, hingegen bei fehlendem Conflict oder einträchtigem Zusammengehen mit dem Sinne der Darstellung ihre Wohlgefälligkeit unzweideutig zu erkennen giebt. So namentlich im Kaleidoskop, wo gar keine Rücksichten der Verwendung ins Spiel kommen, der associative Factor des Eindruckes überhaupt ganz zurücktritt.**) Nun bleibt freilich der wohlgefällige Eindruck der kal-

*) Gerade entgegengesetzt Kant, Schiller, Herbart, welche dem associativen Factor bei der Beurtheilung der Formenschönheit keine wesentliche Bedeutung zugestehen. Die Streitfrage in dieser Hinsicht bis in ihre Wurzeln zu verfolgen und zu discutiren, kann hier nicht die Absicht sein. Indem ich mich überall auf factische Verhältnisse beziehe, glaube ich, dem Zweck unserer Aufgabe zu genügen. Der Streit würde schwerlich entstanden sein, wenn man überhaupt einen klaren Unterschied zwischen directer und associativer Seite des Eindrucks gemacht, und genauer als bisher untersucht hätte, was auf jede Seite zu legen.

**) Oersted führt in einer seiner ästhetischen Schriften oder Abhandlungen

eidoskopischen Figur, obschon intensiv genug, doch eben desshalb, weil er sich vom associativen isolirt und in keine höhere Zusammensetzung eingeht, niedrig und arm; aber das gilt überhaupt von jeder isolirten Grundbedingung der Wohlgefälligkeit; und man muss doch jede möglichst isoliren, um zu wissen, was auf sie an sich zu rechnen; in Verwendungen kann dann jede, insoweit sie nicht andern Bedingungen der Wohlgefälligkeit widerspricht, nach dem ästhetischen Hülfsprincip mit gesteigertem Reize eintreten. Die Symmetrie aber muss, um nicht in solchen Widerspruch zu gerathen, in den meisten Verwendungen, sei es von der Reinheit oder Vielseitigkeit oder Buntheit nachlassen, auf deren Zusammentreffen im Kaleidoskop ihr intensiver Eindruck beruht, oder gar merklich ganz zurücktreten. Inzwischen wird selbst noch in der Malerei eine gewisse Abwägung der Massen, welche an die Symmetrie erinnert, zu jedem guten Bilde verlangt, ohne durch den Sinn der Darstellung an sich gefodert zu sein; man will weder in einem Landschafts- noch Genrebilde, welche der Symmetrie am meisten zu widerstreben scheinen, die Hauptmasse des Inhalts fast ganz auf eine Seite verlegt sehen; um so mehr strebt die Darstellung des Malers der vollen Symmetrie zu, wo diese Annäherung mit dem Sinne Hand in Hand geht, wie bei vielen religiösen Bildern, indem die Vorstellung einer höhern Ordnung dadurch unterstützt wird. Eine reine Durchführung der Symmetrie aber ist ohne missfälligen Widerspruch mit dem Charakter einer lebendigen Darstellung überhaupt nicht wohl in der Malerei möglich; daher eben die vortheilhaftere und reinere Anwendbarkeit derselben in Tektonik und Architektur nach horizontaler Richtung, wo dieser Widerspruch wegfällt, indess nach verticaler Richtung Zweckrücksichten zum Unterlassen der Symmetrie drängen. Wogegen nicht spricht, dass in manchen Bauwerken sogar nach horizontaler

---

folgendes, vielleicht schon sonst bekanntes, Experiment an. Man macht mit Tinte auf einer Seite eines in eine Falte zusammengebrochenen, doch wieder aufgeschlagenen Papiers irgend einen unregelmässigen Krakel, der bis an die Theilungslinie beider Seiten des Blattes reicht, und faltet dann das Papier wieder so zusammen, dass sich der Krakel symmetrisch auf der andern Seite abdruckt. Man erstaunt über den Gewinn von Wohlgefälligkeit, den man trotz der unreinlichen Vermischung der Züge beim Abdruck solchergestalt erhält, und kann sich wie mit dem Kaleidoskop durch Abänderung des Versuchs längere Zeit unterhalten finden.

Richtung die Symmetrie mit Vortheil verlassen wird, indem sich dann immer associative Momente angeben lassen, welche in diesem Sinne überwiegen; es würde nur hier zu weit führen, in weitere Erörterungen darüber einzugehen.

Lotze hebt in seiner Geschichte der Aesthetik den Unterschied, den ich zwischen directen und associativen Eindrücken mache, gewissermassen auf, indem er den Eindruck der Symmetrie so wie fast Alles, was ich sonst als directen Eindruck fasse, in der Hauptsache auf ein associatives Moment zurückzuführen sucht, nämlich die directe Wirkung zwar nicht ganz leugnet aber als von wenig Gewicht gegen das associative Moment zurücksetzt. (Vergl. insbesondere Gesch. S. 74 ff. und 232 ff.) Des Näheren kommt nach Lotze die Wohlgefälligkeit und Missfälligkeit objectiver anschaulicher Raumformen und Raumverhältnisse, Bewegungen, Stellungen, wesentlich dadurch zu Stande, dass sich darin Formen und Verhältnisse, Bewegungen, Stellungen unsers eigenen Körpers wiederspiegeln, solche, worin unser Wohl und Wehe, Freude, Leid, Behagen, Missbehagen einen Ausdruck findet. Die Lust und Unlust, die sich darin im Laufe unsers bisherigen Lebens ausgesprochen hat, kehrt uns nämlich beim objectiven Anblick durch associative Erinnerung an die früher erfahrene 'in einem Abklange wieder. Wir fühlen die Lust und Unlust so zu sagen in die objectiven Formen, Verhältnisse, Bewegungen, Stellungen hinein auf Grund unserer früheren Erlebnisse von Lust und Unlust unter entsprechenden Formen, Verhältnissen, Bewegungen, Stellungen unseres eignen Körpers; und nur diess macht die objectiven ästhetisch wirksam und verständlich für uns. Im Sinne dieser allgemeinen Auffassung, verstehe ich anders Lotze recht, ist es das befriedigende Gefühl des durch Selbstthätigkeit vermittelten oder durch Gunst äusserer Umstände erhaltenen statischen Gleichgewichts des eignen Körpers, was sich associationsweise auf den Anblick einer symmetrischen Figur übertragen muss, um Wohlgefallen daran zu finden.

Aber so wenig ich bestreite, dass derartige Associationen eine unter Umständen wichtige Rolle bei objectiven Eindrücken überhaupt spielen, kann ich doch nicht zugeben, dass sie beim Eindruck der Symmetrie die wesentliche, die Hauptrolle spielen. Denn zuvörderst wüsste ich nicht, warum durch die Anschauung einer symmetrischen Figur nicht so gut im Gebiete des Gesichtes als durch den Genuss einer wohlschmeckenden Speise im Gebiete des Geschmackes, direct Bewegungen in unsrer Organisation sollten ausgelöst werden, die uns zusagen, indem sie nach Lotze's anderwärts entwickelter tieferen Fassung den Eindruck »eigener Vortrefflichkeit« gewähren, warum vielmehr erst associative Erinnerung an frühere lustvolle Bewegungen oder Gleichgewichtszustände unsers eigenen Körpers nöthig sein sollte, den Eindruck erheblich lustvoll zu machen. Dieser Umweg schiene mir nur zu nehmen, wenn er sich als nöthig erweisen sollte. Suche ich mir aber klar zu machen, wozu Lotze selbst auffodert, ohne dass ich dieser Auffoderung von ihm selbst

nach Wunsch entsprochen finde, wie die Wohlgefälligkeit der Symmetrie nach seinem Princip zu Stande kommen soll, so treten mir Schwierigkeiten entgegen, die ich nicht zu überwinden weiss, und die mir unter seiner hier wie überall sinnigen und stilvollendeten Darstellung sich vielmehr zu verbergen, als dadurch beseitigt zu sein scheinen, worüber ich gern bereit bin, anderwärts in Erörterungen einzugehen; hier würden sie zu weit führen. Doch konnte ich nicht umhin, meine Abweichung von einer, mit unserer Frage in Beziehung stehenden, fundamentalen Ansicht der vorzüglichsten Autorität, die wir jetzt in der Aesthetik haben, mit einigen Worten zu bezeichnen. Sollte aber Lotze's Ansicht gegen die meinige doch Recht behalten, so würde sich nicht sowohl unsere Aufgabe als der Ausdruck derselben wesentlich zu ändern haben.

Die Symmetrie beweist nun jedenfalls, dass es im Gebiete der Sichtbarkeit mindestens ein Verhältniss giebt, welches einen Vortheil die Wohlgefälligkeit an sich, ohne Rücksicht auf die Weise der Verwendung, nur nicht in Widerspruch mit Rücksichten der Verwendung, vor davon abweichenden Verhältnissen voraus hat. Die Frage ist blos, ob mit diesem einen Beispiel das Gebiet an sich ästhetisch bevorzugter Verhältnisse überhaupt erschöpft ist. In der Musik giebt es eine Mehrheit consonirender Verhältnisse, die einen Vortheil die Wohlgefälligkeit an sich vor allen dissonirenden haben; könnte nicht etwas Entsprechendes im Felde der Sichtbarkeit stattfinden? Ohne nun die Frage in voller Allgemeinheit zu behandeln, wobei namentlich auch die Verhältnisse der Geradlinigkeit, Ebenheit, Eckigkeit und Krümmung in Untersuchung zu nehmen wären, fassen wir sie hier nur, nach der oben ausgesprochenen Beschränkung der Aufgabe, bezüglich der einfachsten Dimensions- und Abtheilungsverhältnisse ins Auge, und überblicken zunächst, was in dieser Beziehung bis jetzt von Hauptansichten vorliegt, um zu wissen, worauf wir die Prüfung hauptsächlich zu richten haben, unter Angabe der Gründe, welche eine neue Prüfung nöthig erscheinen lassen.

II. Historisches und Kritisches.

Vielfach hat man gemeint, im Felde des Sichtbaren könne überhaupt kein anderes Princip der Wohlgefälligkeit gelten, als im Gebiete des Hörbaren, und hieraus folge von selbst, dass die einfachsten leichtestfasslichen rationalen Verhältnisse, welche als Schwingungsverhältnisse die Consonanzen in der Musik geben, auch als Dimensions- und Abtheilungsverhältnisse sichtbarer Gegenstände einen ästhetischen Vorzug haben; zieht man doch sonst überall die leichtere Fasslichkeit der schwierigern vor. Insbesondere bevorzugt Wolff in seinen Beiträgen zur Aesthetik der Baukunst als Dimensions- und Abtheilungsverhältniss in der Architektur vor Allem das Verhältniss 1 : 1, was als Verhältniss der Länge zur Breite das quadratische giebt, findet auch dasselbe im Bau des menschlichen Körpers vorzugsweise befolgt. Heigelin in seinem Lehrbuch der höhern Baukunst, Thiersch in seinem Lehrbuch der Aesthetik, der Engländer Hay in seinen Schriften: »The geometric beauty of the human figure defined etc. (1851)« und »The natural principles of beauty etc. 1852« bevorzugen die einfachen rationalen Verhältnisse überhaupt, letzterer ausdrücklich in Uebertragung von der Musik.*) Und mindestens für die Gliederung des menschlichen Körpers sind früherhin fast immer die einfachen rationalen Verhältnisse als natürliche wie ästhetische Normalverhältnisse in Anspruch genommen worden.

Hiegegen hat neuerdings Zeising, Professor der Philosophie in München, für die Architektur, den menschlichen Körper und überhaupt das unten näher zu bezeichnende sog. goldne Schnittverhältniss als ein ebenso von der Natur vorzugsweise eingehaltenes wie ästhetisch vor jedem andern Verhältnisse bevorzugtes Normalverhältniss geltend gemacht. Der goldne Schnitt ist nach ihm**) »dasjenige Verhältniss, welches der ganzen Gliederung der Menschengestalt, dem Bau der edleren

*) Dabei hat jedoch Hay vielmehr Winkelverhältnisse als Dimensions- und Abtheilungsverhältnisse im Auge. Ein Bericht darüber findet sich in Zeisings N. L. S. 62.

**) S. seine Schrift über das Normalverhältniss der chemischen und morphologischen Proportionen S. 1.

Thiere, der Construction der Pflanzen, namentlich in Gestalt ihrer Blattstellung, den Formen verschiedener Krystalle, der Anordnung des Planetensystems, den Proportionen der anerkannt schönsten architektonischen und plastischen Kunstwerke, den befriedigendsten Accorden der musikalischen Harmonie und so noch anderen Erscheinungen in Kunst und Natur als Normalverhältniss zu Grunde liegt;« und die Frage nach der Gültigkeit des goldnen Schnitts berührt hienach »die gesammte Anthropologie, namentlich die Anatomie, Physiologie und Ethnographie, ferner die Zoologie, Botanik und Mineralogie, die Geographie und Astronomie, die Mathematik, Physik und Chemie, kurz alle Gebiete der Naturwissenschaft, und nicht minder die gesammte Aesthetik, namentlich die Theorie und Praxis der Baukunst, Bildhauerkunst und Malerei, der Musik, Poesie und Mimik«, ja Zeising erwartet von einer zusammenfassenden Behandlung der Lehre vom goldnen Schnitt: »sie dürfte vielleicht geeignet sein, nach und nach eine Wissenschaft begründen zu helfen, die am treffendsten mit dem Namen einer »»vergleichenden Naturwissenschaft«« zu bezeichnen und ... zumeist berufen sein möchte, an die Stelle der aprioristischen Naturphilosophie zu treten.«

Nach dieser so ausserordentlichen Bedeutung, welche der goldne Schnitt hat, muss man sich freilich wundern, dass dieselbe so lange hat verborgen bleiben können, und diess möchte von vorn herein geeignet sein, einiges Bedenken dagegen zu erwecken; ja wenn Zeising Andeutungen des goldnen Schnittes sogar in mehreren Sternbildern, in den Planetenabständen und der Gliederung von Land und Meer auf der Erde u. s. f., Spuren davon sogar »in den rein geistigen Sphären der Wissenschaft, sowie in den ethischen und religiösen Beziehungen« findet und Alles, was nur leidlich zu passen scheint, dazu herbeizieht, so wird sich Jeder von vorn herein sagen, dass seine Lehre mindestens an Uebertreibung und Mängeln der Kritik leiden muss.

Inzwischen hat Zeising Fleiss und Eifer nicht gespart, dieselbe zur Anerkennung zu bringen, indem er seine Ansicht darüber in einer ganzen Reihe von Schriften und Abhandlungen entwickelt hat wovon folgende, künftig kurz als N. L. und als N. V. zu citirende, Hauptschriften den Titel führen.*)

*) Die weitere Literatur von Zeisings Abhandlungen über den goldnen Schnitt, so weit sie mir bekannt ist, s. im folgenden Abschnitte.

I. Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers aus einem bisher unbekannt gebliebenen, die ganze Natur und Kunst durchdringenden morphologischen Grundgesetze entwickelt und mit einer vollständigen historischen Uebersicht der bisherigen Systeme begleitet von Prof. Dr. A. Zeising. Mit 177 in den Text gedruckten Holzschnitten. Leipzig, Rud. Weigel. 1854.

II. Das Normalverhältniss der chemischen und morphologischen Proportionen. Leipzig. Rud. Weigel. 1856.

Bei den Naturforschern hat nun freilich Zeisings Streben, die Anerkennung des goldnen Schnittes durchzusetzen, wenig Erfolg gehabt; man hat sich, wenig Ausnahmen abgerechnet, um sein allgemeines Gestaltungsprincip der Natur nicht gekümmert. Doch ist seine Lehre in dem Handbuche der Anatomie von Harless wesentlich berücksichtigt worden und Dr. Hagen*) will durch seine Messungen den Satz des goldnen Schnitts im Kopf- und Gehirnbau sogar im grössten Detail bestätigt finden. Auch beweist die Aufnahme mancher Abhandlungen Zeisings in naturwissenschaftlichen Zeitschriften wenigstens, dass man ihr einen Platz nicht überall hat versagen wollen.

Den meisten Naturforschern aber sind die Bestrebungen Zeisings so gut als unbekannt geblieben. Grössere Aufmerksamkeit hingegen haben sie ästhetischerseits gefunden; man darf sagen, dass seine Ansicht nach dieser Seite Aufsehen erweckt und grösstentheils Beistimmung gefunden hat, obwohl es auch an einzelnem Widerspruch nicht gefehlt hat. Jedenfalls dürfte man in keiner neueren ästhetischen Schrift von allgemeiner Tendenz eine Rücksichtsnahme auf den goldnen Schnitt vermissen. Von einer gründlichen Prüfung der Zeisingschen Ansichten freilich habe ich nirgends etwas gefunden.

Uns geht nun überhaupt hier blos die Frage nach der ästhetischen Bedeutung des goldnen Schnittes an; ich glaubte nur die viel allgemeinere Bedeutung, welcher dieselbe von Zeising untergeordnet wird, nicht unerwähnt lassen zu dürfen, ohne sie aber über das ästhetische Gebiet hinaus verfolgen zu wollen.

Der Begriff des goldnen Schnittes beruht darin, dass die kleinere Dimension eines Gegenstandes sich zur grösseren, also z. B. bei einem Rechteck die kleinere Seite zur grösseren, verhält wie die

*) Münchn. Abendbl. 1856. Nr. 27., auszugsweise in Zeising II. S. 24.

grössere zur Summe beider; oder, wenn es sich um Abtheilungen handelt, dass die kleinere Abtheilung sich zur grösseren Abtheilung verhält, wie die grössere zur Summe beider, oder zum Ganzen. Die kleinere Dimension oder Abtheilung, welche in das Verhältniss eingeht, wird von Zeising Minor, die grössere Major genannt. Untersucht man nun, welches Verhältniss der Minor zum Major haben muss, um obigem Begriffe zu genügen, so findet man, dass es eigentlich ein irrationales Verhältniss, wie das des Kreisdurchmessers zur Kreisperipherie ist, welches aber für das Augenmass schon nahe zulänglich durch 5:8,*) weniger zulänglich durch 3:5, mit steigender Approximation in ganzen Zahlen aber durch 13:21, durch 21:34, durch 34:55 u. s. w. dargestellt werden kann, in Decimalen durch 1:1,61803 oder 0,61803:1, oder in Bruchtheilen der Einheit durch 0,38197 : 0,61803. (Ueber die allgemeine Regel, nach welcher die Approximation beliebig gesteigert werden kann, vergl. den folgenden Abschnitt.) Mit musikalischen Schwingungsverhältnissen verglichen lässt sich der goldne Schnitt als eine unreine Sexte betrachten, indem er zwischen der grossen Sexte 3 : 5 (= 1,6667) und kleinen Sexte 5 : 8 (1,6000) inne liegt, näher aber der letzteren als ersteren.

Die einfachen rationalen Verhältnisse lässt Zeising nur in so fern gelten, als sie in das (rückwärts von 3 : 5 verfolgte) System der Approximationen an den goldnen Schnitt (wovon im folgenden Abschnitt) hineintreten und sich demselben selbst mehr oder weniger nähern. Da er aber die Ansicht theilt, dass im Felde des Sichtbaren und Hörbaren dasselbe Princip der Wohlgefälligkeit gelten müsse, überhaupt der Macht des goldnen Schnittes nichts entzogen wissen will, so findet er sich, in Widerspruch freilich mit dem allgemeinen

*) Durch Versuche mit zwei, in der Verlängerung von einander, doch in einigem Abstande von einander, sehr genau dem Umriss nach verzeichneten Rechtecken, respective von 60 u. 96 und von 60 und 97 Mill. Seite, deren ersteres also das Seitenverhältniss 5 : 8 oder 1 : 1,6000, das andere das merklich genaue Verhältniss des goldnen Schnittes nämlich 1 : 1,6163 statt ganz genau 1 : 1,6180 hat, habe ich unter Zuziehung mehrerer Personen zu den Versuchen bei senkrechter und horizontaler Lage der Rechtecke gefunden, dass in der Mehrzahl der Fälle letzteres Rechteck richtig als das schlankere beurtheilt wird, dass aber auch nicht wenige Verwechselungen in dieser Hinsicht vorkommen. Jedenfalls steht hienach das Verhältniss 5 : 8 noch nicht an der vollen Gränze der Nichtunterscheidbarkeit vom genauen goldnen Schnitt. Bestimmtere Rechenschaft von diesen Versuchen künftig.

Urtheil, durch die Consequenz genöthigt, die beiden Sexten für die musikalisch wohlgefälligsten Verhältnisse zu erklären, wofür er Gründe in den musikalischen Compositionsverhältnissen zu finden glaubt (N. L. S. 414 ff.).*) Durch die volle Consequenz freilich würde er genöthigt sein, statt der reinen Sexte die unreine Sexte, welche dem goldnen Schnitt genau entspricht, für das allerwohlgefälligste musikalische Verhältniss zu erklären; und da diess doch nicht wohl angeht, so nimmt Zeising hier wie überall, wo der goldne Schnitt nur in grober Annäherung passt, (N. L. 431) seine Zuflucht zu dem, bis zu gewissen Gränzen freilich zuzugestehenden, Satze: »dass überhaupt die realen Erscheinungen die Idee nie ganz erreichen und gewisse Abweichungen sogar nothwendig werden, wenn der innere Reichthum der Idee in mannichfacher Erscheinung zu Tage treten soll.« Nur kann man fragen, wie ein Verhältniss noch als Idealverhältniss der Wohlgefälligkeit gelten soll, wenn Abweichungen davon es an Wohlgefälligkeit übertreffen. Denn jenes Princip würde doch nicht hindern, dass wo der Idealfall unter so vielen, wenn auch nothwendigen, Abweichungen einmal eintritt, auch ein besonders ausgezeichnetes Wohlgefallen daran sich geltend mache.

Diess dahingestellt, so hat die Uebertragbarkeit einer ästhetischen Bedeutsamkeit gewisser Zahlenverhältnisse aus dem Gebiete des Hörbaren ins Gebiet des Sichtbaren überhaupt nichts so Selbstverständliches, um sich den Zwang derselben a priori aufzuerlegen, da Schwingungsverhältnisse nicht eben so ins Gehör als Abtheilungs- und Dimensionsverhältnisse ins Gesicht fallen, und man zwar jede Musik den Zahlenverhältnissen ihrer Schwingungen nach ins Sichtbare durch eine Reihe von Linien oder Rechtecken von entsprechenden Verhältnissen der Dimensionen oder Abtheilungen übersetzen, aber nichts einem musikalischen Eindruck Analoges damit erreichen kann. Inzwischen, um den wenig durchschlagenden theoretischen Erörterungen zu Gunsten dieser Uebertragbarkeit nicht mit eben so wenig durchschlagenden Gegenerörterungen zu begegnen, wird es am besten sein, die Erfahrung direct zu befragen.

*) Insbesondre macht er geltend, dass die Sexten und ihre Complemente die Terzen die einzigen Zweiklänge seien, mit denen sich eine musikalische Periode schliessen lässt und in welchen sich der improvisirte zweistimmige Volksgesang und die einfache Musik zweier Waldhörner bewegt.

Diess haben nun zwar auch die Vertreter der einen und andern Ansicht nicht versäumt, ohne dass aber bisher eine sichere Entscheidung damit gewonnen ist, weil man sich an zu complicirte Beispiele, als namentlich den menschlichen Körper und Architekturgegenstände, gehalten und das Experiment unter einfachst möglichen Bedingungen nicht angewandt hat. Bei jenen Beispielen ist aber die Gestalt jedenfalls noch durch andere als ästhetische Rücksichten und ästhetischerseits durch die Zusammensetzungsweise der Formen so wie Vorstellungen des Zwecks oder der Bedeutung, kurz combinatorisch und associativ mitbestimmt, und nicht leicht zu scheiden, was auf Rechnung dieser Umstände oder auf einfache Formwohlgefälligkeit an sich zu schreiben. Die Dimensionen dieser Gegenstände sind ungleichförmig, der menschliche Körper z. B. an manchen Stellen breit, an andern schmal, das Bauwerk mit allerlei Ausladungen versehen und zum Dache zugespitzt, der Abtheilungen und Unterabtheilungen aber an diesen Gegenständen so viele und zum Theil so unbestimmte, dass im Allgemeinen eine gewisse Willkühr bleibt, was man als Hauptdimension oder Hauptabtheilung betrachten und an welchen Gränzpuncten man das Mass anlegen will. Natürlich zieht dann jeder die Anlegungsweise der Masse vor, welche am besten zu seiner Voraussetzung passt, und werden nun noch überdiess unter den verschiedenen Gegenständen die herausgesucht, deren Massverhältnisse am besten zur Ansicht stimmen und die vernachlässigt, welche gar nicht dazu stimmen, oder hält man es schon genug, dass unter den schwankenden Massangaben, wie sie namentlich bezüglich des menschlichen Körpers vorliegen, sich solche finden, die mit der Ansicht zusammentreffen, ohne Rücksicht, ob auch das Mittel der Angaben dazu stimmt, so kann man leicht eben so gut die eine als andere Ansicht bewährt finden, und der Beweis dafür ist, dass man wirklich die eine wie andre auf diesem Wege bewährt gefunden hat.

So findet Wolff, nachdem er seine Ansicht durch allgemeine Gründe zu stützen versucht hat, bei den griechischen Säulenstellungen glücklich überall das Quadrat heraus, indem er den Abstand einer Säule von der je zweiten, oder, passt das nicht, den Abstand derselben von der je dritten mit der Säulenhöhe vergleichen lässt; wo aber der Abstand der Mittellinien der Säulen diess Verhältniss nicht giebt, den Abstand einer Mittellinie von einer Seitenlinie in

Betracht nehmen lässt; wo diess wieder nicht reicht, nöthigenfalls auch noch die Höhe des Gebälkes zur Säulenhöhe rechnen lässt. Hiegegen ist Zeising, nachdem er den goldnen Schnitt philosophisch begründet hat, eben so glücklich, in den Säulenstellungen des Parthenon die Durchbildung des goldnen Schnitts zu finden*), indem er darauf hinweist, dass unten zwischen der Säulendistanz (von Centrum zu Centrum der Säulendicke) und dem Säulendiameter das Verhältniss 7 : 5, oben das Verhältniss 12 : 7 besteht, wozwischen das arithmetische Durchschnittsverhältniss 19 : 12 = 0,631 **) dem goldnen Schnitt sehr nahe komme, und dass namentlich dieses Verhältniss sehr genau getroffen werde, wenn man die Säulendicke in einer Höhe, wo die Säulenlänge nach dem goldnen Schnitt getheilt ist, mit dem Zwischenraume der Säulen vergleicht.

Ausser dem Parthenon führt er (N. L. S. 396) noch acht andere griechische und römische Tempelgebäude und Propyläen an, die nach ihm (S. 397) »namentlich in der Gliederung der Höhe«, für die überhaupt das Proportionalgesetz des goldnen Schnittes von besondrer Wichtigkeit sei, »so genau mit dem Parthenon übereinstimmen, dass ihre Uebereinstimmung mit dem Gesetz nicht besonders nachzuweisen sei«, und bezieht sich dabei auf die Aufrisse dieser Gebäude im Atlas zu Kuglers Kunstgeschichte oder den Denkmälern der Kunst von Voit, Guhl und Kasper. Ich habe diese Aufrisse an ersterm Ort nachgemessen, finde aber nur bei zweien eine gute Uebereinstimmung betreffs der Höhengliederung mit dem Parthenon und leidliche Annäherung an den goldnen Schnitt. Indess nun aber nach Zeising das Parthenon im Verhältniss von Breite und Höhe wie überhaupt ganz nach dem goldnen Schnitt gegliedert ist, findet Heigelin, der vom goldnen Schnitt noch nichts wusste, im Parthenon »fast genau« und »in sehr vielen Gebäuden aller Zeiten zum Theil vollkommen genau, immer mit grosser Befriedigung« das Verhältniss

*) Deutsches Kunstbl. 1857. Nr. 49 ff.

**) Das arithmetische Mittelverhältniss von Brüchen kann freilich eigentlich nicht durch Division der Summe der Zähler mit der Summe der Nenner erhalten werden, und ist bei obigen Brüchen vielmehr 0,6488; das geometrische oder Verhältnissmittel aber, woran man sich nach späterer Erörterung zu halten hätte, ist 0,6455, wobei zuzugeben, dass die Approximation an den goldnen Schnitt durch diese Aenderung nur wenig leidet.

2:1 als das von Breite und Höhe. Dabei bleibt zuzugeben, dass in Zeisings Registrirung genauer Messungen namentlich des Parthenon und Cölner Doms viel Beachtenswerthes bleibt, nur etwas Durchschlagendes für unsere Frage kann ich aus den angegebenen Gesichtspuncten nicht darin finden.

Wolff, indem er den Hauptschnitt des menschlichen Körpers »in den stark markirten Abschnitt, wo sich die Beine von dem Rumpfe trennen« legt (Beitr. S. 14), findet dadurch den Körper in zwei gleiche Theile getheilt, Zeising, indem er ihn in die Nähe des Nabels legt, findet den goldnen Schnitt. Wolff findet, dass »die am meisten hervorgehobene Horizontallinie (des Kopfes) durch die Augenwinkel die Mitte des Kopfes bildet«, und Zeising (N. L. 186), indem er die Theilungslinie seiner, vom Scheitel bis zur ungefähren Halsmitte gerechneten Kopfpartie durch die Augenbrauenbogen legt, findet den goldnen Schnitt. Wolff findet, dass »die Entfernung von jener Horizontallinie aus bis zu dem Ende der Nase in den regelmässigsten Gesichtern der untern bis zum Contour des Kinnes gleich sei«, und Zeising findet (S. 187), indem er die Theilungslinie seiner untern Kopfpartie (von den Augenbrauenbogen bis um die Halsmitte) ebenfalls durch das untere Nasenende legt, den goldnen Schnitt. Während sonst überhaupt niemand eine Abtheilung des menschlichen Körpers um die Mitte des Halses, eben so wenig eine solche in der Kniebucht (der Einbiegung unter dem Knie) gesucht hat, findet Zeising durch jene obwohl nicht die genaue, sondern eine von ihm proportional genannte, Mitte den obern Körpertheil, durch diese den untern Körpertheil, beide von der Nabelgegend an (obwohl nicht genau vom Nabel an), respective bis zum Scheitel und zur Sohle gerechnet, nach dem goldnen Schnitte getheilt. Und irgend wohin muss freilich der goldne Schnitt treffen; nur dass er, so gelegt, mit keiner wirklich ausgesprochenen Abtheilung des Körpers zusammentrifft. Denn der Hals ist eine Art Stiel, durch dessen beide Gränzen vielmehr als durch dessen wirkliche oder in Zeisings Sinne proportionale Mitte man sonst Abtheilungen bestimmt hält; und Zeising selbst würde eine Abtheilung nicht um die Mitte eines Schwanenhalses suchen wollen; noch dürfte er es bequem finden, trotz dem, was er (N. L. S. 164) zur Vertheidigung des Schnittes durch die Kniebucht sagt, dass hienach der goldne

Schnitt beim Knieenden, Sitzenden und Schreitenden einen Knick im Knie erhält, indess jeder durch keine Voransicht Befangene eine deutliche Abtheilung der Gliederung im Knie selbst finden wird, wo auch Zeising selbst sicher eine solche suchen würde, wenn der goldne Schnitt damit zu finden wäre. Carus findet für die Proportionen der drei Glieder des knöchernen Mittelfingers 7, 5, 3, Schmidt findet für dieselben 5, 3, 2, und Zeising findet zwischen dem Hintergliede und den beiden Vordergliedern den goldnen Schnitt, indem jeder die Masse zwischen andern Puncten nimmt, und die wirklich gefundenen Masszahlen bis zum Passenden abrundet, oder unter den schwankenden Massen die, welche ihm am besten passen, vorzieht.

Nach Zeising (N. L. S. 413) entsprechen bei der Sixtinischen Madonna von Raphael in Dresden die Hauptabtheilungen der Höhe »genau dem Gesetze des goldnen Schnittes«. Doch habe ich in einer Abhandlung im Archiv f. Zeichenkünste (XI. 1865. S. 100) gezeigt, dass das nur bei einer sehr willkührlich vorgezogenen Anlegungsweise der Masse, auch da nicht genau, passt, dass es nicht passt bei ganz entsprechenden Massnahmen von andern Raphaelschen Gemälden, noch bei der mit der Sixtina analog gruppirten Holbeinschen Madonna in Dresden.

Man hat hierin Beispiele, die sich leicht vermehren liessen, wie je nach Anlegungsweise der Masse, Auswahl und Verwerthung der Beispiele verschiedene Verhältnisse als massgebend für die menschlichen Bauwerke, den Bau des menschlichen Körpers und Werke der bildenden Kunst erscheinen können, ohne dass man in den geführten Untersuchungen selbst ein sichres Princip findet, sich vielmehr nach einer als der andern Seite zu entscheiden, und ohne dass durch das Statthaben der betreffenden Verhältnisse, in so weit solches anzuerkennen sein mag, für den ästhetischen Werth derselben schon hinreichend bewiesen ist, da ja, wie schon oben bemerkt, die Dimensions- und Abtheilungsverhältnisse des menschlichen Körpers und der menschlichen Bauwerke gar nicht blos durch ästhetische Rücksichten, sondern auch Zweckrücksichten bestimmt und bei Werken der bildenden Kunst durch ideelle Rücksichten der Bedeutung mitbestimmt sind, wo sich dann noch fragt, wiefern die einen Rücksichten mit den andern Hand in Hand gehen. Wenn man also

auch Anwendungen der Gesetze reiner Formwohlgefälligkeit in organischen und unorganischen Bauwerken finden kann, nachdem diese Gesetze schon festgestellt sind, und selbst Anzeichen darauf in solchen Werken suchen kann, wozu Zeising jedenfalls ein reicheres Material als alle seine Vorgänger geboten hat, so ist doch eine sichre Feststellung der Gesetze selbst nicht auf diesem Wege zu gewinnen. Vielmehr wird es in dieser Beziehung mit den ästhetischen Gesetzen wie mit den physikalischen sein. Die Gesetze der Schwere, der Tragkraft, kann man nicht nur auf die organischen und unorganischen Bauwerke anwenden; sondern muss sie darauf anwenden; eine fundamentale Ermittlung und Bewährung derselben aber ist nicht darauf zu gründen.

Der Erfolg selbst beweist es; denn während die Resultate der folgends auseinanderzusetzenden Methoden, denen ich glaube eine verhältnissmässige Sicherheit beilegen zu können, Zeisings Ansicht in gewissen Gränzen entschieden Recht und der gegentheiligen Ansicht entschieden Unrecht geben, werden sie doch eben so entschieden beweisen, dass das Recht von Zeisings Ansicht ein viel beschränkteres ist, als er nach seiner Untersuchungsweise anzunehmen Anlass fand und dass auch die gegentheilige Ansicht bis zu gewissen Gränzen Recht behält.

Entschieden bestätigt gefunden habe ich nämlich den Vorzug des goldnen Schnitts als Dimensionsverhältniss für einfache Rechtecke, was zugleich der einfachste und fundamentalste Fall ist, der sich untersuchen liess, ohne dass daraus schon sichere Folgerungen für das Verhältniss der Hauptdimensionen von Ellipsen und complicirteren Formen zu ziehen, was vielmehr besonders untersucht werden muss.*) Hingegen hat sich für eine fundamentale ästhetische Bedeutung des goldnen Schnittes als Abtheilungsverhältniss nach denselben

*) Die Uebertragung der Wohlgefälligkeitsverhältnisse von Rechtecken auf Ellipsen ist jedenfalls gar nicht so selbstverständlich, als es für den ersten Anblick scheinen möchte, weil sich mit den Dimensionsverhältnissen zugleich die Krümmungsverhältnisse und Excentricitätsverhältnisse der Ellipsen ändern, und man nicht a priori voraussehen kann, was daran hängt. Um so weniger kann die Uebertragung von Rechtecken auf complicirtere Formen ohne ausdrücklich darauf gerichtete Versuche gerechtfertigt sein. Mit Versuchen über Ellipsen bin ich noch beschäftigt, ohne schon jetzt ein sicheres Resultat aussprechen zu wollen.

Methoden, welche zur Anerkennung der Bedeutung des goldnen Schnittes als Dimensionsverhältniss geführt haben, überhaupt keine Bestätigung finden lassen, ungeachtet Zeising seine Bedeutung in dieser Beziehung noch stärker hervorhebt, als in jener, und ein noch massenhafteres Material von Belegen dafür beigebracht hat. Nun gestehe ich selbst, dass ich, ohne diese Belege den früher erhobenen Einwürfen im Allgemeinen entzogen zu halten, doch namentlich in den architektonischen Verwendungen, die Zeising geltend macht, nicht Weniges finde, was für den Werth des goldnen Schnittes als Abtheilungsverhältniss insofern zu sprechen scheint, als wenigstens nicht bestimmt nachzuweisen, mithin nicht sicher zu behaupten ist, dass jene Einwürfe in Bezug darauf durchschlagen, wonach ich einige Scheu trage, die Bedeutungslosigkeit des goldnen Schnittes als Abtheilungsverhältniss überhaupt entschieden auszusprechen. Aber da ich doch den von Zeising behaupteten Werth in dieser Hinsicht nicht unter den einfachsten Bedingungen, in den einfachsten Verwendungen wiederfinden kann, wo zu erwarten, ja nach Zeisings Theorie zu verlangen war, dass er am reinsten hervortreten müsse, so kann ich nicht anders als glauben, dass der goldne Schnitt zwar durch gewisse Mitbedingungen oder in gewissen Zusammensetzungsweisen, die es aber erst genauer zu bezeichnen und zu formuliren gälte, ein wohlgefälliges Abtheilungsverhältniss geben kann*), ohne dass ihm aber eine so durchgreifende und überwiegende ästhetische Bedeutung, als Zeising demselben beilegt, zukommt.

Mein Urtheil in dieser Beziehung ist sehr unbefangen. Von vorn herein gestehe ich, mit dem grössten Misstrauen gegen eine ästhetische Bedeutung des goldnen Schnittes überhaupt an die Untersuchung darüber gegangen zu sein, einmal, weil es mir nach schon gemachter Bemerkung seltsam schien, dass sich seine Bedeutung, wäre sie so gross, wie Zeising will, nicht längst vor Zeising sollte geltend gemacht haben, nachdem die von Zeising doch viel geringer geschätzte Symmetrie ihren Vortheil von jeher hat empfinden lassen, zweitens aus den angegebenen kritischen Gesichtspunc-

*) Von einer noch nicht hinreichend geprüften Möglichkeit in dieser Hinsicht, welche dem goldnen Schnitt immerhin auch als Abtheilungsverhältniss eine wichtige, nur nicht die von Zeising beigelegte fundamentale, sondern gegen die Symmetrie entschieden zurückstehende, Bedeutung lassen würde, spreche ich selbst unten (S. 30.)

ten. Und so glaubte ich, Zeisings Ansicht durch die einfachsten Versuche nach den folgends anzugebenden Methoden leicht widerlegen zu können*), fand mich aber überrascht, sie vielmehr in Bezug auf Dimensionsverhältnisse schlagend dadurch bestätigt zu finden; nur dass der Vortheil der Symmetrie viel entschiedener als der des goldnen Schnittes bleibt, so dass kleine, nicht durch Zweck oder Bedeutung gefoderte, Abweichungen von der Symmetrie viel missfälliger empfunden werden, als solche vom goldnen Schnitte, was man nach Zeisings Ueberhebung des goldnen Schnittes nicht vermuthen sollte, indess es allein erklärt, dass dessen Werth so lange unerkannt geblieben. Nachdem ich aber betreffs der Dimensionsverhältnisse keinem Zweifel mehr Raum geben konnte, dass Zeising wesentlich im Rechte sei, erwartete ich natürlich durch dieselben Methoden eine gleich schlagende Bestätigung für den Werth des goldnen Schnittes als Abtheilungsverhältniss zu finden, und fand mich nun gegentheils überrascht, sie nicht dadurch finden zu können. Erst aber, nachdem ich durch mehrfach abgeänderte Versuche der Enttäuschung in dieser Hinsicht zu begegnen gesucht, habe ich wohl oder übel bei dem obigen Urtheile stehen bleiben müssen.

Nun kann es freilich auffällig erscheinen, und hat mich selbst befremdet, dass für Abtheilungsverhältnisse nicht dasselbe Princip der Wohlgefälligkeit gelten soll, als für Dimensionsverhältnisse, zumal man meinen sollte, der goldne Schnitt müsse, als Abtheilungsverhältniss in einer und derselben Richtung verfolgt, noch leichter fasslich sein als durch die Rechtwinklichkeit der Dimensionen gebrochen. Doch werde ich weiterhin von einer möglichen Erklärung dieses Umstandes sprechen, und jedenfalls konnte folgender sehr einfache erfahrungsmässige Gesichtspunct schon ohne weitläufige Versuche darauf führen, dass factisch nicht dasselbe Zahlenprincip nach beiden Beziehungen gleich fundamentale Geltung hat.

Trotz Allem was Wolff zur Begründung des quadratischen Verhältnisses als ästhetischen Normalverhältnisses vorgebracht, sieht man das Quadrat in allen Verwendungen, wo es nicht durch besondere Mitbedingungen oder Zusammensetzungsweisen mit andern Formen

*) Hierin lag überhaupt der Ausgangspunct dieser ganzen Untersuchungen, da ich fand, dass sich auf solchen Wegen etwas finden lasse.

erträglich oder selbst wohlgefällig gemacht wird, als monotonste, trockenste, steifste, so zu sagen einfältigste Form vermieden; — man gehe in dieser Hinsicht nur die Werke der Tektonik durch; — auch Fenster, Grundrisse von Gebäuden, Dimensionen von Gemälden u. s. w. sind nur ganz ausnahmsweise quadratisch; und was so in den Verwendungen jedem unbefangenen Blicke offen liegt, wird sich durch meine Versuche am abstracten Quadrat in Vergleich mit abstracten Rechtecken bestätigt zeigen; nur in den ihm zunächst stehenden wie anderseits den gestrecktesten Rechtecken hat es Rivale der Ungefälligkeit, so dass man sagen kann, das quadratische Verhältniss, d. i. 1 : 1, sei als Dimensionsverhältniss, wenn nicht das ungefälligste überhaupt, doch sicher eins der ungefälligsten. Hiegegen wird man bei Abtheilung eines horizontal gestreckten Gegenstandes, abgesehn von Rücksichten der Verwendung, die wir hier überall ausschliessen, keine Theilung der symmetrischen, d. i. im Verhältniss 1 : 1 vorziehen; — man versuche es auch nur an der einfachsten Linie; — an horizontalgestreckte Gegenstände aber muss man sich hiebei halten, um allerlei associative Mitbestimmungen auszuschliessen, welche an der verticalen Lage hängen, sei es die Mitbestimmung durch die Vorstellung, dass oben etwas Leichteres sein müsse, als unten, oder dass das Untere als dienender Träger sich nicht so hoch erheben dürfe, als das davon Getragene, oder dass es gegentheils zu dienen habe, etwas seiner Bedeutung nach Hohes, seinem eigenen Höhenmasse nach Kleines recht hoch über die niedre Welt zu erheben, um es aus grosser Höhe darauf herabblicken zu lassen und dem objectiven Blicke aus grossem Umkreise frei zugänglich zu machen; woraus nach Umständen die Foderung, dass der obere oder dass der untere Theil der kleinere sein müsse, hervorgeht. Aber die eine wie andere Foderung ist schon der reinen Formwohlgefälligkeit fremd, und wo weder die eine noch andre Vorstellung mit besondrer Kraft auftritt, wie bei den gewöhnlichern Fensterkreuzen, den Ordenskreuzen, Medaillons u. s. w. kehrt die Symmetrie selbst in verticaler Richtung wieder; ja wer möchte eine kaleidoskopische Figur unsymmetrisch in verticaler Richtung sehen. Als Abtheilungsverhältniss ist also das einfachste rationale Verhältniss im grössten Vortheil, während es als Dimensionsverhältniss in eminentem, wenn nicht grösstem Nachtheil, hingegen ein irrationales Verhältniss in grösstem Vortheil

ist. Ein so fundamentaler Unterschied lässt weitere Unterschiede voraussehen, und giebt den Beweis, wie vorsichtig man mit Verallgemeinerungen in unserm Gebiete sein müsse. Auch erkennt Zeising selbst einen ästhetischen Vortheil der Symmetrie an, nur dass er ihn dem des goldnen Schnittes sehr nachsetzt. Und zuzugeben ist, dass der goldne Schnitt als Gleichheit zweier Verhältnisse etwas Höheres als die Symmetrie oder blosse Gleichheit nach zwei Seiten ist; aber damit ist noch nicht bewiesen, dass er in ästhetischem Vortheil dagegen ist.

Nun hätte sich recht wohl denken lassen, dass der goldne Schnitt, wenn nicht abstract von Mitbestimmungen überhaupt, doch unter den einfachsten Mitbestimmungen, wie sie durch die senkrechte Lage*) eingeführt werden, oder allgemeiner, unter solchen Mitbedingungen, welche eine ungleiche Theilung zwar begünstigen oder fodern, aber das Mass derselben in gewissen Gränzen frei lassen, den grössten Vortheil behaupte; aber auch hiefür habe ich weder an der abstracten Linie, noch an solchen einfachen Verwendungen, deren Wahl zwischen diesem oder jenem Verhältnisse der Höhenabtheilungen wesentlich nur durch Wohlgefälligkeitsrücksichten bestimmt scheint, eine Bestätigung erhalten können, sei es, dass ich Kreuze, ohne Rücksicht auf Verwendung und Bedeutung, oder als Schmuckkreuze vorgestellt, auf die vortheilhafteste Höhenstellung des Querbalkens untersuchte, — wobei sich zeigt, dass diese Stellung sich nach der Länge des Querbalkens ändert, dass aber bei dem vortheilhaftesten Längenverhältnisse desselben die vortheilhafteste Höhenstellung nicht die des goldnen Schnitts ist**), — oder dass ich die

*) Unter senkrecht schlechthin verstehe ich der Kürze halber hier wie folgends überhaupt eine auf die Verbindungslinie der Augen senkrechte Lage, unter horizontal eine damit parallele Lage. Erstere kann freilich auch in einer Horizontalebene stattfinden, doch macht die Senkrechte in unserm Sinne als Bild des Verticalen hier einen analogen Eindruck als dieses, wogegen die Horizontale in unserm Sinne in vollem Gegensatze dazu steht.

**) Zeising meint, bei ganz verschiedenen Längenverhältnissen des Querbalkens zum Längsbalken die Höhenstellung des Querbalkens nach dem goldnen Schnitte allgemein als Normalstellung beibehalten zu können, was eben so entschieden unrichtig ist, als dass diese Höhenstellung überhaupt die vortheilhaftest mögliche ist. Er hat S. 223 und S. 224 seiner N. L. sechs Kreuze a priori nach dem Princip des goldnen Schnittes als eine Art Normalkreuze construirt, indem er bei variirter Anwendung dieses Princips auf das Längenverhältniss von Querbalken zum Längsbalken überall (wenn nicht

vortheilhafteste Abtheilungsweise eines Fensters nach der Höhe durch die Querleiste des Fensterkreuzes, oder die vortheilhafteste Theilung eines denkmalartigen Steines in einen Untersatz und darauf gesetzten Stein von gleicher Querdimension, oder die vortheilhafteste Stellung eines Punctes über einem einfachen senkrechten Striche, als J gedacht, an schematischen Zeichnungen oder Herstellungsobjecten in verschiedenen Abänderungen nach den anzugebenden Methoden untersuchte.*)

Hält nun der goldne Schnitt als Abtheilungsverhältniss weder an der abstracten Linie, welche associativen und combinatorischen Mitbestimmungen so viel als möglich entzogen ist, noch in den einfachsten Verwendungen, wo der Zweck, die Bedeutung kein Hinderniss gegen die Erfüllung reiner Formwohlgefälligkeit ist und keine Willkühr in Anlegung des Masses stattfindet, Stich, so ist nicht wohl abzusehen, wie durch die von Zeising geltend gemachten complicirten Beispiele dafür bewiesen werden kann, bei welchen Mitbestimmungen mannichfacher Art und Willkühr in der Anlegungsweise der Masse ein unberechenbares Spiel treiben.

Hiegegen erinnert man vielleicht, dass eben die Einfachheit dieser Beispiele den goldnen Schnitt verhindere, seinen Vortheil dabei geltend zu machen. Sei er doch an sich ein höheres complicirteres Verhältniss als die Symmetrie, also könne er auch seinen ästhetischen Werth erst in höheren Zusammensetzungen, mithin in complicirteren Beispielen entwickeln. Aber zuvörderst weiss ich nicht, auf welches rationale oder Erfahrungsprincip man den Satz stützen will, dass ein Verhältniss, je zusammengesetzter es ist, um so mehr des Eingehens

---

vielleicht bei Fig. 56 Gleichtheilung gemeint ist) die Höhenabtheilung nach dem goldnen Schnitte beibehält. Nach meinen Versuchen sowohl an linearen Kreuzen wie Kreuzen von verschiedenen Balkenbreiten kann ich jedoch diesen Constructionen gar keinen ästhetischen Normalwerth zuschreiben, und das Kreuz, was Zeising nach seiner Theorie unter allen am meisten vorzieht (Fig. 55) ist thatsächlich nicht das am meisten Vorgezogene.

*) Abänderungen sind namentlich bei den schematischen Figuren, wodurch Kreuze, Fenster und Steine vorgestellt werden, aus dem Gesichtspuncte nöthig, dass das Abtheilungsverhältniss eine combinatorische Mitbestimmung durch das Verhältniss von Höhen- und Breitenausdehnung der Figur erleidet, wo dann zu prüfen ist, wiefern sich der Vortheil oder Nachtheil eines gegebenen Abtheilungsverhältnisses durch die Variationen des Verhältnisses von Höhe und Breite forterhält. Beim J-Versuche fällt eine solche Complication weg, und der Versuch ist nur mit verschiedenen absoluten Längen des senkrechten Striches vorzunehmen.

in noch zusammengesetztere Verhältnisse bedürfe, um einen ästhetischen Vorzug vor einem einfacheren merkbar werden zu lassen. Ein Accord beweist doch seinen Vortheil vor dem einfachen Tone schon ohne in ein Musikstück einzugehen. Entschieden aber wird dieser Ausweg dadurch abgeschnitten, dass dann auch der Vortheil des goldnen Schnittes als Dimensionsverhältniss nicht an ganz abstracten einfachen Rechtecken hätte constatirt werden können, wie mir doch gelungen ist. Man beweist nichts, wenn man zu viel beweist. Dass der Vortheil des goldnen Schnittes, in so weit ein solcher überhaupt anzuerkennen ist, durch Eingehen in Verwendungen überhaupt gesteigert werden könne, habe ich selbst schon bemerkt; nur muss ein Vortheil schon ohne Rücksicht auf Verwendungen da sein, was man sich an den früher (S. 5) gebrauchten Beispielen von Reim und Versmass im Gedichte, oder Wohllaut und Tact in der Musik erläutern kann.

Hiezu noch folgender einfacher Versuch, den ich vorwegnehme, da er mit dem entschiedensten Ergebnisse von jedem sofort angestellt werden kann. Nach Zeising beruht die menschliche Formschönheit (abgesehen von dem dieselbe erhöhenden Ausdruck vortheilhafter körperlicher und geistiger Eigenschaften) wesentlichst auf der Durchbildung des goldnen Schnittes in Hauptabtheilungen und Unterabtheilungen. Nun stelle man die Hauptabtheilungen des Körpers nach dem goldnen Schnitt mit den nächsten Unterabtheilungen, wie sie Zeising für den menschlichen Körper statuirt, in einem stehenden Rechtecke*) schematisch durch horizontale Theilstriche dar, gebe demnach der obern Hauptabtheilung zur untern das Verhältniss 5:8 oder 8:13, was merklich identisch ist, und wiederhole dieses Verhältniss der Theilung in der untern wie obern Hauptabtheilung durch eine Unterabtheilung, so dass in der obern Abtheilung der Minor, in der untern der Major die obere Stelle hat, mithin der Major in beiden Abtheilungen dem Trennungsstriche beider anliegt: das giebt ein Rechteck mit vier einfachen Höhenabtheilungen, welche durch drei Querstriche getrennt sind. Daneben stelle man ein übrigens ganz gleiches Rechteck, nur dass alle vier Abtheilungen einander gleichgemacht sind, mithin das Ganze nicht minder in der Höhen-

*) Ich habe theils ein solches von dem Seitenverhältnisse des goldnen Schnittes, theils von 2 : 1 dazu verwandt.

richtung als Breitenrichtung symmetrisch erscheint. Nach der obigen Hypothese sollte der goldne Schnitt durch seine zusammengesetzte Durchführung einen Vorzug der Wohlgefälligkeit vor der Abtheilungsweise in gleiche Theile entwickeln, wenn ein solcher nicht schon bei der einfachsten Theilung nach dem goldnen Schnitte spürbar war; aber eher kann man sagen, dass sich ein Nachtheil entwickelt; man findet diese Abtheilung principlos, unmotivirt, sozusagen liederlich, und giebt der gleichen Theilung den entschiedenen Vorzug, ein Beweis, dass das ästhetische Urtheil beim Vergleich dieser abstractesten Theilungsweisen doch nicht müssig ist; nur ist es eben nicht der goldne Schnitt, für den es sich entscheidet. Uebrigens fällt es mir nicht ein, die Schönheit des menschlichen Körpers auf die gesuchte Durchführung einer Höhen-Abtheilung in gleiche Theile zu beziehen; sie hängt in etwas an der zweiseitigen Symmetrie und dem später zu besprechenden Princip der Mitte, unterstützt durch einen allgemeinen Vortheil rundlich fliessender vor steifen eckigen Formen, in der Hauptsache an instinctiven und associativen Mitbestimmungen, wovon aber hier kein Anlass ist zu sprechen.

Schliesslich ist das allgemeinste und Hauptresultat, wozu ich durch die Gesammtheit meiner bisherigen Versuche geführt bin, — von so manchen interessanten Nebenbestimmungen spreche ich hier nicht — dieses:

Als Dimensionsverhältniss hat nur ein Verhältniss einen fundamentalen ästhetischen Werth an sich selbst, der sich in den Dimensionen einfacher Rechtecke einfach herausstellt, der goldne Schnitt; indem nach Massgabe als er verlassen wird, das Verhältniss ungefälliger wird, ohne dass die bei der Abänderung mit unterlaufenden einfachen rationalen Verhältnisse 1 : 1, 1 : 2 u. s. w. irgend eine Erhöhung der Wohlgefälligkeitscurve mitführen; ja das einfachste, an der einen Gränze der Abwandlung stehende Verhältniss 1 : 1, was als Dimensionsverhältniss das Quadrat giebt, theilt sich mit den nächst stehenden sehr kurzen und der anderen Gränze (1 : ∞) zustrebenden sehr langen Verhältnissen*) in den grössten Nachtheil. Ebenso hat als Abtheilungsverhältniss nur ein Verhältniss einen fundamentalen ästhe-

*) In Kürze bezeichne ich hier und folgends als langes und kurzes Verhältniss oder Rechteck respective ein solches, wo die eine Seite ein grosses Verhältniss zur andern hat, oder sich der Gleichheit damit nähert, wenn nicht dieselbe erreicht.

tischen Werth, dasselbe, was als Dimensionsverhältniss zu den unvortheilhaftesten gehört, das Verhältniss 1 : 1, was die Symmetrie giebt, und sich frei von associativen Mitbestimmungen an der einfachen horizontalen Linie als vortheilhaftestes rein und klar herausstellt, indem nach Massgabe als es verlassen wird, das Verhältniss ungefälliger wird, ohne dass der bei dieser Abänderung mit unterlaufende goldne Schnitt eine Erhöhung der Wohlgefälligkeit mitführt. Aber durch associative und combinatorische Mitbestimmungen können die vorigen Sätze Abänderungen erleiden, deren allgemeine Gesetze noch zu studiren sind. Doch scheint mir nach meinen bisherigen, nur in dieser Beziehung noch nicht hinreichend ausgedehnten, Versuchen unter Bedingungen, welche eine Ungleichheit der Abtheilung begünstigen oder fodern, ohne einen bestimmten Grad derselben zu fodern, das Verhältniss 1 : 2 einen merkbaren Vorzug vor dem goldnen Schnitt und andern Verhältnissen zu zeigen, was, wenn es einen allgemeinern und sicherern Ausdruck zulassen sollte, als ich ihm schon jetzt zu geben vermag, in gewisser Weise als eine Ausdehnung des Princips der einfachen rationalen Zahlen angesehen werden könnte, und darauf deuten würde, dass die Leichtigkeit, mit der wir durch das Auge die Abtheilung 2 in zwei Unterabtheilungen zerlegen, deren jede der Abtheilung 1 gleich ist, wodurch die Symmetrie in der Vorstellung hergestellt wird, eine Rolle bei diesem Vortheile spielt.

Von anderer Seite halte ich es noch für möglich, dass der goldne Schnitt auch als Abtheilungsverhältniss einen Vortheil geltend macht, wenn man ihn mit sich selbst in solcher Weise zusammensetzt, dass die Störung der Symmetrie dadurch wegfällt, welche jedenfalls die obere Rücksicht in Anspruch nimmt; und manche Beispiele, die Zeising anführt, treten unter diesen Gesichtspunct. Man verwirklicht diesen Fall, wenn man mit einer nach dem goldnen Schnitte zweigetheilten Form die entsprechende Form symmetrisch verbindet, oder in anderer Weise, wenn man von einer dreitheiligen Form dem mittleren Theile das Verhältniss des goldnen Schnittes zu jedem beider Seitentheile giebt. Einige nicht ausdrücklich darauf gerichtete Versuche mit in einander geschachtelten Rechtecken aus früherer Zeit, deren ich in der oben (S. 21) citirten Abhandlung im Archiv für zeichnende Künste beiläufig gedachte, würden freilich einer solchen Vermuthung widersprechen; doch kann ich ihnen

jetzt kein Gewicht mehr beilegen, da ich mich eines Versehens an einem Probeobjecte, auf das ich bei jenen vorläufigen Versuchen Gewicht legte, schuldig bekennen muss. Die Frage ist vielmehr noch als intact anzusehen, und ich werde selbst neue Versuche darauf richten. Zeising freilich misst dem goldnen Schnitte als Abtheilungsverhältniss nicht blos eine solche, der Symmetrie untergeordnete, Bedeutung bei, sondern eine höhere übergeordnete, die sich schon bei der einfachen Theilung danach aussprechen soll. Auch ist nicht ausgeschlossen, dass Zeising noch ein anderes combinatorisches Princip finde, nach welchem der goldne Schnitt ohne Mitwirkung der Symmetrie durch Eingehen in gewisse Zusammensetzungen einen ästhetischen Vorzug erhält, nur ist es eben erst noch zu finden.

Wenn die vorhin aufgestellte Vermuthung Bestätigung finden sollte, was ich doch bis jetzt noch ganz dahinstelle, so würden sich Dimensions- und Abtheilungsverhältnisse allerdings unter einem gewissen einheitlichen Principe vereinigen. Die Symmetrie hat hienach abgesehen von allen Mitbestimmungen, sei es, dass es sich um Dimensionen oder Abtheilungen handelt, das ästhetische Princip at, und will vor Allem gewahrt sein, was bei Rechtecken eben so wohl der Fall ist, als beim Quadrat, den erstern aber den Vortheil einer grössern Mannichfaltigkeit der Formbestimmungen lässt; daher allgemeingesprochen der Vorzug der Rechtecke vor dem Quadrate. Bei sehr verlängerten Rechtecken jedoch kehrt die Monotonie des Quadrats in anderem Sinne wieder, indem das Auge statt bei der Wendung derselben Länge wieder zu begegnen, dieselbe Richtung lange zu verfolgen hat. Wird nun aber der goldne Schnitt so angewandt, dass er die Symmetrie nicht stört, so macht er seinerseits einen ästhetischen Vortheil vor andern Verhältnissen geltend, nimmt in so fern die zweite Stelle nach der Symmetrie ein und kann den Vortheil der Symmetrie wesentlich erhöhen. Hieraus würde sich vortrefflich erklären, warum der im Rechteck gebrochene goldne Schnitt einen Vorzug verräth, indess er ihn als eine einfache Abtheilung in continuo verfolgt nicht verräth. Als Seitenverhältniss eines Rechtecks stört er die Symmetrie nicht, als einfaches Abtheilungsverhältniss stört er sie. Doch wie gesagt ist über die Richtigkeit der hier aufgestellten Vermuthung noch nichts entschieden.

So wenig ich mich hienach mit der Ausdehnung, welche Zei-

sing der ästhetischen Bedeutung des goldnen Schnitts giebt, mit der Uebertreibung der Wichtigkeit dieser Bedeutung und mit der unzulänglichen Weise, wie er dieselbe zu begründen sucht, einverstehen kann, bin ich doch weit entfernt, das Verdienst, dass er diese, bis zu gewissen Gränzen gesicherte, Bedeutung überhaupt entdeckt hat, zu unterschätzen; ich halte es für die erste eigentliche Entdeckung, die überhaupt in der Aesthetik gemacht ist, sie wird Zeisings Namen in der Geschichte der Aesthetik rühmlichst forterhalten, und leichter ist es, eine Entdeckung zu constatiren, zu beschränken und zu verschärfen, als sie zu machen. Selten wird überhaupt vom Autor einer Entdeckung von vorn herein der richtige Massstab an dieselbe gelegt, und der Weg, auf dem sie gemacht wird, ist selten auch der Weg, auf dem sie sich forterhält, falls sie überhaupt haltbar ist. Auch darin ist ein besonderes Verdienst Zeisings anzuerkennen, dass er, so viel sich an seiner Weise das Erfahrungsmaterial zu verwerthen, mäkeln lassen mag, doch das Bedürfniss, solches seinen allgemeinen Ansichten zur Bestätigung unterzubreiten, mehr als alle früheren Bearbeiter empfunden und durch die Herbeischaffung eines reichen Schatzes desselben zu befriedigen gesucht hat.

III. Ueber einige der interessanteren Eigenschaften des goldnen Schnittes. Literatur der Zeisingschen Untersuchungen darüber.

Bei der Wichtigkeit, welche der ferner kurz mit ⊙ zu bezeichnende goldne Schnitt für uns hat, dürfte es nicht ohne Interesse sein, vor weiterem Eingehen in unsere Untersuchungen, einige der interessanteren Eigenschaften und Verhältnisse desselben hier zusammengestellt zu finden, welche zu grösserem Theile schon von Zeising bemerkt sind, wozu sich jedoch hier noch einige haben fügen lassen. Man muss in der That gestehen, dass nächst den Verhältnissen π und e (nach gewöhnlicher mathematischer Bezeichnung) das Verhältniss ⊙ das merkwürdigste sein möchte, was die mathematische Analyse überhaupt darzubieten hat.

1) Als Approximationsverhältnisse in ganzen Zahlen zu dem eigentlich irrationalen Verhältnisse des ⊙ sind oben geltend gemacht 3:5, 5:8, 8:13 u. s. w. Nach folgender Regel lässt sich diese Approximation leicht beliebig weiter treiben oder auch zu unvollkommenern Approximationen in ganzen Zahlen zurückgehen. Man setzt die grössere der beiden Zahlen einer gegebenen Approximation mit der Summe beider in Verhältniss, wodurch man von 13:21 successive auf 21:34, 34:55, 55:89 u. s. w. kommt, oder man setzt die Differenz beider Zahlen mit der kleineren von beiden in Verhältniss, wodurch man zu den unvollkommenern Approximationen kommt. Hienach erhält man alle möglichen Approximationen in ganzen Zahlen durch Bezugsetzung von je zwei aufeinanderfolgenden Zahlen nachstehender Reihe zu einander:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 u. s. w.

Dabei ist nicht nöthig, die Reihe wie hier mit 0 und 1 anzufangen, sondern mit welchen zwei Zahlen man sie anfangen mag, wofern man nur jedes folgende Glied als Summe der zwei vorhergehenden nimmt, erhält man dadurch im Verhältniss je zweier auf einander folgenden Zahlen wachsende Annäherungen an den goldnen Schnitt, z. B. *)

1, 5, 6, 11, 17, 28, 45, 73, 118, 191 etc.

welchem decimal entspricht:

5:1,200; 1,833; 1,545; 1,647; 1,607; 1,622; 1,616; 1,618

2 Auf eine grössere Reihe von Decimalen verfolgt ist das Verhältniss des Minor zum Major dieses:

1 : 1,618033988750 oder

0,618033988750 : 1 oder

0,381966011250 : 0,618033988750

ableitbar aus dem genauen Ausdruck des $\odot = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, wovon das obere Vorzeichen das Verhältniss des Major zum Minor, das untere das umgekehrte Verhältniss giebt. Von den successiven Approximationen in ganzen Zahlen aber giebt abwechselnd die eine einen zu grossen, die andere einen zu kleinen Werth für das Verhältniss. Um den dadurch zu gewinnenden Grad der Approximation zu beurtheilen, diene folgende Tabelle:

*) Andere Beispiele s. bei Zeising N. V. S. 14.

		Minor	Major
Genauer goldner Schnitt	=	1,0000	: 1,6180 . . .
1 : 2	=	-	: 2,0000
2 : 3	=	-	: 1,5000
3 : 5	=	-	: 1,6667
5 : 8	=	-	: 1,6000
8 : 13	=	-	: 1,6250
13 : 21	=	-	: 1,6154
21 : 34	=	-	: 1,6191
34 : 55	=	-	: 1,6177 etc.

3) Die einfachst möglichen quadratischen Gleichungen mit reellen Wurzeln geben den genauen Ausdruck des ⊙ her, d. i.

$$x^2 - x - 1 = 0 \text{ und}$$
$$x^2 + x - 1 = 0.$$

Nach dem Begriffe des ⊙ nämlich soll sich der Minor = 1 gesetzt zum Major = x gesetzt verhalten wie der Major x zur Summe beider, also zu 1 + x. Diess giebt die Proportion

$$1 : x = x : x + 1$$

oder, wenn man den Minor = x, den Major = 1 setzt, die Proportion

$$x : 1 = 1 : 1 + x:$$

Die erste Proportion führt zur ersten Gleichung mit dem Werthe $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, die andere zur zweiten Gleichung mit dem Werthe $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$; beide Ausdrücke von x aber geben den Werth von ⊙ als Verhältniss von Major zu Minor oder von Minor zu Major mit positivem oder negativem Vorzeichen.

4) Einen andern genauen Ausdruck für den ⊙, als Verhältniss von Minor zu Major gefasst, erhält man (nach einer mir von Prof. Möbius gemachten Bemerkung) durch den einfachst möglichen Kettenbruch, nämlich

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + 1}}}} \text{ etc.}$$

welcher ins Unendliche fortgesetzt zugleich alle in obiger Reihe enthaltenen Annäherungsverhältnisse hergiebt, wenn man eine wachsende Zahl seiner Glieder zuzieht.

5) Man kann das Verhältniss des goldnen Schnitts auch durch eine geometrische Construction darstellen. Um nämlich eine gerade Linie *a* nach diesem Verhältnisse zu theilen, hat man nur nöthig, eine zweite halb so lange Linie *b* rechtwinklig an ein Ende von *a* anzusetzen, die freien Enden beider Linien durch eine Gerade *c* zu verbinden; dann die Länge der ersten Linie *a* auf dieser Verbindungslinie *c* von einem Ende derselben an abzutragen, dann den Rest von *c* als Major auf *a* zu übertragen; wozu der Rest von *a* alsdann den Minor bildet. Inzwischen dürfte man es immer praktischer finden, sich eines der obigen Zahlenverhältnisse zur Darstellung des goldnen Schnitts zu bedienen, da die principielle Genauigkeit der Construction doch auch in der Ausführung verloren geht und diese jedenfalls umständlicher ist.

Auf Grund der Irrationalität des goldnen Schnitts, welche keine absolut genaue Darstellung desselben in ganzen Zahlen gestattet, stellt Zeising (N. V. S. 4) die Ansicht auf, dass eine, wenn auch noch so geringe, Abweichung vom genauen Verhältnisse des goldnen Schnitts auch bei räumlicher Darstellung desselben principiell nothwendig sei, und leitet daraus die Nothwendigkeit solcher Abweichungen für Natur und Kunst ab; diess jedoch ist ein Irrthum. Die Unmöglichkeit, ein Verhältniss in ganzen Zahlen genau auszudrücken, steht seiner genauen Darstellung im Raume nicht im Mindesten im Wege, und es steht der goldne Schnitt so wie das Verhältniss der Kreisperipherie zum Durchmesser in der Möglichkeit, sich räumlich genau darstellen zu lassen, mit den rationalen Verhältnissen genau auf gleicher Stufe.

6) Damit, dass der Minor sich zum Major verhält wie der Major zur Summe des Minor und Major, ist zugleich mathematisch gegeben, dass der Ueberschuss des Major über den Minor sich zum Minor verhält, wie der Minor sich zum Major verhält, so dass man, beide Proportionen verbindend, sagen kann: im goldnen Schnitte sei eine stetige Proportion zwischen dem Ueberschuss des Major über den Minor, dem Minor, dem Major und der Summe des Minor und Major gegeben, der Art, dass jede dieser vier Grössen durch Multiplication mit derselben bestimmten Zahl (1,618) aus der vorherigen hervorgeht. Hieraus sind dann weitere Folgen, dass das Product aus Minor und Major gleich der Differenz der Quadrate von Minor und Major ist, so wie gleich dem Producte aus der Differenz in die Summe des Minor und Major.

7) In einem regelmässigen in den Kreis eingeschriebenen Fünfeck verhält sich die Seite des Fünfecks zum Radius wie Major zum Minor, und, sofern die Seite des regelmässigen Sechsecks gleich dem Radius des umschriebenen Kreises ist, verhält sich auch die Seite des regelmässigen Fünfecks zu der des regelmässigen Sechsecks wie Major zum Minor. Weitere Anwendungen, welche der goldne Schnitt in der Polygonometrie findet, bespricht Zeising in einer unten anzuführenden Abhandlung.

Schon den Alten war das Verhältniss des goldnen Schnittes unter diesem Namen bekannt und der Name selbst deutet dahin, dass schon sie ihm einen gewissen Vorzug vor andern Verhältnissen beilegten. Indess scheint dieser nur der mathematischen Eigenthümlichkeit des goldnen Schnittes gegolten zu haben, die ja der Art ist, dass man sich wohl denken kann, es sei auch von dieser Seite ein Vorzug daran geknüpft worden; wenigstens hat sich keine Nachricht von einer ästhetischen Bedeutung, die sie demselben beigelegt hätten, erhalten; und insoweit sich eine Anwendung des goldnen Schnittes in ihren Werken findet und derselbe wirklich ästhetisch massgebend ist, kann diess nur einer unbewussten Wirkung ihres Schönheitssinnes zugeschrieben werden. In neueren Zeiten ist auch die Beachtung des goldnen Schnittes mathematischerseits ganz zurückgetreten, nachdem die neuere Ausbildung der Mathematik zur Inbetrachtnahme vieler anderer Verhältnisse, von zugleich interessanter und nützlicher Anwendung geführt hat, ohne dass sich vor Zeising eine bemerkenswerthe Anwendung vom goldnen Schnitte dargeboten hätte.

Die allgemeine Betrachtung, durch welche Zeising (N. L. 133 ff.) zum irrationalen Verhältnisse des ⊙ als Normalverhältniss für Natur und Kunst gelangt, läuft nach Zusammenfassung etwas weit hergeholter philosophischer Vorerörterungen über den Begriff der Schönheit kurz etwa auf Folgendes hinaus.

»Das Schöne ist die als sinnlich-geistige Anschauung zur Präsenz gelangende Harmonie der Einheit und unendlichen Mannichfaltigkeit.« Insofern also ein Gegenstand durch seine Form (ohne Rücksicht auf angeknüpfte Bedeutungen) den Bedingungen der Schönheit entsprechen soll, muss er auch jener Bestimmung entsprechen. Auf einer niedern Stufe geschieht diess nun schon durch Gleich-

mass und strenge Regelmässigkeit der Form, und es ist diess »die einfachste und fasslichste, aber eben desshalb auch die oberflächlichste und dem tieferen Bedürfniss nicht genügende Erfüllung der Schönheitsbedingungen.« Auf höherer Stufe erfolgt diese Erfüllung dadurch, dass an die Stelle der Gleichheit der Theile die Gleichheit von Verhältnissen bei Ungleichheit der Theile tritt; und zwar ist die vollkommenste Weise der Erfüllung die, »dass das Verhältniss zwischen dem Ganzen und den Theilen kein andres ist, als dasjenige, durch welches die Theile selbst unter einander verbunden sind. Hiedurch wird inmitten der Verschiedenheit zugleich die Einheit zur Anschauung gebracht und ein wirklich stetiger Zusammenhang zwischen dem Ganzen und seinen Gliedern hergestellt.« »Da aber das Ganze bei der Voraussetzung, dass die Theile selbst von ungleicher Grösse sind, unmöglich zu beiden Theilen in demselben Verhältnisse stehen kann, so springt in die Augen, dass unter den Verhältnissen des Ganzen zu den Theilen nur das Verhältniss des Ganzen zum grösseren Theil, dagegen unter den Verhältnissen der Theile zu einander nur das Verhältniss des grösseren zum kleineren Theile gemeint sein kann.« In einer derartigen Proportionalität sieht Zeising »die Vermittlerin der Einheit und Mannichfaltigkeit, der Gleichheit und Verschiedenheit, der Nothwendigkeit und Freiheit«, findet dadurch »den Gegensatz von Einheit und Unendlichkeit, von Gleichheit und Verschiedenheit zur Harmonie aufgehoben« u. s. w., wie es im Begriffe höherer Schönheitsfoderung liege.

Als Vorzüge dieser Proportion, welche mit dem Begriffe der Vollkommenheit zusammenhängen, hebt Zeising (N. L. 163. N. V. 4) hervor: 1) dass sie (in Betracht ihrer Irrationalität) mit der grösstmöglichen Bestimmtheit und Realisirbarkeit die vollkommenste Unendlichkeit und Idealität vereinige;

2) dass sie nicht nur alle Vorzüge einer stetigen Proportion besitze, sondern jede andere stetige Proportion darin übertreffe, dass eins ihrer Glieder zugleich die Summe der beiden übrigen sei, dass sie mithin eine Gleichheit und Continuität der Verhältnisse zwischen dem Ganzen und seinen Theilen herstelle, und somit auf das Vollkommenste dem Begriff der Proportionalität überhaupt entspreche, welcher eine Uebereinstimmung der Verhältnisse verlange,

in welchen die Theile einerseits zu einander, anderseits zum Ganzen stehen;

3) dass sie nicht blos eine Vermittelung zwischen zwei willkührlich zusammengebrachten Grössen, sondern zwischen dem Ganzen und dem kleinern Gliede durch das grössere herstelle, also den Charakter einer zum Ganzen und seinen Theilen beziehungsvollen Nothwendigkeit trage;

4) dass durch sie die befriedigendste harmonische Vermittelung zwischen der völligen Gleichheit und einer allzugrossen Verschiedenheit der Theile von einander und vom Ganzen gesetzt, der natürlichste Uebergang von der Einheit zur Zweiheit und Mehrheit hergestellt werde (wie in N. L. S. 164 weiter ausgeführt wird);

5) dass dasselbe Verhältniss sich in Untergliederungen sehr leicht weiter verfolgen und fortsetzen lasse, wozu ebenfalls weitere Ausführungen;

6) dass »das Verhältniss des goldnen Schnitts als die vollkommenste Vermittelung und Ausgleichung aller übrigen denkbaren Verhältnisse, und hiemit als das naturgemässe allgemeine Durchschnitts- und Normalverhältniss anzusehen sei.«

Zeising hat den goldnen Schnitt an so vielen Orten besprochen, dass ich zweifle, die Literatur darüber vollständig geben zu können, indess ich auf die Anführung der Besprechungen Seitens Andrer in der Hauptsache um so mehr verzichten muss, als unsre Untersuchungen keine Berührungspuncte damit haben, und sie zu zerstreut sind, um sie nur mit annähernder Vollständigkeit registriren zu können. Ausser den schon S. 15 angeführten zwei Hauptschriften sind mir folgende Abhandlungen Zeisings über den goldnen Schnitt mindestens ihrem Titel nach und zum Theil durch eigene Einsicht darein bekannt.

Die Unterschiede in den Proportionen der Racentypen, in Vierordt's Arch. z. physiolog. Heilk. 1856.

Der menschliche Kopf im Profil, im Abendbl. zur neuen Münchn. Zeitung 1856. Nr. 18. 19. 20.

Die Proportionen von 4 antiken Statuen, in Eggers Kunstbl. 1856. S. 182.

Die Proportionen des Parthenon nach den Penrose'schen Messungen, im deutschen Kunstbl. 1857. Jahrg. 8. Nr. 48—51.

Zur Lehre vom menschlichen Gesichtswinkel, in der Halle'schen Zeitschr. »Natur«. 1857.

Ueber die Metamorphosen in den Verhältnissen der menschlichen Gestalt von der Geburt bis zur Vollendung des Längenwachsthums, in den Verhandl. der Kaiserl. Leopold. Carol. Akad. der Naturf. XVIII. 1858. S. 783.

Ueber den subjectiven und objectiven Charakter des Schönen, im Morgenbl. 1859. Nr. 32. 33.

Morphologische Studien, in Fichte's philos. Zeitschr. 1866. N. F. L. S. 82.

Die regulären Polyeder, in der Deutschen Vierteljahrsschr. Dec. 1869. S. 262.

Die Verhältnisse des Kölner Domes nach dem Grundriss von Franz Schmitz, in d. Beil. z. Augsb. allg. Zeitung. 1869. Nr. 216 bis 218.

Ausserdem hat Zeising das Allgemeinste seiner Lehre vom goldnen Schnitte auch in seinen »ästhetischen Forschungen« vorgetragen, und eine Discussion darüber mit Prof. Seydel in Leipzig geführt, welche sich in folgenden Aufsätzen bewegt:

Seydel: Noch einmal der goldne Schnitt, Sendschreiben an Zeising, in Fichte's Zeitschr. LI. 2. Heft (S. 301, Z. 3 v. u. lies derselben für denselben).

Zeising: Antwort von Zeising. Daselbst LII. 1. Heft.

Seydel: Die geistige Deutung des goldnen Schnittes, Rückantwort an Zeising daselbst. LIII. 2. Heft. *)

Zur geschichtlichen Vervollständigung möge noch folgender, mit Zeising gewissermassen rivalisirender, Versuche, Normalverhältnisse der Gestaltung für Natur und Kunst in bestimmten Zahlen aufzustellen, für Liebhaber solcher Versuche gedacht werden, ohne dass jedoch diese Versuche eine geschichtliche Bedeutung erlangt haben oder Aussicht haben, solche zu erhalten.

F. G. Röber beweist in einem Quartwerke mit 6 grossen lithographirten Tafeln **) aus aprioristischen Gründen, durch die Masse des menschlichen Skelets und alter Bauwerke, »dass das Siebeneck (oder das zur Construction des regelmässigen Siebenecks dienende gleichschenklige Dreieck, in welchem jeder Winkel an der Basis das Dreifache des Winkels an der Spitze) die

*) Persönlich hat mir der Verf. bemerkt, dass ihm erst hier die volle Klarheit der Darstellung gelungen sei.

**) Elementarbeiträge zur Bestimmung des Naturgesetzes der Gestaltung und des Widerstandes und Anwendung dieser Beiträge auf Natur und alte Kunstgestaltung von Friedr. Gottlob Röber, ehemaligem königl. sächs. Professor der Baukunst und Landbaumeister, nach s. Tode herausgegeben von s. Sohne Friedr. Röber, mit 6 lith. Taf. Leipzig. 1861.

Basis des höchsten Gestaltungselementes in der organischen Natur ist, dass in dieser Erkenntniss allein der wahre Grund der durch das ganze Alterthum gehenden hohen Verehrung und Heilighaltung dieser wichtigen Naturzahl (der Sieben) liegt«, und dass diese Erkenntniss auch massgebend für die Construction ägyptischer Denkmäler der Baukunst gewesen ist. Nicht minder als Zeising das Princip des goldnen Schnittes findet Röber das Princip des Siebeneck-Dreiecks auch in den Verhältnissen der Pflanzengestaltung und des Planetensystems wieder.

In einem noch grössern Quartwerke mit noch mehr lithographirten Tafeln (Zahlentafeln) *) sucht der kürzlich verstorbene Dr. Liharzik (in Wien) mit einem Aufwande aller ihm zu Gebote stehenden ethnographischen, mathematischen, historischen und anthropologischen Hülfsmittel zu beweisen, dass der Schlüssel des Zahlengebäudes, welches die Gestaltung und Entwickelung der Welt, insbesondere auch des Menschen, beherrscht, in den sog. magischen oder Zauberquadraten zu finden sei, ohne dass er jedoch auf eine ästhetische Bedeutung dieses Zahlensystems besonders eingegangen ist.

In diesem Werke, in das ich gestehe mich mit einem sehr flüchtigen Einblick begnügt zu haben, ist S. 2 eine im Journal »The future« von Lake Burke im Mai 1862 erschienene philosophische Abhandlung unter dem Titel: »The plan of the universe« mit der Bemerkung erwähnt, es sei darin die Behauptung aufgestellt und durch philosophische Forschung zu beweisen gesucht, dass die Zahlen 1. 2. 3. 5. 7. 9. 12 dem Bau des Universums vorstehn; ferner werde darin gezeigt, wie alle Naturerscheinungen im Weltall sich in gewissen Gruppen bewegen, welche durch die genannten Zahlen beherrscht erscheinen; wie durch sie auf die Gesetze der Akustik, die Classificationen der Naturgeschichte, die Thatsachen der Anatomie, der Physiologie u. s. w. der wichtigste Einfluss geübt werde.

*) »Das Quadrat, die Grundlage aller Proportionalität in der Natur und das Quadrat aus der Zahl Sieben die Uridee des menschlichen Körperbaues, von Franz Liharzik, Dr. der Medicin u. s. w. Wien 1865.«

IV. Principien der experimentalen Untersuchung, Mass und Methoden.

Folgendes die Betrachtung, von der ich bei diesen Untersuchungen ausgegangen bin.

Gesetzt, es gälte zu beweisen, dass die Symmetrie an sich wohlgefälliger als die Nichtsymmetrie ist, so hätte man nicht an Bauwerke und den menschlichen Körper zu appelliren; da möchte der Beweis immer zweifelhaft bleiben, so viel man messen wollte. Nach horizontaler Richtung herrscht die Symmetrie in diesen Beispielen vor, nach verticaler fehlt sie, ausnahmsweise selbst nach horizontaler; und fraglich bleibt, was dabei auf Wohlgefälligkeit an sich, was auf Zweckmässigkeit und andere Mitbestimmungen zu rechnen. Aber man kann die Entscheidung durch die einfachste vergleichsweise Vorlage symmetrischer und nicht symmetrischer Figuren erhalten, von denen möglichst Alles abgesondert ist, was ausser der Symmetrie und Nichtsymmetrie noch auf den Vorzug des Gefallens Einfluss haben kann. Jedes nicht gar zu kleine Kind wird die einfache symmetrische Figur der nicht symmetrischen, die kaleidoskopische Ordnung bunter Steinchen ihrer Untereinanderwürfelung vorziehen, jeder Erwachsene beistimmen. Warum nun nicht eben so einfach über den Vorzug des goldnen Schnittes oder der einfachen rationalen Verhältnisse vor andern Verhältnissen entscheiden? Thut es der goldne Schnitt der Symmetrie an Wohlgefälligkeit gleich oder überbietet er sie gar, so muss sich diess auch schon bei Versuchen mit einfachen Rechtecken und Abtheilungen einfacher Längen oder Streifen zeigen, wo keine Wahl zwischen einer verschiedenen Anlegungsweise der Masse und keine Mitbestimmung durch Zweckrücksichten u. s. w. statt findet, oder alle philosophische Begründung und empirische Berufung auf complicirte Beispiele fruchtet nicht.

Auch wenn der Vorzug directer Wohlgefälligkeit des Tactes vor der Tactlosigkeit, d. i. der Regel vor der Regellosigkeit in Wiederholung von Toneindrücken oder Bewegungen, bewiesen werden sollte, würde die Berufung auf die Leistungen des Tactes in der Musik und beim Tanze nicht entscheiden, da es gegentheils manche Geschäfte

giebt, die ihrer Natur nach besser ohne bestimmten Tact ausgeführt werden, wo uns die gesuchte Durchführung des Tactes vielmehr missfällt, so schon bei der freien Rede; denn hienach könnte man umgekehrt auf Missfälligkeit des Tactes schliessen. Aber der einfachste Vergleich eines bedeutungslosen, sei es rhythmisch gegliederten oder selbst ganz einförmigen, Tactschlages mit einem das Zeitmass regellos wechselnden Schlage oder Geräusche (wozu tactförmiges und regelloses Trommeln mit den Fingern dienen kann), führt zur Entscheidung, bei der nicht mehr die Frage ist, ob es das Eingehen in eine, das ästhetische Gefühl aus andern Gesichtspuncten interessirende, Beschäftigung und die Förderung dieser Beschäftigung, oder die Beschäftigung durch den Tact selbst ist, was denselben wohlgefälliger als die Tactlosigkeit erscheinen lässt.*) Ist aber die Entscheidung für den Vortheil des, von ästhetischen Mitbestimmungen entleerten, Tactes solchergestalt gewonnen, so kann man dann seine Leistung auch beim Zutritt von solchen voraussehen, nicht freilich nach einfacher Zufügung dessen, was er für sich leistet, zur Leistung der Mitbestimmungen, aber unter Zuziehung des ästhetischen Hülfsprincipes; wonach er die Wohlgefälligkeit jedes Geschäftes, in das er fördernd oder verträglich hineintritt, sogar mehr steigern wird, als man nach seiner abstracten Leistung voraussetzen könnte, indess seine Wohlgefälligkeit sonst durch die Missfälligkeit der Hinderung des Geschäftes leicht überboten wird.

Ich habe hier Beispiele vorgeführt, bei denen die Entscheidung über den Vortheil directer Wohlgefälligkeit nach einer bestimmten Seite leicht und einfach ist, weil der Vortheil verhältnissmässig gross ist. Das ist aber nicht überall der Fall. Niemand von gesunder Empfänglichkeit wird die Asymmetrie der Symmetrie, die Tactlosigkeit dem Tacte bei reinem Vergleiche ihrer directen Wirkung vorziehen,

*) Man bemerkt vielleicht hiegegen, dass ein fortgesetzter leerer Tactschlag ermüdend langweilig sei. Das ist wahr, aber auch das schönste Kunstwerk langweilt, wenn man es fortgesetzt betrachten soll; ein regellos den Tact wechselnder bedeutungsleerer Schlag aber wird auf die Länge nicht blos langweilig, sondern unausstehlich und greift die Nerven an. Mag man also den Vergleich des Tactes mit dem regellos wechselnden Geräusche oder Schlage auf kurze oder lange Zeit ausdehnen, immer wird der erste in Vortheil bleiben, und dieser Vortheil constatirt werden können, ohne dass man ein tactmässiges Geschäft mit einem tactlosen vergleicht.

während nichts weniger als alle bei entsprechendem Vergleiche den goldnen Schnitt als Dimensionsverhältniss den davon abweichenden Verhältnissen vorziehen, weil sein Vortheil verhältnissmässig minder gross ist, ungeachtet er einen Vortheil hat. Aber das ändert das Princip möglichster Isolirung directer Wirkung bei den Versuchen nicht, soll überhaupt über die directe Wirkung ins Klare gekommen werden, sondern lässt um so mehr auf der Isolirung bestehen, und führt nur mit, dass, während es bei obigen Beispielen keiner grossen Anzahl von Stimmen bedarf, um die Entscheidung sicher zu stellen, sofern Alle sich in derselben Richtung und Entschiedenheit des Vorzugs vereinigen, man hier auf wenige Stimmen nichts Sichres bauen kann, weil ohne festgebotene Mitbestimmungen doch zufällige Mitbestimmungen von Innen und Aussen ins Spiel treten, welche einen geringen Vortheil der Wohlgefälligkeit an sich eben so leicht gegenwirkend überbieten als gleichsinnig wirkend steigern, hiemit das Vorzugsurtheil leicht auch auf ein an sich minder wohlgefälliges Verhältniss, dem aber günstigere zufällige Mitbestimmungen zu statten kommen, fallen lassen können. Also hat man das Urtheil möglichst Vieler zuzuziehen, wobei Folgendes in Rücksicht kommt.

Je grösser allgemein gesprochen die Wohlgefälligkeit eines bestimmten Verhältnisses an sich ist, desto schwerer werden es gegenwirkende zufällige Mitbestimmungen finden, die Wirkung dieser Wohlgefälligkeit zu überbieten, desto leichter die gleichsinnig wirkenden, das Uebergewicht seiner Wohlgefälligkeit über andre Verhältnisse fortzuerhalten, indem sie es sogar steigern; also werden desto mehr Personen es andern vorziehen; die meisten aber dasjenige unter allen vorziehen, welches unter allen das an sich wohlgefälligste ist.*) Wenn die Wohlgefälligkeit eines bestimmten Verhältnisses an sich sehr überwiegend gegen die Wohlgefälligkeit der mit ihm concurrirenden Ver-

*) Die Wahrscheinlichkeit nämlich, dass zufällige Einflüsse in gleichem Sinne bis zu einem gewissen Werthe zusammentreffen, wird um so geringer, je grösser dieser Werth ist; und hängt nach einem gewissen Gesetze von dessen Grösse ab. Also haben auch die, einem Ueberschusse directer Wohlgefälligkeit entgegenwirkenden, zufälligen Mitbestimmungen um so weniger Wahrscheinlichkeit, bis zu der Grösse zu gelangen, wodurch sie diesen Ueberschuss über ein concurrirendes Verhältniss compensiren oder überbieten, und mithin das concurrirende Verhältniss vorziehen lassen, je grösser der Wohlgefälligkeitsüberschuss darüber an sich ist.

hältnisse ist, so werden gegenwirkende zufällige Mitbestimmungen überhaupt nicht vermögen, diess Uebergewicht zu überwinden, dann wird das betreffende Verhältniss sogar immer und von Allen vorgezogen werden; wogegen, wenn sein directes Wohlgefälligkeitsübergewicht verschwindend klein oder null gegen die concurrirenden wäre, die zufälligen Mitbestimmungen es eben so leicht finden, das Uebergewicht nach der einen als andern Seite zu lenken, so dass das betreffende Verhältniss eben so oft andern vorgezogen als andern nachgesetzt wird. Allgemein also wird die relative Zahl der Bevorzugungen eines Verhältnisses mit dem Grade der Wohlgefälligkeit, welchen dasselbe abgesehen von zufälligen Mitbestimmungen hat, wachsen und abnehmen. *)

Hierauf nun gründet sich unser Mass, gründen sich unsre Aufgaben und unsere Methoden wie folgt:

Direct kann man den Grad der Wohlgefälligkeit oder Missfälligkeit, unter dem ein Verhältniss diesem oder jenem unter diesen oder jenen Umständen erscheint, nicht messen; dazu gälte es ein Mass der Einzel-Lust und Unlust zu haben, was wir noch nicht haben; aber man kann das Mass andershin übertragen, indem man die Personen zählt, die dem einen und die dem andern Verhältnisse bei gleichzeitiger Vorlage derselben oder überhaupt gleicher Möglichkeit der Wahl den Vorzug geben, und dasjenige Verhältniss für das wohlgefälligste zunächst für die Klasse von Personen, die man zu den Versuchen zugezogen hat, erklärt, welches die meisten Vorzugsstimmen für sich vereinigt, oder, wenn es nicht mit vorliegt, ein solches, um welches sich die Vorzugsstimmen am dichtesten schaaren **), überhaupt aber den Grad der relativen Wohlgefälligkeit eines gegebenen Verhältnisses für eine gegebene Menschenklasse nach der relativen Zahl der sich dafür vereinigenden Stimmen dieser Klasse beurtheilt. Wiefern ein solches Urtheil allgemeinere massgebende Bedeutung in Anspruch nehmen kann, wird weiterhin erörtert.

Gegen diess Mass der Wohlgefälligkeit wird sich insofern kein Einwand aus aprioristischem Gesichtspuncte erheben lassen, als es

*) Dass hiebei keine Proportionalität vorausgesetzt wird, ist weiterhin besprochen.

**) Von der Bestimmung eines solchen Verhältnisses wird es sich weiterhin noch genauer handeln.

durch die Definition selbst a priori festgestellt ist. Ich nenne nämlich nicht nur etwas nach Massgabe wohlgefälliger, als es unter vergleichbaren Bedingungen mehr Vorzugsstimmen für sich vereinigt, sondern stelle auch ausdrücklich den Begriff grösserer oder geringerer Wohlgefälligkeit darauf; und rechtfertige diess von einer Seite dadurch, dass es dem natürlichen Sprach- und Begriffsgebrauche wirklich entspricht, etwas für wohlgefälliger zu erklären, was die Eigenschaft hat, Mehreren wohlzugefallen, anderseits durch die dadurch gebotene und bisher auf keine andere Weise zu erzielende Möglichkeit, den Massbegriff überhaupt in die Aesthetik einzuführen, endlich durch die Vortheile der Einführung dieses Masses. Denn jedenfalls ist es ein fundamentales und für die Aesthetik fundamental wichtiges Datum, zu wissen, in welcher Relation sich die bevorzugenden Stimmen auf jeden Grössenwerth eines hinsichtlich seiner Wohlgefälligkeit zu beurtheilenden Verhältnisses vertheilen, und so dient es nur der Kürze, statt mit vielen Worten beispielsweise zu sagen, dass ein Verhältniss doppelt so viel bevorzugende Stimmen vereinige, als ein anderes, zu sagen, dass es doppelt so wohlgefällig gefunden werde. Auch lassen sich die so erhaltenen Masszahlen nicht minder in die Rechnung einführen und dadurch verwerthen, als irgend welche andere Masszahlen, indess sonst Angaben über ein Mehr oder Weniger der Wohlgefälligkeit ganz unbestimmt bleiben.

Zwar kann man aus allgemeinem Gesichtspuncte bemerken, dass, wenn eine Person von zwei Verhältnissen das eine, eine andere Person das andere vorzieht, das Uebergewicht des Wohlgefallens, d. h. der Lust, die den Vorzug bei Auffassung des einen und andern Verhältnisses bestimmt, bei der einen Person grösser sein kann, als bei der andern, und sollte es bei der geringeren Zahl von Personen, welche ein Verhältniss vorzieht, überall grösser sein, als bei der grössern Zahl, welche das andere vorzieht, so könnte die Lust der Auffassung des ersten Verhältnisses Seitens der geringeren Zahl doch im Ganzen überwiegen. *) Aber abgesehen, dass wir bei Zuziehung einer grossen

*) Diese Betrachtung führt darauf, Lustquanta überhaupt zu vergleichen, indess es der gewöhnlichen Betrachtung Schwierigkeiten machen mag, solche nur zu statuiren, oder einen Begriff damit zu verbinden. Wir umgehen nun diese Schwierigkeit mit unserm Masse, doch mag beiläufig mit einigen Worten gezeigt werden, dass eine principielle Schwierigkeit in dieser Hinsicht eigentlich nicht besteht. Da sich von grösserer und kleinerer Lust sprechen lässt, so muss sich auch von gleicher Lust sprechen lassen; und wenn nun 10 Menschen gleiche Lust an Etwas haben, so ist

Zahl von Individuen jenes »überall« gar nicht voraussetzen dürfen, bleibt schon die Zahl der Bevorzugungen rücksichtslos auf die Intensität des dabei zur Geltung kommenden Gefühles der einzelnen Subjecte, ein Element, was messend in Betracht gezogen zu werden verdient. So kann man die Zahl der Regen in einem gegebenen Monat des Jahres ohne Rücksicht auf die Reichhaltigkeit des Regens messen, und hat daran schon ein nützliches meteorologisches Datum.

Bei alledem dürfte es nützlich sein, unser Mass der Wohlgefälligkeit als Mass der extensiven Wohlgefälligkeit oder extensives Mass der Wohlgefälligkeit von einem erst noch zu findenden Masse der intensiven Wohlgefälligkeit oder intensiven Masse der Wohlgefälligkeit zu unterscheiden, welches direct auf den Grad der Lust (oder auf Unterschiede im Grade der Lust) geht, die durch eine gegebene Ursache bei den Einzelnen oder im Durchschnitt der Einzelnen erweckt wird, ein Mass, welches nach den S. 43 geführten Betrachtungen als in Abhängigkeit von der Zahl der Bevorzugungen, hiemit vom extensiven Masse der Wohlgefälligkeit anzusehen, aber ihm desshalb doch nicht proportional zu setzen ist. *) Man kann hoffen,

selbstverständlich das Quantum oder die Summe dieser Lust zehnmal so gross, als die Lust jedes Einzelnen von den Zehn. Nun ist allerdings die durch dieselbe Ursache erregte Lust von 10 Menschen im Allgemeinen ungleich zwischen ihnen vertheilt. Nehmen wir aber 200 Menschen und versetzen sie unter gleiche Verhältnisse zu einer bestimmten Ursache der Lust als 100 andere Menschen dieser Klasse; so können wir voraussetzen, dass sich die Einzelverschiedenheiten der Lust beiderseits im Ganzen merklich ausgleichen, und wieder sagen, dass abgesehen von einem kleinen noch übrig bleibenden zufälligen Unterschiede (woran die exactesten Bestimmungen auch sonst laboriren), das Lustquantum, was in den 200 Menschen durch die betreffende Ursache erweckt wird, im Ganzen doppelt so gross sei, als was in den 100 erweckt wird, wobei noch gar kein bestimmtes Mass der individuellen Lust vorausgesetzt wird, sondern nur die Ausgleichung zufälliger Verschiedenheiten durch die Zahl derselben. Erkennt man dazu an, dass es ein Mass der Einzellust giebt, wenn auch bis jetzt noch nicht gefunden ist, nachdem es sich doch für andere Fälle der Empfindung hat finden lassen, so kann man auch sagen, dass das Lustquantum von 10 oder 100 Menschen, wie verschieden und durch wie verschiedene Ursachen erweckt die Lust bei den Einzelnen sei, 10-mal oder 100-mal so gross sei, als die Lust der Einzelnen im Mittel, nur dass man, um den Begriff einer mittleren Lust zuzugestehen, auch den Begriff des Einzelmasses der Lust zuzugestehen hat. Jedenfalls sieht man, dass mit Rücksicht auf die Verbreitungsfähigkeit der Lust durch eine Mehrheit von Individuen dieselbe nicht schlechthin widerspenstig gegen den Quantitätsbegriff ist.

*) Diess steht nicht in Widerspruch mit der in voriger Anmerkung aufgestellten Ansicht, dass, wenn respective 100 und 200 Menschen derselben Klasse derselben Ursache der Lust gegenübergestellt werden, das beiderseits erweckte Lustquantum der Zahl der Individuen proportional gesetzt werden könne, da es sich vielmehr hier darum handelt, ob die, durch verschiedene Ursachen (verschiedene Verhältnissgrössen) erweckte Lust, welche den Vorzug der einen vor der andern Ursache, abgesehen von zufälligen Mitbedingungen, bestimmt, der Zahl der Bevor-

dass es noch gelingen wird, nach jener Abhängigkeit das intensive Durchschnittsmass selbst aus dem extensiven Masse abzuleiten, und ich glaube den Weg dazu durch die Betrachtung S. 43 mit Rücksicht auf die Wahrscheinlichkeitsgesetze des Zufalls vorgezeichnet zu sehen; behalte mir aber erst noch eine bestimmtere Untersuchung und Erklärung darüber vor. Hier bleiben wir jedenfalls bei dem extensiven Masse stehen, welches seine klare, gesicherte und berechtigte Bedeutung hat, indess der Begriff und die Bestimmungsweise des intensiven Masses bis jetzt noch als problematisch gelten können. Sollte sich das intensive Mass finden lassen, so würde es eine viel tiefer greifende theoretische Wichtigkeit für die Psychophysik als das extensive Mass haben, dieses aber stets den Vortheil praktischer Anwendbarkeit vor ihm voraus behalten und auch als Basis für Ableitung des intensiven Masses immer zu schätzen sein.

Mit voriger Bestimmung unseres Massbegriffes stehen die Aufgaben, die wir uns hier stellen können, in Beziehung. Erstens wird zu untersuchen sein, ob unter den Werthen eines der Variation unterliegenden Formverhältnisses, abgesehen von festen ästhetischen Mitbestimmungen, überhaupt einer ein (nicht blos von unausgeglichenen Zufälligkeiten abhängiges) Uebergewicht der Vorzugszahl, hiemit ein Uebergewicht der Wohlgefälligkeit vor den davon abweichenden Werthen hat, und welcher es ist; — zweitens die Abnahme der Wohlgefälligkeit nach der Abnahme der Vorzugszahlen bei gegebenen Abweichungen von dem wohlgefälligsten Werthe zu bestimmen und wo möglich das Gesetz der Abnahme zu finden; — drittens, ausser dem wohlgefälligsten Werthe, welcher das Hauptinteresse in Anspruch nimmt, noch einige andere, für die Beurtheilung der Wohlgefälligkeitsverhältnisse massgebende Hauptwerthe, wovon später, sammt den Beziehungen dazwischen aus den Masszahlen abzuleiten; viertens, den Sicherheitsgrad der Resultate zu bestimmen. Ausser

zugungen proportional gelten könne, was nicht vorauszusetzen ist. Man kann sich auch diess am Regen erläutern. Aus langjährigen Beobachtungen lässt sich finden, wie oft jeder Regen von bestimmter Wassermenge in Verhältniss zum andern an einem gegebenen Beobachtungsorte vorkommt. Aber weder die Wassermengen jedes einzelnen Regens selbst sind den Zahlen ihres Vorkommens, noch die Unterschiede der Wassermengen jedes einzelnen Regens den Unterschieden der Zahlen ihres Vorkommens proportional. Ein Regen von einer bestimmten Wassermenge kommt voraussichtlich häufiger als jeder andere vor, oder ist der, um welchen sich die Regen von bestimmter Menge am dichtesten zusammendrängen, und nach Massgabe als die Wassermengen grösser oder kleiner werden, nimmt die Zahl des Vorkommens ab, aber in viel stärkerem Verhältnisse als die Wassermenge selbst zu- oder abnimmt.

diesen Aufgaben, die ich kurz als objective zusammenfasse, kann man sich noch einige unten zu besprechende, von mir so genannte subjective Aufgaben stellen.

Zur Lösung dieser sämmtlichen Aufgaben stehen uns nun drei Methoden zu Gebote, die ich kurz als Methode der Wahl, Methode der Herstellung und Methode der Verwendung unterscheide, und zunächst nach ihrem Hauptgesichtspuncte wie folgt charakterisire.

Methode der Wahl. Man legt die, hinsichtlich ihrer relativen Wohlgefälligkeit zu vergleichenden, Verhältnisse in möglichst einfachen Schemata*) vielen Personen vor, lässt sie, wenn es sich um directe Wohlgefälligkeit handelt, mit ausdrücklicher Erinnerung an keine bestimmte Verwendung zu denken, das Verhältniss, was ihnen nach seiner eigenen Beschaffenheit am wohlgefälligsten und was am missfälligsten erscheint, bezeichnen, und trägt jedes Vorzugsurtheil so wie Verwerfungsurtheil in eine, mit dem betreffenden Verhältnisse überschriebene, Columne, einer besondern Vorzugs- und einer besondern Verwerfungstabelle ein, und zwar mit 1, wenn der Vorzug oder die Verwerfung sich für ein bestimmtes Verhältniss entscheidet, hingegen mit ½ oder ⅓, wenn zwischen 2 oder 3 Verhältnissen geschwankt wird, um endlich die Zahlen jeder Columne der Vorzugs- wie Verwerfungstabelle besonders zusammenzuzählen und zu vergleichen, wobei die weniger wichtigen (auch oft von mir nicht zugezogenen) Verwerfungsurtheile in sofern doch eine Art Controle bieten können, als die am seltensten vorgezogenen Verhältnisse zugleich die am häufigsten verworfenen sein müssen, wenn die Methode in sich stimmen soll.

Methode der Herstellung. Man veranlasst viele Personen, statt unter mehreren vorgegebenen Verhältnissen das wohlgefälligste zu wählen, vielmehr dasselbe in einfachst möglichen Schemata selbst herzustellen**), wonach man untersucht, bei welchem Ver-

*) Also z. B., wenn es sich um Dimensionsverhältnisse handelt, in einfachen Rechtecken aus Carton.

**) So lasse ich, bei Versuchen mit Kreuzen nach dieser Methode, auf einem fest aufliegenden oder fest aufgeklebten Längsbalken aus weissem oder schwarzem Carton einen losen Querbalken so lange vorschieben, bis er die wohlgefälligste Höhenstellung zu haben scheint; insofern sich aber diese nach dem Längenverhältnisse der Balken ändert, variire ich diess Verhältniss so wie das der Breite der Balken in verschiedenen Versuchsserien. Ich lasse über senkrechten Strichen von verschiedener Länge Puncte

hältnisse die meisten Versuchssubjecte zusammentreffen oder um welches sich die einzelnen am dichtesten schaaren; die geringeren Grade der Wohlgefälligkeit aber nach der geringeren Zahl derer, die bei einem gegebenen Verhältnisse stehen bleiben, misst.

Methode der Verwendung. Man misst die Dimensionen oder Abtheilungen der einfachsten, im Gebrauche, Verkehr, Handel und Wandel, kurz will ich sagen, im Leben, vorkommenden Gegenstände, bei welchen die Form vielmehr direct durch Rücksichten der Wohlgefälligkeit (vorausgesetzt, dass es sich um reine directe Wohlgefälligkeit handelt) als des Zwecks, der Bedeutung oder des Anpassens an andere Formen bestimmt ist, und welche keine Willkühr in der Anlegungsweise des Masses zulassen*), wonach man wieder das relative Mass der Wohlgefälligkeit durch die relative Häufigkeit des Vorkommens dieses oder jenes Formverhältnisses bestimmt hält.

Jede der zwei ersten Methoden kann mit der dritten gewissermassen verbunden werden, insofern man, anstatt der Wahl oder Herstellung abstracter Formen ohne Rücksicht auf Anwendung ausdrücklich die Wahl oder Herstellung mit dem Gedanken concreter Anwendung vornehmen lässt, wonach ich abstracte und concrete Methode der Wahl und Herstellung oder auch reine Methode und Methode mit Verwendung unterscheide.

So viel als möglich wird man diese verschiedenen Methoden sich durch einander ergänzen und wechselseits controliren lassen.

---

in der wohlgefälligsten Höhe anbringen, wobei der Gedanke an ein J freigestellt ist, u. s. w.

*) So habe ich u. a. Glückwünschungskarten und ähnliche Karten, deren Dimensionsverhältnisse nur durch directe Wohlgefälligkeitsrücksicht ohne angebbare associative und combinatorische Mitbedingungen bestimmt scheinen, in einer Mehrzahl von Luxuspapierfabriken und Papierhandlungen, so wie Schmuckkreuze bei verschiedenen Juwelieren in grösserer Zahl gemessen. Bei Visitenkarten, die ich u. a. auch in Untersuchung genommen, findet schon eine angebbare combinatorische Mitbestimmung durch die Streckung des Namens statt. Briefcouverts wechseln in den Dimensionsverhältnissen sehr nach der Mode, indem sie dabei wie manche andere Formen um das nach der Gesammtheit aller Versuche an sich wohlgefälligste Verhältniss schwanken. Die Schmuckkreuze unterscheiden sich, trotz ihres Ursprungs aus dem Crucifixe, doch wesentlich von diesem, indem der Zweck, der die Form des Crucifixes bestimmt, bei dem Schmuckkreuz gegen die Rücksicht directer Formwohlgefälligkeit zurücktritt. Weiteres und Genaueres über diese und andere Beispiele s. später bei den Versuchen.

Jede bedarf mannichfacher Vorsichten, Rücksichten und Rechnungshülfen, wovon wir aber erst in folgenden Abschnitten sprechen, um zuvor noch verschiedene allgemeine Gesichtspuncte theils in Bezug auf die Methoden selbst, theils die denselben zu stellenden Aufgaben zu besprechen.

Bei jeder dieser Methoden erhält man, wenn sie in einiger Vollständigkeit ausgeführt wird, eine Reihe durch Wahl, Herstellung oder Verwendung vor den übrigen bevorzugter Dimensions- oder Abtheilungs-Verhältnisse, die ich allgemein mit v, die Zahl der darauf fallenden Bevorzugungen aber mit z bezeichne. Die Bestimmtheit, wie viel Bevorzugungen jedes v erfahren hat, welches z ihm also zukommt, nenne ich die Vertheilung der Werthe v nach Mass und Zahl oder kurz Vertheilung schlechthin, und eine Tabelle, welche die Werthe v nach ihrer Grösse geordnet mit dem darauf fallenden z enthält, die Vertheilungstabelle der v.

Aus gewissem Gesichtspuncte ordnet sich die Sammlung der Werthe v mit zugehörigen z, welche eine bestimmte Versuchsreihe liefert, dem Begriffe eines in seinen Einzelexemplaren dem Masse nach zufällig variirenden Collectivgegenstandes unter, wovon Natur und Kunst unzählige Beispiele liefern*), über deren Vertheilungsgesetze nach Mass und Zahl der Einzelwerthe ich anderwärts zu veröffentlichende Untersuchungen angestellt und die Uebertragbarkeit der dafür geltenden Bestimmungen auf unser Untersuchungsgebiet, insbesondere nach Resultaten der zweiten und dritten Methode, theils schon geprüft habe, theils noch Data dazu sammle. Hierauf wird öfters im Folgenden Bezug genommen werden.

Wenn schon wir bei Darlegung unserer Methoden nur deren Anwendbarkeit auf die Prüfung der reinen Formwohlgefälligkeit, oder von uns so genannten directen Wohlgefälligkeit einfachster Verhältnisse, also abgesehen von associativen und combinatorischen Mit-

*) Es variiren z. B. Menschen von gegebenem Geschlecht, Alter, Race — eben so mittlere Jahrestemperaturen oder Regenmengen an einem gegebenen Orte — eben so die Dimensionen von Visitenkarten oder Galleriegemälden — nach ihrer Grösse, und jeder Grösse kommt ein bestimmtes z zu. Insofern aber diese Variationen von Zufälligkeiten abhängen, unterliegen sie auch den allgemeinen Wahrscheinlichkeitsgesetzen eines sich häufenden Zufalls nicht minder als die Variationen unserer v in Betracht des Einflusses zufälliger Mitbestimmungen.

bestimmungen ins Auge gefasst haben, da unsere Hauptaufgabe hier ausdrücklich auf diese Prüfung gerichtet ist, geht doch die Anwendbarkeit dieser Methoden viel weiter, sofern sie eben so zur Prüfung der Wohlgefälligkeit von Formverhältnissen jeder Art unter irgend welchen Mitbedingungen in irgend welchen Verwendungen, hiemit zur Weiterführung dieser Untersuchungen dienen können; indem man nämlich methodisch vom Einfachern zum Zusammengesetztern fortschreitend, die associativen und combinatorischen Mitbedingungen nach verschiedenen Richtungen variirt. Ja die erste Methode kann selbst zur Bestimmung des Wohlgefälligkeitsvorzuges zwischen Kunstwerken jeder Art, welche aus irgend einem Gesichtspuncte vergleichbar sind, Anwendung finden, nur dass keine elementaren Bestimmungen und Gesetze daraus zu schöpfen sind. Es dürfte aber oft nützlich sein, dem vielfach geführten Streit, welches von zwei Kunstwerken das schönere sei, durch die statistische Aussage der ersten Methode, welches in massgebenden Kreisen mehr Vorzugsstimmen erhalte, ein sichreres Fundament als das mehr oder weniger subjective einzelner Kennerstimmen zu geben.*)

*) Eine interessante Gelegenheit, von dieser Methode im Kunstgebiete Gebrauch zu machen, böte sich u. a. bezüglich des berühmten Streites über den Vorzug zwischen dem Dresdner und dem Darmstädter Exemplare der Holbeinschen Madonna dar, welcher bis zum Eintritte der jetzigen, dem Interesse an solchem Streite keinen Raum mehr lassenden, Kriegszeiten im lebhaftesten Gange war, und nach Beendigung derselben, insbesondere durch die noch zu erwartende Zusammenstellung beider Exemplare in Dresden, unstreitig wieder neu angefacht werden wird, ohne eines Endes gewärtig zu sein. Dazu müsste man bei der öffentlichen Ausstellung beider Exemplare eine Abstimmungsliste über den Vorzug des einen oder andern Exemplares auslegen, aus welcher nach Abschluss derselben die Stimmen der Kunstkenner und Kunstlaien (so weit sie wenn auch nur obenhin trennbar sind), der Männer und Frauen, der Personen von verschiedener Nationalität (wobei eine etwaige sächsische Parteilichkeit ihren Massstab finden würde) und so beliebig weiter zu sortiren, und die von jeder Kategorie gelieferten Vorzugsurtheile für das eine und andre Exemplar theils besonders zusammenzuzählen, theils (zum Massstab für das Durchschnittsurtheil des gesammten kunstliebenden Publicum) zur Totalsumme zu vereinigen wären. Das Hauptinteresse würde dabei immer die Frage haben, welches von beiden Exemplaren Alles in Allem genommen oder Eins ins Andre gerechnet den Vorzug Seitens dieser und jener Kategorie so wie von der Gesammtheit erhielte, und in welchem Verhältniss die entgegengesetzten Vorzugsstimmen gegen einander aufträten. Doch könnten auch besondere Fragen über Specialpuncte, die einem Specialstreit unterliegen, als namentlich bei unserm Beispiel über die Auffassung der Madonna, die Proportionen in der An-

Nun ist freilich nicht ausser Acht zu lassen, dass man überall durch unsere Massnahmen nur erfährt, wie sich die relative Wohlgefälligkeit innerhalb der Klasse von Menschen stellt, aus der man seine Versuchssubjecte entnommen hat, und natürlich ist weder zu behaupten, noch zu erwarten, dass Kindern oder rohen Negern dasselbe, was erwachsenen gebildeten Europäern, ja nicht einmal, dass Frauen durchschnittlich dasselbe, was Männern am besten gefällt. Aber es hindert nicht nur nichts, die Unterschiede, die in dieser Hinsicht zwischen verschiedenen Klassen von Menschen nach Alter, Geschlecht, Race, Stand, Bildungsstufe, Klima, Zeitalter bestehen, zu verfolgen, indem man die Versuchssubjecte danach sondert, sondern es muss diess selbst als eine wesentliche Aufgabe der experimentalen Aesthetik gelten.

Natürlich aber wird man, wenn nach einem Verhältnisse gefragt wird, welches Gebildete mehr als jedes andere befriedigt — und nur ein solches wird Anspruch machen können, als Normalverhältniss zu gelten, — auch Gebildete zum Urtheil zuzuziehen haben, und, insofern eine Specialbildung oder Uebung für die Auffassung des ästhetischen Werthes eines Verhältnisses oder Werkes erfodert wird, solche Personen zuzuziehen haben, welche diese Specialbildung oder Uebung besitzen, um Urtheile und damit Resultate nach unsern Methoden zu erhalten, welche einen Werth haben, der dem entsprechend ist, den man dem Besitze solcher Bildung und Uebung selbst beilegt.

Gilt es namentlich die Beurtheilung von Kunstwerken, so wird auch eine gewisse Kunstbildung vorausgesetzt, um überhaupt für die Empfindung des Werthes gewisser Seiten dieser Werke empfänglich

---

ordnung des Ganzen, das Colorit u. s. w. gestellt werden. So erhielte man einen vergleichenden Massstab der wirklichen ästhetischen Leistung beider capitalen Bilder für verschiedene Menschenklassen nach verschiedenen Beziehungen aus verschiedenen Gesichtspuncten statt der oft so einseitigen, befangenen und absprechenden Einzelurtheile mit einander hadernder Kenner, deren Resultat der einfache Widerspruch gegen einander ist. Auch könnte unstreitig durch Aufnahme des Planes und Gesichtspunctes der Abstimmung in das Programm der Ausstellung das allgemeine Interesse für dieselbe und die Frequenz ihres Besuches nur gesteigert werden. Nun zweifle ich zwar, dass dieser Vorschlag in Rücksicht äusserer Bedenklichkeiten Erfolg haben wird; doch konnte er hier dienen, die Tragweite unsrer Methode mit Beziehung auf das im Text Folgende zu erläutern.

zu sein*), und wer ohne diese Bildung darüber urtheilt, kann durch die einseitige Berücksichtigung von ästhetischen Vortheilen und Nachtheilen, deren Auffassung keiner besonderen Vorbildung bedarf, zu Urtheilen geführt werden, die vor einer höheren Abwägung nicht Stich halten. Selbst für die Auffassung des ästhetischen Werthes so einfacher Verhältnisse, als um die es sich hier handelt, wird die ästhetische Empfänglichkeit und Uebung nicht ganz gleichgültig sein, aber jedenfalls wird keine specifische Bildung dazu vorausgesetzt, und wenn man sich dabei an die allgemeine Klasse der sog. Gebildeten hält, wird man Resultate erhalten, die dadurch, dass sie den wirklichen ästhetischen Werth gegebener Verhältnisse für diese Klasse herausstellen, auch Werth für diese Klasse haben.

Darin aber liegt ein grosser Vortheil für die hier geführte Untersuchung, dass wir keine ängstliche Auswahl der Versuchssubjecte dabei zu treffen haben. Immer zwar wird es von Vortheil sein, zu den Versuchen vorzugsweis sogenannte geschmackvolle Personen zuzuziehen, d. i. welche eine Abweichung von dem Verhältnisse, das sich schliesslich aus der Gesammtheit der Urtheile als das wohlgefälligste herausstellt und das Normalverhältniss heissen kann, leicht und fein in einer Verminderung des Wohlgefallens empfinden und befähigt sind, feine ästhetische Unterschiede überhaupt leicht aufzufassen, indem dann das Schwanken der Urtheile geringer wird, und man mit einer geringern Zahl von Subjecten ein verhältnissmässig sichres Resultat erzielt. Da aber eine feste Gränze zwischen mehr und weniger geschmackvollen Personen nicht zu ziehen und das Urtheil über den Geschmack Andrer selbst mit vom eignen Geschmacke abhängt, also objectiv unsicher bleibt, so kommt uns die Betrachtung zu Statten, dass der minder gute Geschmack eben sowohl nach der einen als andern Seite von dem Verhältnisse, was der bessere Geschmack vorzieht, abweicht, so dass man je nach dem mehr oder minder guten Geschmack der Versuchssubjecte zwar das Mass der Schwankungsgrösse, wovon später, aber nicht den Werth, um den es schwankt, verschieden zu finden erwarten darf.

*) Für die Vorzüge der Conception eines Kunstwerkes sind Kunst-Laien oft viel empfänglicher als Kunstkenner, indess die Beurtheilung der Correctheit, des Stils, der malerischen Durchführung den Kenner verlangt. Der vollkommene Kenner freilich, wie er aber selten zu finden, wird allen Seiten des Kunstwerks gleich gerecht.

Wir haben das ästhetische Mass bis jetzt überhaupt blos aus objectivem Gesichtspuncte betrachtet, aber das Vorige führt uns darauf, ihm auch eine subjective Bedeutung in sofern beizulegen, als es Anhalt zur quantitativen Vergleichung des Geschmackes verschiedener Subjecte selbst giebt.

Wir sprechen überhaupt von einem verschiedenen Geschmack, sofern Verschiedenen Verschiedenes gefällt und missfällt oder auch nur in verschiedenem Grade gefällt und missfällt. Betrachten wir nun in Bezug auf die einfachsten Verhältnisse den Geschmack als den Normalgeschmack, welcher das Normalverhältniss vorzieht, also mit der überwiegenden Zahl der Stimmen Gebildeter übereinstimmt, so werden wir den minder guten oder richtigen Geschmack in dieser Beziehung nach der grösseren oder geringeren Abweichung des von ihm vorgezogenen Verhältnisses vom Normal-Verhältnisse beurtheilen und schliessen können, dass wenn jemand in Bezug auf die einfachsten Fälle keinen guten oder richtigen Geschmack beweist, es um so weniger in complicirteren Fällen der Fall sein wird, wogegen wenn sich sein Geschmack bei jenen bewährt, zwar noch keine Gewissheit, aber eine günstige Voraussetzung auch für letztere vorhanden sein wird. Hienach lassen sich einfache Rechtecke, Kreuze u. s. w. oder die einfachsten Anwendungen solcher Formen als Probeobjecte für den Geschmack aufstellen. Wer in meinen Versuchen weit von dem Normalwerth des Rechteckes, den Normalverhältnissen des Kreuzes abweicht, erweckt mir stets den Verdacht keines guten Geschmackes in rein ästhetischen Dingen überhaupt. Freilich bedarf die Beurtheilung hienach grosser Vorsicht, auch könnte ein Geschmack in directer Beziehung gut, in Betreff associativer Mitbestimmungen schlecht sein; und jedenfalls ist bei Beurtheilung des Geschmackes eines Einzelnen auf ein einzelnes Urtheil desselben wegen möglicher zufälliger Mitbestimmung dabei nicht viel zu geben. Auch würden die angeführten Methoden zwar zur Prüfung beizubehalten, doch anders zu disponiren sein; ich habe sie aber nach dieser Seite bisher überhaupt nicht ausgebildet.

Ausser der im vorigen Sinne verstandenen Güte oder Richtigkeit des Geschmackes gilt es die Sicherheit oder Unsicherheit desselben zu beurtheilen. Wir sprechen bei einer einzelnen Person von einer grösseren oder geringeren Unsicherheit des Geschmacks, je nach-

dem sie bei der Vorzugswahl zwischen verschiedenen ästhetisch zu vergleichenden Verhältnissen oder überhaupt Objecten mehr oder weniger über den Vorzug schwankt und sich bei Wiederholung des Urtheiles zu verschiedenen Zeiten, nachdem die Erinnerung an das früher gefällte Urtheil erloschen ist, mehr oder weniger verschieden entscheidet; bei einer Klasse von Personen, je nachdem die Vorzugsurtheile der Einzelnen bezüglich der zu vergleichenden Objecte mehr oder weniger variiren. Um auch für den Grad dieser Unsicherheit einen Massstab zu haben, kann man aus den Einzelnwerthen v, wozwischen das Schwanken stattgefunden hat, das Mittel ziehen, die Abweichungen der Einzelwerthe v von diesem Mittelwerthe bestimmen, und das Mittel dieser Abweichungen als Massstab der Unsicherheit oder Schwankungsgrösse des Geschmacks nehmen. Wo das Schwanken zwischen vielen Werthen v stattgefunden hat, kann man sich auch an die Bestimmung zweier Gränzen halten, die ich kurz die Kerngränzen nennen will. Hiezu ordnet man die erhaltenen Werthe v nach ihrer Grösse, und zählt von den Enden der Reihe, herein auf jeder Seite ein Viertheil der Werthe ab, so dass in der Mitte die gesammte Hälfte der Werthe als Kern bleibt. In je stärkerm Verhältnisse beide Gränzwerthe des Kerns von einander abweichen, desto grösser ist das Schwanken. Nach den hiebei als gültig anzusehenden Wahrscheinlichkeitsgesetzen stehen beide Masse bei grosser Zahl der v in principieller Abhängigkeit von einander, das erste aber ist sichrer, das zweite weniger umständlich zu gewinnen.

Dabei ist zu bemerken, dass diese Weise die Schwankungsgrösse des Geschmacks zu messen, keine principiell gefoderte ist, sondern nur überhaupt den Zweck erfüllt, Gradationen der Schwankung nach einem consequenten Princip zu vergleichen. Insofern aber die Rechnungen mit den v fast alle logarithmisch zu führen sind, kann man denselben Zweck noch einfacher und vielleicht angemessener dadurch erreichen, dass man statt der im Sinne der folgenden Einschaltung zu verstehenden mittleren Abweichung der Werthe v von ihrem Mittel, die arithmetisch mittlere Abweichung der log v vom Mittel dieser Logarithmen*) oder den arithmetischen Unterschied zwi-

*) Positive und negative Abweichungen dabei ohne Rücksicht auf das Vorzeichen zusammengezählt.

schen den Logarithmen der Kerngränzen als Massstab der Schwankungsgrösse einführt, was sich später durch den Gebrauch dieses Masses erläutern wird.

Wenn im Vorigen und Folgenden von Abweichungen oder Abständen zwischen Verhältnissen so wie von Mittelwerthen zwischen Verhältnissen die Rede ist, so können darunter nicht arithmetische Abweichungen noch arithmetische Mittelwerthe im gewöhnlichen Sinne verstanden sein, welche, wie unten zu zeigen, nach der gleichmöglichen Aufstellung der Verhältnisse in der Form $\frac{\alpha}{\beta}$ oder $\frac{\beta}{\alpha}$ zu zweideutigen Resultaten führen, sondern nur Verhältnissabweichungen, Verhältnissmittelwerthe, welche dieser Zweideutigkeit enthoben sind; worüber hier Folgendes zu sagen. Der Kürze halber bezeichnen wir dabei jedes einzelne Verhältniss so wie es als Decimalzahl erscheint, mit einem einfachen Buchstaben.

Man erhält eine Verhältnissabweichung, oder für uns Abweichung schlechthin, zwischen zwei Verhältnissen a, b nicht dadurch, dass man eines beider Verhältnisse arithmetisch vom andern abzieht, also nicht als $a-b$ oder $b-a$, sondern dadurch, dass man angiebt, in welchem Verhältnisse das eine vom andern überstiegen oder unterstiegen wird, also selbst als Verhältniss zwischen den Verhältnissen a, b, d. i. als $\frac{a}{b}$ oder $\frac{b}{a}$, womit sich die arithmetische Operation für Gewinnung der Verhältnissabweichung von a, b auf die Logarithmen von a, b überträgt, sofern $\frac{a}{b}$ gleich der Zahl zu $\log a - \log b$ ist, entsprechend mit $\frac{b}{a}$. Den Werth $\log a - \log b$, also die arithmetische Abweichung zwischen $\log a$ und $\log b$ nennen wir auch die logarithmische Abweichung des Verhältnisses a vom Verhältnisse b. Consequent hängt hiemit zusammen, dass der halbe Abstand oder halbe Unterschied des a vom b, in dem von uns festzuhaltenden Sinne als Verhältnissunterschied, nicht $\frac{a-b}{2}$ sondern die Zahl zu $\frac{\log a - \log b}{2}$, d. i. $\sqrt{\frac{a}{b}}$, entsprechend der doppelte Abstand die Zahl zu $2\,(\log a - \log b)$ d. i. $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ ist; und wenn von einer Reihe äquidistanter Verhältnisse a, b, c . . . die Rede sein wird, so werden es nicht solche sein, deren arithmetische, sondern deren logarithmische Differenzen gleich sind, d. h. welche eine geometrische Reihe bilden, deren Exponent durch den Abstand derselben in unserem Sinne gegeben ist.

Eben so trägt sich bei Mittelziehungen aus Verhältnissen a, b, c . . . die arithmetische Operation von a, b, c . . . auf die Logarithmen von a, b, c . . . über, um das Verhältnissmittel oder sog. geometrische Mittel, um was es hier zu thun sein wird, als Zahl dazu zu erhalten; wonach also das Mittel aus m Verhältnissen a, b, c . . . nicht $\frac{a+b+c\ldots}{m}$, sondern die Zahl zu dem Werthe

$\frac{\log a + \log b + \log c \ldots}{m}$ den wir das logarithmische Mittel der Werthe $a, b, c \ldots$ nennen, ist, d. i. $\sqrt[m]{a\ b\ c \ldots}$.

Auch Interpolationen zwischen Verhältnissen können nach den gewöhnlichen, für arithmetische Differenzen geltenden, Regeln nur zwischen den Logarithmen der Verhältnisse vorgenommen und das Gausssche Gesetz zufälliger Abweichungen als auf arithmetische Abweichungen bezüglich, nur an den arithmetischen Abweichungen der Werthe $\log v$ von ihrem arithmetischen Mittel geprüft werden.

Zumeist genügt es für den Zweck unserer Untersuchungen, bei den logarithmischen Resultaten stehen zu bleiben, ohne auf die Zahlen dazu zurückzugehn, wie u. a. bei dem vorigen Masse der Unsicherheit des Geschmackes.

Oben ward bemerkt, dass die Anwendung arithmetischer Differenzen zwischen Verhältnissen und arithmetischer Mittelwerthe aus Verhältnissen auf Zweideutigkeiten führe, welche ihren Gebrauch für uns ausschliessen. In der That, sei beispielsweise der arithmetische Unterschied so wie das arithmetische Mittel zwischen den Dimensionsverhältnissen zweier Rechtecke zu bestimmen, bei deren einem die kleinre Seite 1, die grössre 2, bei dem andern die kleinre 2, die grössre 3 misst, also, wenn wir die kleinre Seite zum Zähler erheben, die arithmetische Differenz und das arithmetische Mittel zwischen $1/2$ und $2/3$, so ist die erste $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} = 0{,}1667$, die zweite $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) = \frac{7}{12} = 0{,}5833$. Es ist aber kein Grund, warum man den Ansatz obiger Dimensionsverhältnisse nicht eben so gut in der umgekehrten Form $\frac{2}{1}$ und $\frac{3}{2}$ machen sollte, da es willkührlich ist, ob man die grössre oder kleinre Dimension als Zähler und die andre als Nenner betrachtet. Soll nun keine Zweideutigkeit entstehn, so muss das Resultat der umgekehrten Aufstellung durch seine Umkehrung zum ersten Resultat zurückführen. Diess ist bei arithmetischer Differenz und arithmetischem Mittel nicht der Fall. Denn der arithmetische Unterschied zwischen $\frac{2}{1}$ und $\frac{3}{2}$ ist $\frac{1}{2}$, und das arithmetische Mittel $\frac{7}{4}$; aber 2 stimmt nicht mit $\frac{1}{6}$ und $\frac{4}{7} = 0{,}5714$ nicht mit $\frac{7}{12} = 0{,}5833$. Bekanntlich nennt man den Werth, der durch Umkehr des nach der zweiten Aufstellungsweise erhaltenen arithmetischen Mittels hervorgeht, das harmonische Mittel zu dem nach der ersten Aufstellungsweise erhaltenen. Beide müssten gleich sein, sollte das arithmetische Mittel für uns brauchbar sein, sind es aber nicht. Hiegegen sind der Verhältnissunterschied und das Verhältnissmittel, im obigen Sinne verstanden, von dieser Zweideutigkeit frei, indem danach das Resultat der umgekehrten Verhältnisse durch seine Umkehr wieder zum ersten Resultat zurückführt.

Nicht nur aus diesem Grunde wird die verhältnissmässige Bestimmung der Differenzen und Mittelwerthe von Verhältnissen der arithmetischen vorzuziehen sein, sondern auch weil es an sich rationeller, so zu sagen begriff-

lich commensurabler erscheint, Verhältnisse nach Verhältnissen zu einander als nach arithmetischen Differenzen zu vergleichen, anwachsen und sich vermindern zu lassen.

Dazu noch Folgendes: wenn es blos das Mittel aus zwei Verhältnissen zu ziehen gilt, so ist das Verhältnissmittel von beiden, wie weit sie immer von einander abweichen mögen, zugleich das Verhältnissmittel zwischen dem arithmetischen Mittel nach der einen Aufstellung und dem aus der andern Aufstellung abgeleiteten harmonischen Mittel*), kann also gewissermassen beide, welche arithmetisch gleiche Berechtigung haben, vertreten; ja approximativ gilt dasselbe auch bei Mittelziehung aus mehreren Verhältnissen, so lange sie nicht zu weit von einander abweichen.

Ausser dem wohlgefälligsten Werthe eines der Variation unterliegenden Verhältnisses giebt es noch andre ästhetisch bedeutsame Werthe, die sich in Verbindung damit durch unsre Methoden bestimmen und hinsichtlich ihres Verhältnisses zum wohlgefälligsten Werthe untersuchen lassen, woran bei der grossen Unbestimmtheit und Oberflächlichkeit, welcher diess Feld der Untersuchung seither unterlegen hat, bis jetzt noch niemand gedacht hat. Ehe wir aber darauf eingehen, noch folgende Bemerkung hinsichtlich des wohlgefälligsten Werthes selbst.

Nach unsrer Begriffsbestimmung ist der wohlgefälligste Werth eines der Variation unterliegenden Verhältnisses der, auf welchen, — vorausgesetzt, dass er unter vergleichbaren Umständen gegen alle andern gehalten wird — die meisten Vorzugsstimmen fallen oder um welchen sich die Vorzugsstimmen am dichtesten zusammendrängen. Letztres aber ist so zu verstehen. Es kann sein, dass nach erster Bestimmungsweise das allerwohlgefälligste Verhältniss unter den Werthen v, welche die eine oder andre Methode liefert, gar nicht genau und sicher zu finden ist, sei es, dass diess Verhältniss (bei erster Methode) gar nicht mit vorgelegt ist, sei es, dass es (bei den andern Methoden) wegen beschränkter Zahl der Versuche — von denen streng genommen eine unendliche Zahl erfoderlich wäre, um der Bevorzugung jedes möglichen v mit zugehörigem z Raum zu geben — nicht genau mit dem grössten z der Vertheilungstabelle getroffen ist, oder sich, (wie das gewöhnlich ist,) mehr oder weni-

*) Der, vielleicht schon irgendwo gegebene, Beweis davon ist jedenfalls so leicht zu führen, dass ich glaube ihn übergehen zu können.

ger unter grössern oder kleinern Unregelmässigkeiten derselben versteckt. Dann aber wird es doch immer ein grösseres oder kleineres (logarithmisch abzumessendes) Intervall von Werthen v der Vertheilungstabelle geben, auf welches mehr Vorzugsstimmen fallen, als auf irgend ein andres Intervall gleicher Grösse, oder worin sie sich nach unserm kurzen Ausdruck am dichtesten zusammendrängen, und in diesem Intervalle, was wir das dichteste nennen, wird man den wohlgefälligsten Werth mit dem grösstmöglichen z jedenfalls zu suchen haben; daher wir ihn nach dieser Bestimmungsweise zum Vergleiche mit andern alsbald zu besprechenden Werthen auch wohl den dichtesten nennen und mit D bezeichnen. Als ein je kleineres Intervall wir nach Massgabe der Vollkommenheit und Vollständigkeit der Versuche das dichteste bestimmen können, desto genauer wird der wohlgefälligste Werth als dichtester unmittelbar bestimmt sein, indem er jedenfalls zwischen den Gränzen des dichtesten Intervalles liegen muss. Die rohe Bestimmung eines nicht zu grossen Intervalles, worin man ihn hienach zu suchen hat, ist bei hinreichender Zahl der Werthe v und angemessener Anordnung der Versuche schon ohne Rechnung möglich; die genauere Bestimmung desselben (als eines zwischen unendlich nahen Gränzen liegenden Werthes) aus dem Gange, welchen die Werthe z in der Vertheilungstabelle der v um den dichtesten Werth herum nehmen, aber bedarf einer, übrigens nicht schwierigen, Rechnungshülfe, wovon im folgenden Theile die Rede sein wird. Jedenfalls ist die Bestimmung des so zu sagen idealen v, um welches sich die Werthe am dichtesten zusammendrängen, ausführbar; die Genauigkeit dieser Bestimmung wächst aber mit der Zahl der Werthe v, die dazu in Rechnung genommen wird, und nimmt mit wachsender Schwankungsgrösse ab. Aus wenigen Werthen ist überhaupt keine genaue Bestimmung desselben zu gewinnen.

Es ist nun nicht selbstverständlich, dass der dichteste, also wohlgefälligste Werth D eben so viel grössere Werthe v über sich als kleinere unter sich hat oder die Gesammtheit aller, nach ihrer Grösse geordneten Werthe v der Zahl nach mitten durch theilt. Nennen wir überhaupt den Werth, der diese Bedingung erfüllt, die Werthmitte oder den Centralwerth, und bezeichnen ihn mit C. Eben so wenig ist selbstverständlich, dass der dichteste Werth

in gleichem zusammengesetzten Verhältnisse der Grösse nach von den andern Werthen v überschritten und unterschritten wird, d. i. dass er mit dem Verhältnissmittel oder sog. geometrischen Mittel zusammenfällt*), was wir mit G bezeichnen und was dadurch erhalten wird, dass man aus dem Producte aller v, deren Zahl m sei, die m-*te* Wurzel zieht, oder was auf dasselbe herauskommt, die Summe der Logarithmen der v mit m dividirt und zum Quotienten die Zahl sucht. Die Bestimmung der Werthe C, G und die Frage, ob sie mit D und miteinander coincidiren, spielt in unserm Untersuchungsfelde eine wichtige Rolle.

Wo D zugleich mit C und G in so weit coincidirt, dass man den kleinen Unterschied, der übrig bleibt, als von unausgeglichenen Zufälligkeiten nicht hinreichend vervielfältigter Versuche abhängig betrachten kann, lässt sich von einer wesentlichen Symmetrie der Wohlgefälligkeitscurve oder Vertheilung der Werthe v bezüglich D sprechen; indem an der Coincidenz von D mit C die gleiche Zahl, an der Coincidenz mit G die durchschnittlich gleiche Grösse der Abweichungen von D nach beiden Seiten hängt.

Im physikalischen und astronomischen Beobachtungsgebiete, wo man mit Beobachtungswerthen einer einzigen Grösse zu thun hat, und das mit M zu bezeichnende arithmetische Mittel derselben an die Stelle von G tritt, nimmt man an, dass nur unwesentliche, d. i. von nicht ausgeglichenen Zufälligkeiten abhängige Abweichungen zwischen M, C, D vorkommen, und man könnte geneigt sein, diess ohne Weiteres auf unser Beobachtungsfeld unter Ersetzung von M durch G zu übertragen. Indess abgesehen, dass hiezu keine Berechtigung a priori vorliegt, hat mich auch eine ausgedehnte Untersuchung an einer grossen Zahl von natürlichen und artistischen Collectivgegenständen mit zufällig variirenden Dimensionen ihrer Einzelexemplare gelehrt, dass selbst bei einfachen Massen, als blossen Längen oder Breiten der Exemplare, eine wesentliche Coincidenz von D, sei es mit C, G oder M, nicht allgemein besteht, ja wohl öfter nicht besteht als besteht, und dass sie eben so wenig für Dimensionsverhältnisse derselben allgemein besteht, also kann eine

*) Dass das arithmetische Mittel der v ausser Beachtung fällt, geht aus der obigen Einschaltung hervor.

solche auch nicht als selbstverständlich im Felde unserer Untersuchung vorausgesetzt werden.

Inzwischen scheinen meine bisherigen Versuche doch zu dem Resultate zu führen, ohne dass ich dasselbe schon als ganz sicher aussprechen möchte, dass bei Abhängigkeit der Werthe v von reiner directer Wohlgefälligkeit mit blos zufälligen Mitbestimmungen in der That eine Symmetrie der Vertheilung in vorigem Sinne stattfindet, wogegen D durch feste Mitbestimmungen dieser oder jener Art aus seiner Mittelstellung auch verrückt werden kann.

Jedenfalls aber kann ich nach meinen allgemeineren Untersuchungen im Felde von Collectivgegenständen, dem ich unser Versuchsfeld in dieser Hinsicht untergeordnet gefunden habe, folgenden wichtigen Satz mit Sicherheit aussprechen:

Wenn zwei von den Werthen D, C, G, sei es bezüglich einfacher Werthe oder bezüglich Verhältnissen, womit wir hier zu thun haben, wesentlich, d. h. insoweit coincidiren, dass der übrig bleibende Unterschied dazwischen nur als von unausgeglichenen Zufälligkeiten wegen zu geringer Zahl der Bestimmungen abhängig angesehen werden kann, so findet auch eine entsprechende Coincidenz mit dem dritten statt; wogegen, wenn zwei davon so stark oder bei wiederholten Bestimmungen so gesetzlich in bestimmter Richtung von einander abweichen, dass man die Abweichung nicht als zufällig ansehen kann, auch der dritte wesentlich von ihnen abweicht, und zwar ganz gesetzlich so, dass der Centralwerth C zwischen dem Verhältnissmittelwerth G und dichtesten Werth D liegt, wofür sich unter einer gewissen allgemeinen Voraussetzung, die sich durch anderweite Resultate der Untersuchung bestätigt findet, auch ein allgemeiner theoretischer Grund anführen lässt, was aber näher zu besprechen und zu belegen hier nicht der Ort ist. Genug, die Kenntniss dieser Verhältnisse ist, abgesehen von ihrem allgemeinen theoretischen Interesse, hier für uns insofern von praktischem Vortheil, als man danach in Fällen, wo man G mit C wesentlich coincidirend findet, die directe Bestimmung von D aus dem Gange der Werthe durch die sichrere von G oder minder umständliche von C ersetzen kann, und wo G mit C nicht wesentlich coincidirt, die Richtung, in welcher D von C abliegt, danach bestimmen kann.

Ausser den vorigen Werthen D, C, G ist aus nachher anzu-

gebendem Grunde nützlich, noch einen Werth zu berücksichtigen, den ich den summarischen Mittelwerth nenne und mit S bezeichne, dadurch zu erhalten, dass man das arithmetische Mittel aller Zähler der v, mit dem arithmetischen Mittel aller Nenner, oder, was auf dasselbe herauskommt, die Summe aller Zähler mit der Summe aller Nenner dividirt*), wobei vorausgesetzt ist, dass Zähler und Nenner alle nach wirklichen absoluten Massen, nicht theilweis reducirt gegeneinander, aufgeführt sind. Im Allgemeinen fasse ich die Werthe D, C, G, S als Hauptwerthe zusammen.

Das summarische Mittel kann vom Verhältnissmittel oder unserm Mittel schlechthin nicht unerheblich abweichen, wenn man willkührliche Bruchwerthe zum einen oder andern Mittel combinirt. So ist das summarische Mittel von $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ gleich $\frac{6}{9} = 0{,}6666..$, hingegen das Verhältnissmittel $\sqrt[3]{\frac{6}{15}} = 0{,}7368...$ Aber im Felde unsrer Untersuchung findet man im Allgemeinen nur einen geringen, oft verschwindenden Unterschied zwischen beiden.

Des Näheren kommen überhaupt folgende Verhältnisse des summarischen Mittels hier in Betracht.

Mögen Zähler und Nenner eines Verhältnisses v kurz dessen Componenten heissen, so haben auf den Werth von S die Verhältnisse v mit grössern Componenten einen grösseren Einfluss, als solche mit kleinern Componenten. Denn seien z. B. $\frac{1}{2}$ und $\frac{99}{100}$ zwei Werthe v, so wird im summarischen Mittel 1 gegen 99 und 2 gegen 100 merklich verschwinden, und sein Werth $\frac{100}{102} = 0{,}9804$ fast dasselbe Resultat geben, als wenn $\frac{1}{2}$ gar nicht mit zugezogen wäre, wogegen in das Verhältnissmittel $\sqrt{\frac{99}{200}} = 0{,}7036$ beide Werthe v rücksichtslos auf die absolute Grösse ihrer Componenten mit gleichem Gewicht eingehen. Diess kann von vornherein in allen Fällen, wo der Werth v in Abhängigkeit von der absoluten Grösse seiner Componenten variirt, man aber keinen Grund hat, auf Verhältnisse zwischen grossen Componenten bei der Wohlgefälligkeits-Bestimmung mehr Gewicht zu legen, als aus kleinen, als Vortheil des Verhältnissmittels vor dem summarischen Mittel gelten.

*) Der Werth, welchen Zeising in dem Beispiele S. 19 als Mittelwerth aufführt, ist ein solcher summarischer Werth.

2) Das summarische Mittel stimmt mit dem Verhältnissmittel nothwendig ganz überein, wenn bei beliebiger Variation des absoluten Werthes von Zähler und Nenner doch das Verhältniss beider constant bleibt, oder weicht nur durch unausgeglichene Zufälligkeiten davon ab, wenn das Verhältniss unabhängig von der Grösse seiner Componenten nach den Gesetzen des Zufalls variirt. Hingegen fällt S gesetzlich grösser oder kleiner aus als G, je nachdem das Verhältniss mit wachsender Grösse seiner beiden Componenten (oder nur eines derselben, wenn der andre constant bleibt) wächst oder abnimmt, wie man an willkührlichen Zahlenbeispielen constatiren kann.*)

Hienach aber gewinnt die Bestimmung des summarischen Mittels aus doppeltem Gesichtspuncte ein Interesse und selbst eine Wichtigkeit für uns. Erstens ist es leichter bestimmbar als jeder der andern vorgenannten Hauptwerthe, D, C, G, und kann bei fehlender oder nicht sehr bedeutender Abhängigkeit des variirenden Verhältnisses von der absoluten Grösse des Zählers und Nenners (die man freilich erst irgendwie geprüft haben muss) das Verhältnissmittel, und, wo dieses mit dem dichtesten Werthe principiell zusammenfällt, diesen Werth ganz oder approximativ mit vertreten; zweitens giebt es uns in seinem Verhältnisse zum Verhältnissmittel unmittelbar, ohne dass man eine Einzelrechnung desshalb anzustellen nöthig hat, Aufschluss, ob nach Massgabe der absoluten Grösse der Dimensionen oder Abtheilungen sich die Wohlgefälligkeit des Verhältnisses dazwischen ändert**), was allerdings nicht bezüglich der Wohlgefälligkeit abstracter Verhältnisse an sich erwartet werden kann, wohl aber unter dem Einfluss von Mitbestimmungen in den Anwendungen nicht nur möglich ist, sondern auch sich als wirklich vorkommend zeigen wird.

In einem solchen Falle also wird man mit wachsender oder abnehmender absoluter Grösse der Componenten das Verhältniss

*) Einen allgemeinen Beweis dafür, den ich Prof. Scheibner verdanke, werde ich nachträglich entweder im folgenden Theile oder einer spätern Abhandlung über Collectivgegenstände mittheilen.

**) Nämlich wenn $S \angle G$ ist, so entsprechen die grössern Werthe von v mit ihrem zugehörigen Wohlgefälligkeitsmasse z grössern Componenten, hingegen, wenn $S \angle G$ ist, kleineren Componenten, und reicht es also, um ein bestimmtes Wohlgefälligkeitsmass z zu erhalten, nicht hin, ein bestimmtes v überhaupt zu haben, sondern es gehört dazu auch eine bestimmte Grösse der Componenten.

derselben ändern müssen, um noch den grösstmöglichen Vortheil zu haben, und es wird dann einerseits darauf ankommen, darunter den allerwohlgefälligsten Werth v mit der zugehörigen absoluten Grösse der Componenten zu finden, andrerseits das Gesetz der Abänderung von D nach der Grösse der Componenten.

Endlich gilt es noch, das Gesetz der Vertheilung der Werthe v nach Zahl und Mass zu untersuchen, wozu die Untersuchung der Symmetrie- oder Asymmetrieverhältnisse allerdings schon einen Beitrag oder eine Unterlage bietet, ohne aber die Frage zu erschöpfen. Auf den dichtesten Werth fällt seinem Begriffe nach die grösste Vorzugszahl; nach Massgabe der Abweichung der Verhältnisse v davon, sei es nach der einen oder der andern Seite, wird sich die relative Vorzugszahl, die Grösse des z, mindern, aber es fragt sich, nach welchem Gesetze; wie hängt die relative Zahl der Bevorzugungen mit der Grösse der Abweichung vom dichtesten Werthe zusammen?

Hiebei wird es insbesondere gelten, folgende Hypothese, die sich auf Grund schon früher gepflogener Erörterungen darbietet, zu prüfen. Man kann sich denken, dass der dichteste Werth als derjenige, der die vortheilhaftesten Bedingungen des Gefallens in sich vereinigt, oder, wie wir kurz sagen, ein Lustübergewicht an sich über alle andern hervorruft, von Allen vorgezogen werden würde, wenn nicht unbestimmbare zufällige subjective oder objective Mitbestimmungen bei den einzelnen Versuchssubjecten obwalteten, wodurch mehr oder weniger grosse und zahlreiche Abweichungen der Vorzugsurtheile vom an sich wohlgefälligsten Werthe bedingt werden, ohne den Vortheil dieses Verhältnisses vor den übrigen im Ganzen aufzuheben. Sofern nun diese Abweichungen näher zugesehen darauf zu schreiben sind, dass das Lustübergewicht, was das an sich wohlgefälligste Verhältniss*) über die minder wohlgefälligen erweckt, durch die entgegenwirkenden zufälligen Bedingungen übercompensirt wird, kann man die durch den Erfolg selbst zu prüfende Hypothese aufstellen, dass jenes Uebergewicht ohne diese Gegenwirkungen entweder dem Verhältnissabstande selbst oder dem zugehörigen logarithmischen Abstande des an sich wohlgefälligsten Verhältnisses von den minder

*) Oder auch unter festen associativen oder combinatorischen Mitbedingungen wohlgefälligste.

wohlgefälligen proportional sei, wonach auch die gegenwirkenden zufälligen Bedingungen im Durchschnitt proportional damit ansteigen müssen, um die Uebercompensation zu bewirken. Das werden sie aber um so seltener vermögen, je höher sie dazu anzusteigen haben, indem in dieser Beziehung ein Wahrscheinlichkeitsgesetz zwischen Zahl und Grösse des Ansteigens besteht. Kurz, es muss sich hienach in der Vertheilung der Werthe v nach Mass und Zahl das den Mathematikern wohlbekannte Gausssche Wahrscheinlichkeitsgesetz zufälliger Abweichungen mit den Modificationen wieder finden, welche durch Anwendung auf Verhältnisswerthe v statt auf einfache Werthe, so wie auf unsymmetrische Vertheilung, wo solche statt findet, geboten werden. Auf die Erforschung dieser Modificationen aber sind meine allgemeinen Untersuchungen über Collectivgegenstände nicht ohne Erfolg gerichtet gewesen, und darf ich wenigstens für gewisse Fälle unseres jetzigen Untersuchungsfeldes — denn zu einem allgemeinern Ausspruche fehlen mir noch hinreichend ausgedehnte Unterlagen — die Bestätigung obiger Hypothese bezüglich logarithmischer Abweichungen aussprechen. Den Ausspruch des Gesetzes selbst mit den darauf bezüglichen Versuchen, so weit sie in unser Untersuchungsfeld gehören *), werde ich im folgenden Theil geben, wohin ich auch Specielleres über die Sicherheitsbestimmungen der Resultate verweise.

Um die betreffenden Modificationen, welche sich in der Anwendung des Gaussschen Gesetzes auf zufällig variirende Verhältnisswerthe, insbesondre bei asymmetrischer Vertheilung derselben, im Felde der Collectivgegenstände nöthig machen, hier kurz zu resumiren, da sie auf unser jetziges Untersuchungsfeld mit übergreifen, so sind es nach meiner allgemeinen Untersuchung folgende.

1) Die Anwendung des Gesetzes ist, wie schon S. 56 erinnert, statt auf die Werthe v selbst auf deren Logarithmen zu machen; übrigens aber, im Falle symmetrischer Vertheilung der Werthe in der bekannten Weise **) vorzunehmen. Für Constatirung der wesentlichen Symmetrie genügt es nach S. 61. die wesentliche Coincidenz zweier von den Werthen D, C, G oder ihren Logarithmen zu constatiren.

2) Im Falle wesentlich asymmetrischer Vertheilung sind die Abweichungen

*) Im Uebrigen habe ich auf die künftig zu veröffentlichenden Untersuchungen über Collectivgegenstände zu verweisen.

**) Beispiel dazu: die Prüfung des Gesetzes durch Bessel an Beobachtungsfehlern in s. Fundamentis Astronomiae p. 18.

der einzelnen log v nicht vom Logarithmus des Verhältnissmittels G, sondern des aus den Logarithmen abgeleiteten dichtesten Werthes D zu nehmen.

3) Die mittlere Abweichung der log v von log D (sei es die einfache oder aus den Quadraten der logar. Abweichungen zu gewinnende) ist für jede Seite der Abweichungen besonders aus der Grösse und Zahl der Abweichungen dieser Seite abzuleiten, und hienach auch die Vertheilung nach dem Gaussschen Gesetze für jede Seite besonders vorzunehmen.

Diese Regeln gelten übrigens im Felde der Collectivgegenstände, so weit ich es bis jetzt untersucht habe, nicht nur für variirende Verhältnisse, sondern auch für variirende einfache Werthe, als namentlich Dimensionen, wie ich mich sattsam an solchen, allerdings nicht häufig vorkommenden, Fällen überzeugt habe, die überhaupt eine Entscheidung gestatten, d. i. wo die Variation der Einzelwerthe im Verhältniss zur Grösse sei es des arithmetischen Mittels, oder des dichtesten Werthes, so wie die Asymmetrie der Vertheilung sehr beträchtlich ist.*) Eins der auffälligsten Beispiele hievon gewähren unter den artistischen Gegenständen die Dimensionen von Galleriegemälden, die ich bei Genrebildern, Landschaftsbildern und Stillleben (nach einer Reduction der Masse aus einer grössern Anzahl von Galleriekatalogen auf dieselbe Einheit) betreffs Höhe und Breite (im Lichten) besonders in dieser Hinsicht untersucht habe**), wo man mit der gewöhnlichen Anwendung des Gaussschen Gesetzes so wenig auskommt, dass ich dasselbe früherhin gar nicht für anwendbar darauf hielt, wohl aber mit obigen Regeln seiner Anwendung auskommt. Dass bei den hieher gehörigen Beispielen überhaupt (denn das vorige Beispiel ist nicht das einzige, was mir in dieser Beziehung zu Gebote steht) die Anwendung der Logarithmen der Einzelwerthe in Berechnung der Vertheilung besser zur Erfahrung stimmt, als die Anwendung der Einzelwerthe selbst, beweist, dass diese Gegenstände (natürlich so weit ich sie untersucht habe) nach einem kurzen (der Erläuterung wohl fähigen, doch dieselbe ziemlich in sich tragenden) Ausdruck vielmehr nach Verhältnissen als arithmetischen Differenzen variiren, worüber aber weitere Ausführungen nicht hieher gehören würden.

*) Wo diess nicht der Fall ist, findet man ein merklich gleich gutes Entsprechen mit der erfahrungsmässigen Vertheilung, mag man die einfachen Werthe selbst oder deren Logarithmen zur Berechnung der Vertheilung anwenden, und dabei (erstenfalls) die Abweichungen vom arithmetischen Mittel oder (zweitenfalls) vom Logarithmus des dichtesten Werthes rechnen, indem die Unterschiede im Erfolge beider Berechnungsweisen sich dann mit der Unsicherheit der erfahrungsmässigen Vertheilung einer endlichen Zahl von Werthen zu sehr vermischen, um den Vorzug der einen vor der andern Berechnungsweise durch Vergleich mit der Erfahrung sicher beurtheilen zu können, man müsste denn so viele Einzelwerthe eines Collectivgegenstandes vor sich haben, als nicht leicht zu Gebote stehen.

**) Auch wurden dabei die Gemälde, bei welchen die Breite grösser als die Höhe ist, und bei welchen das Umgekehrte stattfindet, gesondert.

V. Eingehendere Bemerkungen über die verschiedenen Methoden.

Manche Rücksichten und Vorsichten, die man bei unsern Methoden der Wohlgefälligkeitsbestimmung zu nehmen hat, sind allen oder doch zweien von den drei Methoden gemein, andere treffen die verschiedenen Methoden besonders. Zu erstern gehören namentlich folgende theilweis schon früher berührte, die aber jetzt näher zu besprechen sein werden, und sich theils auf die Methoden im Allgemeinen theils die besondere Anwendung derselben auf die uns hier beschäftigende Hauptfrage beziehen.

1) Abgesehen von einigen Fällen ganz oder fast ganz einstimmigen Urtheiles können die Bestimmungen, auf die es uns ankommt, als des dichtesten Werthes und der andern Hauptwerthe, so wie der mittlern Abweichung und des Gesetzes der Abweichungen der v vom dichtesten Werthe, mit genügender Sicherheit nur aus einer grossen Zahl von Urtheils-Herstellungs- oder Verwendungsfällen (je nach der Methode) gezogen werden und bleibt wie bei allen empirischen Bestimmungen aus einer endlichen Zahl von Fällen, ja selbst bei den schärfsten physikalischen und astronomischen Massnahmen, eine Unsicherheit übrig, die mit wachsender Zahl der Beobachtungen immer mehr abnimmt, und ihrerseits ein Mass zulässt, welches ausser von der Zahl der Beobachtungen auch noch von der Schwankungsgrösse derselben abhängt, und wovon künftig noch näher zu handeln sein wird.

In der Foderung eine grosse Zahl von Einzelbestimmungen zur Verfügung zu haben, liegt aber eine besondre Schwierigkeit unsrer Methoden, weil die Gelegenheit, viele Bestimmungen zu erhalten, immer mehr oder weniger beschränkt ist; und ich habe schon erinnert, dass gar manche meiner Versuchsreihen desshalb unvollständig geblieben sind und manche wichtige Bestimmungen, die Anspruch machen konnten, schon hier erledigt aufzutreten, es noch nicht sind. Der Kreis der Bekannten, die man zu den Methoden der Wahl und Herstellung zuzuziehen Gelegenheit findet, ist bald erschöpft, und die Verwendungsfälle bieten sich nicht leicht von selbst in hinrei-

chender Anzahl unter den zu Massnahmen daran geeigneten Umständen dar. Zu einer vollständigen Ausführung der Versuche nach unsern Methoden müssten sich daher eigentlich Mehrere vereinigen, um nach einem gemeinsamen Plane die ihnen zu Gebote stehenden Gelegenheiten zu benutzen und selbst solche zu schaffen. Einer Unterstützung, die ich doch in dieser Hinsicht von einigen jungen Freunden gefunden habe, habe ich schon in der Vorerinnerung gedacht.

Eine besondere Unbequemlichkeit liegt namentlich auch darin, dass man bei jeder Vornahme der Versuche mit neuen Individuen einen besondern Vortrag über Zweck und Gesichtspunct der Versuche halten möchte, um der Verwunderung über das scheinbar müssige Spiel oder dem Vorurtheil über die verfehlte Aufgabe zu begegnen und Geneigtheit zu den Versuchen zu erzeugen.

Wo Gelegenheit ist, Versuche mit mehreren Personen auf einmal etwa in kleinen Gesellschaften anzustellen, braucht man sich von der Benutzung solcher Gelegenheiten nicht dadurch abhalten zu lassen, dass das Urtheil der Einen einen bestimmenden Einfluss auf das Urtheil der Andern üben könnte. Unstreitig ist ein solcher Einfluss im Allgemeinen nicht abzuleugnen, compensirt sich aber zum Theil schon dadurch, dass viele Personen lieber original sein, als andern folgen wollen, theils verliert sich der Nachtheil dieses Einflusses, wenn man die Versuche wiederholt mit verschiedenen kleinen Gesellschaften anstellt, sofern dann entsprechende Verschiedenheiten zwischen ihnen als zwischen einzelnen Personen vorausgesetzt werden dürfen.

2) Insofern die Resultate der Versuche auf eine gewisse Allgemeinheit Anspruch machen und zugleich an Specialbestimmungen fruchtbar sein sollen, sind sie mit angemessener Abänderung der Versuchssubjecte und Versuchsumstände, als z. B. mit männlichen und weiblichen Personen, senkrechter und horizontaler Lage der geprüften Rechtecke u. s. w. anzustellen.

3) Die Versuchssubjecte sind in keiner Weise durch zuvorigen Hinweis auf das wohlgefälligste Verhältniss zu präoccupiren, ja nur solche, welche keine Voraussetzungen über das wohlgefälligste Verhältniss zu den Versuchen mitbringen, zuzuziehen; anderseits aber ist jedes Urtheil, jeder Herstellungsfall, auch bei Widerspruch mit der eigenen Voraussetzung zu registriren und gleich den anderen zu verrechnen, indem bei Häufung des Widerspruches die eigene Ansicht

aufgegeben werden muss, indess ein blos zufälliger Widerspruch durch Häufung der Fälle seine Wirkung verliert. Nützlich aber ist, besonders auffällige Fälle im Beobachtungsregister mit einem besondern Zeichen zu versehen, um sicher zu sein, dass sie nicht einem blossen Versehen in der Aufzeichnung den Ursprung verdanken.

4) Dass es nicht wesentlich ist, zu den, uns hier vorzugsweise beschäftigenden, Versuchen über die directe Wohlgefälligkeit der einfachsten Formverhältnisse, eine besondere Auswahl unter den im Allgemeinen dabei zu bevorzugenden Personen gebildeten Standes zu treffen, ist S. 53 besprochen, ja man hat sich vor jeder anderen Auswahl zu hüten, als welche sich auf die Möglichkeit bezieht, mit wenigeren Stimmen ein sichreres Resultat zu erhalten, was den geschmackvolleren Personen (im Sinne der Erörterungen S. 53 verstanden) einen Vorzug vor den minder geschmackvollen giebt; hingegen droht jede Auswahl nach andern Rücksichten feste Mitbestimmungen des Urtheiles einzuführen, welche nach der Aufgabe der Versuche vielmehr ausgeschlossen sein oder sich durch ihren zufälligen Wechsel zwischen verschiedenartigen Individuen compensiren sollen.

Insofern aber die Zuziehung geschmackvoller Personen zu den Versuchen im Allgemeinen doch vortheilhaft erscheint, kann man meinen, dass namentlich Künstler im Fache der bildenden Kunst und Architektur sich vorzugsweise dazu empfehlen. Aber wenn schon sie die beste Autorität in Beurtheilung der Werke dieser Künste selbst sein mögen, so würde doch eine bevorzugende Zuziehung solcher Künstler zu Versuchen über eine so zu sagen abstracte Formwohlgefälligkeit nichts weniger als zweckentsprechend sein, ohne dass sie desshalb von einer indifferenten Berücksichtigung aller Personen gebildeten Standes überhaupt auszuschliessen sind. Grossentheils nämlich kommen sie mit der Voraussetzung zu den Versuchen, dass es eine Wohlgefälligkeit an sich in unserm Sinne gar nicht giebt, verweigern also überhaupt ein Urtheil, wie es hier verlangt wird, theils sind sie in mehr oder weniger speciellen Richtungen der Verwendung befangen und dadurch im Urtheile mitbestimmt; oder bringen gar eine Theorie über das, was gefallen müsse, mit; kurz ermangeln im Allgemeinen derjenigen Unbefangenheit, welche zu unsern Versuchen erwünscht ist, sofern sie aber überhaupt nicht überall zu finden ist, nur durch die Menge der Versuche mit verschiedenartigen Individuen,

welche in verschiedenen Richtungen befangen sind, unschädlich gemacht werden kann.

5) Weder die Gränzen der gebildeten Klasse, noch überhaupt einer Klasse, die man zu den Versuchen zuziehen will, werden sich nach dem herrschenden Sprach- und Begriffsgebrauche scharf angeben lassen; indessen kann man die Klasse theils durch die Definition selbst schärfer begränzen, theils sich an notorisch darunter gehörige Individuen halten, ohne dass es bei hinreichender Anzahl der Versuche im Allgemeinen nöthig sein wird, sich wegen der unsichern Ausscheidung dieser und jener Individuen von zweifelhafter Zugehörigkeit zur betreffenden Klasse grosse Skrupel zu machen; nur dass man nicht solche, welche unzweifelhaft nicht dazu gehören, zuzuziehen hat. Denn theils beträgt die Zahl der zweifelhaften Mitglieder einer Klasse im Allgemeinen nur wenig gegen die der unzweifelhaften, theils kann man auf Compensation der Abweichungen, welche das Urtheil der ersten von dem der letzten darbietet, rechnen, wenn die Zweifelhaftigkeit bei den verschiedenen Individuen an verschiedenen Gesichtspuncten hängt.

6) Zu den Mitbestimmungen, welche die ästhetische Empfindung und hienach das ästhetische Urtheil erfahren kann, gehört ausser den bisher hervorgehobenen Mitbestimmungen auch die Gewöhnung, insofern eine Form durch die Gewohnheit, sie immer in gewissen Verwendungen zu sehen, anfängt, zu denselben Verwendungen ästhetisch gefodert zu werden, oder einen ästhetischen Vortheil in Bezug darauf geltend zu machen, wie sich u. a. daran beweist, dass selbst an sich unschöne und unzweckmässige Moden und Kunststile durch die Gewöhnung den Geschmack beherrschen können; und es ist daher nicht nur bei der Methode der Verwendung darauf Rücksicht zu nehmen, ob ein solcher Einfluss mitbestimmend vorliegt, sondern selbst bei den andern Methoden, insofern die Möglichkeit besteht, dass eine Form, die uns sehr häufig in geläufigen Verwendungen vor Augen kommt (als namentlich in der Gestalt des menschlichen Körpers), selbst über diese Verwendungen hinaus ihren ästhetischen Vortheil erstreckt; wogegen aber auch die Möglichkeit stattfindet, dass das häufige Vorkommen einer Form in gewissen Verwendungen seinen Grund in der Wohlgefälligkeit an sich oder in der Zweckmässigkeit hat, wo man dann Unrecht haben würde,

den ursprünglichen ästhetischen Vortheil auf Gewöhnung zu beziehen, die nur zur Verstärkung desselben hinzutritt. Also kann man in vielen Fällen den Einfluss der Gewöhnung auf die Wohlgefälligkeit einer Form zugeben, aber den Grund der Gewöhnung selbst schon in der Wohlgefälligkeit der Form an sich oder in der Zweckmässigkeit derselben finden, welche ihrerseits associativ zur Wohlgefälligkeit beiträgt.

7) Wenn es combinatorisch zusammengesetzte Fälle zu untersuchen gilt, z. B. die Wohlgefälligkeitsverhältnisse eines Kreuzes zugleich bezüglich der Höhenstellung des Querbalkens, des Längenverhältnisses beider Balken und der Breite derselben, oder die Wohlgefälligkeitsverhältnisse zweier ineinander geschachtelter oder parallel mit einander angebrachter Rechtecke zugleich bezüglich ihrer Dimensionen und ihres innern oder äussern Abstandes von einander, so sind auch zusammengesetzte Anordnungen der Versuche nöthig, indem es dabei gilt, in verschiedenen Versuchsserien nach der Methode der Wahl oder Herstellung immer nur je einen Umstand bei Gleichhaltung der übrigen zu variiren; auch lassen sich dabei mit Vortheil beide Methoden unmittelbar verbinden, indem man das Versuchssubject aus den von ihm dargestellten variirten Verhältnissen das, was ihm unter allen am vortheilhaftesten scheint, selbst auswählen lässt.

8) Wenn Versuche mit abgeänderten Verhältnissen oder unter abgeänderten Umständen in der Absicht, ihre Resultate zu vergleichen, hinter einander angestellt werden, so ist in den Uebergängen zu neuen Versuchsindividuen die Reihenfolge der Versuche wiederholt umzukehren, so dass schliesslich die entgegengesetzten Folgen gleich oft in den Versuch genommen sind, damit, wenn sich ein bestimmender Einfluss von den früheren auf die späteren Versuche jeder Partialreihe erstrecken sollte, dieser sich durch seine Entgegensetzung compensirt.

9) Für Deutung und rechnende Behandlung der Resultate der verschiedenen Methoden ist folgender Punct von fundamentaler Wichtigkeit.

Bei keiner der drei Methoden wird eine Continuität unendlich naher Werthe v erhalten, sondern eine Reihe von Werthen, die in gewissen Abständen von einander stehen, welche bei der Methode der Wahl durch die Willkühr des Vorlegens bestimmt sind, bei den

beiden andern Methoden theils durch den bis zu gewissen Gränzen zufälligen Erfolg der Herstellungen oder Verwendungen, theils die Gränzen, bis zu welchen man in Unterscheidung der Unterabtheilungen des Masses gehen will und kann; wonach ich vorhandene und (dazwischen) fehlende Werthe v unterscheide. Insofern sich nun die Zahl der Bevorzugungen, welche den fehlenden Werthen v zugekommen sein würde, wären sie vorhanden gewesen, auf die ihnen nächstliegenden vorhandenen mit überträgt, repräsentirt jede Zahl z, die auf ein vorhandenes v fällt, eigentlich nicht sowohl die Vorzugszahl dieses ganz bestimmten v, sondern eines gewissen Intervalls der v, dessen Gränzen durch Halbirung der Abstände des betreffenden v von seinen beiden Nachbarn erhalten werden*), und den ich das Umkreisintervall des betreffenden v nenne, indess der Abstand zwischen zwei vorhandenen v selbst das Zwischenintervall derselben bildet. Je enger die vorhandenen v stehen, desto kleiner sind ihre Umkreisintervalle wie Zwischenintervalle; hieraus aber geht hervor, dass die Zahl der Vorzugsstimmen, die auf jedes vorhandene v fällt, das z desselben, ausser von dem besondern Grade der Wohlgefälligkeit, der ihm, gegen alle übrigen gehalten, zukommt, auch von der relativen Grösse seines Umkreisintervalles gegen die übrigen abhängt, sofern ein grösseres Intervall mehr Werthe fasst als ein kleineres. Und gesetzt, das an sich wohlgefälligste Verhältniss wäre in der Reihe der Werthe zwar vorhanden, stände aber in grosser Nähe zu andern vorhandenen v, indess die übrigen weit von einander abwichen, so könnte es wegen seines kleinen Umkreisintervalles doch weniger Stimmen als eins der andern vorhandenen mit grösserem Umkreisintervall erhalten.

Soll dieser Umstand bei Beurtheilung der Wohlgefälligkeitsverhältnisse nicht unbequem fallen, so muss man bei der Methode der Wahl äquidistante Verhältnisse (im Sinne der Aequidistanz S. 56) vorlegen, und bei den andern Methoden die v's in gleich grosse Intervalle zusammenfassen; kann aber auch durch Interpolation die z von ungleichen Intervallen auf gleiche Intervalle reduciren.

10) Eine Ergänzung und Controle der verschiedenen Methoden durch einander ist nicht nur nützlich, sondern selbst nöthig, weil

*) Diese Halbirung ist in dem auf S. 56 besprochenen Sinne zu verstehen.

jede für sich gewissen Unvollkommenheiten, Schwierigkeiten und selbst Bedenklichkeiten unterliegt, die nicht ebenso die andern treffen. Wenden wir uns also hienach zu einer etwas specielleren Betrachtung und Vergleichung der einzelnen Methoden.

Was die erste, die Methode der Wahl, anlangt, so ist sie insofern unvollständiger als die beiden andern Methoden, als durch diese zwar nicht unendlich viele Werthe v, aber doch jeder mögliche darunter geliefert werden kann, indess man bei der Methode der Wahl gebunden ist, zwischen den nun eben vorgelegten zu entscheiden, worunter möglicherweise das wohlgefälligste gar nicht sein kann. Wenn man inzwischen die Frage so stellt, wie sie hier gestellt wird, ob gewisse Verhältnisse, die man im Auge hat, als namentlich die einfachen rationalen Verhältnisse oder der goldne Schnitt einen Vorzug der Wohlgefälligkeit vor einander oder vor andern benachbarten und ferner liegenden Verhältnissen haben, so hat man es ja in seiner Macht, die in dieser Hinsicht vergleichsweise zu prüfenden Verhältnisse selbst unter die vorzulegenden Verhältnisse aufzunehmen, und kann ausserdem aus den Vorzugszahlen der vorgelegten Verhältnisse durch Interpolation, wovon im folgenden Theile, die Vorzugszahlen der zwischenliegenden Verhältnisse und selbst den Maximumwerth, wenn er nicht bei einem der vorgelegten Verhältnisse selbst liegen sollte, ermitteln; daher für die Bestimmung desselben nach dieser Methode keine fundamentale Schwierigkeit besteht.

Mögen überhaupt bei der Methode der Wahl irgend welche Verhältnisse v in irgend welcher endlichen Zahl vorgelegt worden sein, wofern nur die darauf fallenden Vorzugszahlen z durch eine sehr grosse Zahl von Versuchen gewonnen sind, so wird man sicher schliessen können, dass, wenn abermals eine sehr grosse Zahl von Versuchen mit denselben Verhältnissen unter Zuziehung neuer Individuen der frühern Klasse angestellt wird, die Vorzugszahlen z, welche auf die einzelnen v fallen, den früheren proportional sein werden, abgesehen von kleinen unausgeglichenen Zufälligkeiten, die davon abhängen, dass man doch nicht eine unendliche Zahl von Versuchen beidesfalls hat anstellen können; man wird also jedenfalls ein festes Mass der relativen Wohlgefälligkeit für diese bestimmte Auswahl der Werthe v gewonnen haben. Aber man wird nach den oben (S. 72) gepflogenen Erörterungen nicht schliessen dürfen, dass,

wenn zwischen die bei den frühern Versuchen vorgelegten Verhältnisse noch neue eingeschoben werden, das Verhältniss der Vorzugszahlen für die früher vorgelegten v noch dasselbe bleiben wird, da sich dieselben nun mit den eingeschobenen darein zu theilen und um so mehr davon an dieselben abzugeben haben, je näher ihnen diese kommen. Eben so wenig wird das Verhältniss der Vorzugszahlen dasselbe für dieselben v bleiben, wenn von den früher angewendeten v diese oder jene weggelassen werden. Bei der unbestimmbaren Möglichkeit nun, die Vorlage der v nach Zahl und Abstand beliebig zu variiren, hat ein allgemeines und fundamentales Interesse eigentlich nur der ideale Fall, auf den sich auch unser allgemeines Wohlgefälligkeitsmass schlechthin bezieht, dass man alle mögliche, d. i. unendlich viele Werthe v zur Auswahl vorgelegt denkt, auf welchen zurückzukommen die Vorstellung, dass die auf ein gegebenes v fallende Vorzugszahl eigentlich auf dessen Umkreisintervall mit vertheilt zu denken ist, den Weg bietet.

Eine wesentlichere Schwierigkeit der ersten Methode kann in folgendem Umstande gefunden werden.

Schon im gewöhnlichen Leben werden, abgesehen von manchen Personen, welche ausnahmsweise Extreme lieben, solche verworfen und sog. mittlere Verhältnisse im Urtheil wie in den Anwendungen bevorzugt, wonach sich nur fragt, welches darunter die meisten Vorzugsstimmen für sich vereinigt, denn das an sich wohlgefälligste Verhältniss ist eben ein mittleres. Legt man nun eine beschränkte Zahl von Verhältnissen vor, so können dieselben entweder alle kleiner oder alle grösser sein als das vortheilhafteste Verhältniss, was als Definitivresultat aus allen Versuchen hervorgeht, oder können dasselbe zwischen sich fassen. Sind alle kleiner, so wird das grösste darunter dem vortheilhaftesten Verhältnisse am nächsten liegen, und insofern Anlass sein, es zu bevorzugen; aber insofern es doch ein Extrem in der Reihe ist, die man gerade vor sich hat, wird das Urtheil hievon mitbestimmt, und man vielmehr geneigt sein, statt dessen ein mittleres Verhältniss dieser Reihe vorzuziehen, um so mehr, wenn die Reihe so nach der Grösse der Verhältnisse geordnet ist, dass das der Grösse nach mittlere Verhältniss zugleich der Lage nach ein mittleres ist. Ja wenn das an sich vortheilhafteste Verhältniss selbst eine Gränze der Reihe nach Grösse und Lage bil-

det, kann sich dieser Conflict in der Weise geltend machen, dass nach Umständen entweder das vortheilhafteste Verhältniss, trotz dem, dass es ein Extrem der vorliegenden Reihe ist, oder ein mittleres Verhältniss dieser Reihe, trotz dem, dass es nicht das absolut vortheilhafteste ist, bevorzugt wird. Dass ein solcher Conflict zwischen dem Verhältnisse, welches bei freier Wahl unter allen möglichen Verhältnissen als das wohlgefälligste erscheint, was so zu sagen die allgemeine Mitte bildet*) und demjenigen, welches unter den gerade vorliegenden Verhältnissen die Mitte hält, in der Bestimmung des Urtheiles stattfindet, davon habe ich mich mehrfach durch Vorlage je dreier Rechtecke oder andrer Probeobjecte von verschiedenen Verhältnissen in der Art überzeugt, dass ich das nach der Gesammtheit der Versuche vortheilhafteste Verhältniss bald die Mitte, bald das Ende der kleinen Reihe nach Grösse und Lage bilden liess, wo es öfter erstenfalls als zweitenfalls von denselben Individuen bei Vorlage zu verschiedenen Zeiten vorgezogen wurde. Ich nenne diess kurz den Einfluss der Mitte oder der Abweichung von der Mitte, je nachdem die Begünstigung des Vorzugs durch die erstre oder die Benachtheiligung durch die letztre in Betracht kommt.**) Dieser

*) Eine eigentliche Mitte von Verhältnissen, die ohne Gränze der Grösse variiren, giebt es natürlich nicht.

**) Schon lange bevor ich an diese Untersuchung dachte, bemerkte mir einmal E. H. Weber, dass nach seiner Ansicht der schönste menschliche Körper insofern als der schönste erscheine, als er die Mitte zwischen den überhaupt vorkommenden Abweichungen der Form des Körpers nach einer und der andern Seite darstelle. Die gerade Nase erscheint in der That allgemein gesprochen vortheilhafter sowohl als die Habichtsnase als eingebogene Nase; zwischen den sehr magern und sehr dicken Personen liegt die schönste Mitte. Vielleicht war es die Erinnerung an diese, mir bemerkenswerth erschienene, Aeusserung, welche mich von vorn herein bei meinen Versuchen auf das Princip der Mitte Rücksicht nehmen liess; wie denn auch Weber selbst mich gelegentlich erinnert hat, diese Rücksicht nicht zu versäumen. Natürlich übrigens kann die Schönheit des menschlichen Körpers nicht allein vom Princip der Mitte abhängig gemacht werden, was ich auch in jenem Ausspruche Webers nicht suche, da die Mitte zwischen gleichgültigen Formverhältnissen, welcher Art sie immer seien, wenn auch in relativem Vortheil gegen die Extreme, doch durch ihre blosse Function als Mitte keinen Reiz entwickeln kann, welcher mit dem der Menschenschönheit irgendwie vergleichbar ist. Aber im Zusammentreffen mit den andern Momenten der menschlichen Schönheit (s. S. 29) kann sich nach dem ästhetischen Hülfsprincip der Reiz derselben unverhältnissmässig mehr steigern, als man nach der eignen Leistung des Principes der Mitte vermuthen sollte, etwa wie 2 gegen 1000 verschwindend scheint, aber 2000 daraus machen kann.

Einfluss verdient noch eine sehr sorgfältige methodische Untersuchung, wobei es gelten wird, den Einfluss der Grösse und Lage zu trennen, nicht nur in Rücksicht dessen, dass er bei unsern Versuchen berücksichtigt sein will, sondern weil er unter den Umständen, wovon Wohlgefälligkeit abhängt, überhaupt zählt, also in der Aesthetik überhaupt berücksichtigt sein will. Diese Untersuchung habe ich bis jetzt noch nicht angestellt, da sie voraussetzlich weit auslaufen müsste, um allgemein und präcis ausdrückbare Resultate zu liefern; sondern nur, nachdem ich sein Dasein überhaupt erkannt, in folgenden Weisen zu verhüten gesucht, dass die, nach unsrer ersten Methode zu erhaltenden, Resultate nicht dadurch verfälscht werden.

Am sichersten schliesst man natürlich den Einfluss der Mitte nach Grösse und Lage aus, wenn man von den zu prüfenden Verhältnissen immer nur je zwei auf einmal dem Urtheil darbietet; und ich glaube in der That, dass sich hierauf überhaupt die an sich vortheilhafteste Anwendung der Methode der Wahl gründen lässt, habe auch Versuche danach eingeleitet, aber noch nicht weit genug durchgeführt, um über den Erfolg derselben schon sichre Angaben machen zu können, was hauptsächlich daher rührt, dass man, um das Verfahren in dieser Weise durch eine grössere Reihe von Verhältnissen durchzuführen, über eine grössere Zahl von Versuchssubjecten mit mehr Geduld und Bereitheit zu den Versuchen muss disponiren können, als mir seither zu Gebote gestanden haben; auch hat mir die vortheilhafteste Weise der Durchführung nicht von vorn herein vorgeschwebt; ich hoffe aber später bestimmtere Angaben darüber machen zu können.

Zweitens kann man leicht durch vorläufige Versuche Gränzen ermitteln, zwischen welchen das wohlgefälligste Verhältniss jedenfalls zu suchen ist, denn so schwankend das Urtheil in der genaueren Bestimmung dieses Verhältnisses sein mag, so wenig pflegt es zu zögern, Verhältnisse über gewisse Gränzen der Grösse und Kleinheit hinaus überhaupt als ungefällig zu verwerfen. Nun hat man absichtlich ausser den Verhältnissen, zwischen denen die Entscheidung noch zu suchen ist, nach beiden Seiten andre zuzufügen, wodurch der Fall dem des Lebens analog wird. Zunächst zwar lässt sich fragen, ob nicht hiemit das Urtheil sich um so sichrer auf das mittelste von allen fixirt, wogegen aber die Erfahrung dafür spricht,

dass dann der Einfluss der Mitte sich auf die mittlern mehr gleichförmig vertheilt; wie es denn in dem Gränzfalle, dass man dreien oder mehrern Verhältnissen unendlich viele nach beiden Seiten zufügen wollte, natürlich ist, dass der Einfluss der Mitte mit der Entfernung von den Enden mehr und mehr unbestimmt werden müsste. Und da selbst bei Vorlage von blos drei Verhältnissen der Einfluss der Mitte keinesweges entscheidend, sondern blos concurrirend mit dem Vorzuge an sich, ist, so scheint es, dass man auch keine grosse Anzahl nach beiden Seiten zuzufügen braucht, um die Wahl zwischen den mehr nach der Mitte zu liegenden Verhältnissen nicht mehr erheblich dadurch bestimmt zu halten. Man wird sich aber um so mehr überzeugt halten dürfen, dass ein gegebenes Verhältniss seinen Vorzug vor den andern nicht dem Einflusse der Mitte verdankt, wenn es eben die Mitte nicht wirklich bildet. Sollte aber die Mitte mit dem am meisten bevorzugten Verhältnisse gerade getroffen sein, so würde man die Versuche durch Weglassen eines oder mehrerer Verhältnisse an einem Ende so abzuändern haben, dass es sie nicht mehr bildet, ohne doch selbst ans Ende der Reihe zu kommen. In jedem Falle wird man, wenn man nur wenige Verhältnisse auf einmal vorlegen will, zweckmässig, wenn nicht blos zwei, mindestens vier, überhaupt eine paare Anzahl vorzulegen und die zwei, in deren Gegend die Entscheidung zu suchen ist, zu den zwei mittleren zu machen haben, wo dann für sie der Einfluss der Mitte merklich, und bei Aequidistanz aller Verhältnisse völlig gleich wiegt.

Wenn inzwischen mit all dem noch ein Verdacht bestehen sollte, dass die Resultate vom Einfluss der Mitte nicht unbetheiligt seien, so findet man in den beiden andern Methoden, bei welchen der Einfluss der Mitte fehlt, das Mittel, dieselben zu controliren.

Aber noch ein Bedenken erhebt sich gegen die Methode der Wahl gemeinsam mit der Methode der Herstellung, in so weit es sich um die Untersuchung reiner einfacher Formwohlgefälligkeit handelt, ohne die der Verwendung eben so zu betreffen.

Wenig Gegenstände giebt es überhaupt, bei denen die Form durch die Rücksicht auf Wohlgefälligkeit an sich allein oder vorzugsweise bestimmt ist, sondern, wie von vornherein bemerkt worden ist, kommen Rücksichten auf Idee, Zweck, Bedeutung, Zusammenstellung mit andern Formen mehr oder weniger als mitbestimmend

oder selbst hauptbestimmend in Betracht; auch sind wir durch das Leben so daran gewöhnt, dass, wenn nun verlangt wird, wie es Regel bei den Methoden der Wahl und Herstellung bezüglich unsrer Aufgabe ist, Formen rücksichtslos auf ihre Verwendung hinsichtlich ihrer Wohlgefälligkeit zu beurtheilen oder als wohlgefälligste herzustellen, das Gefühl des Mangels hinreichend bestimmender Momente entsteht, hiemit das Urtheil mehr oder weniger unsicher oder schwankend wird, und so schiebt sich, um dem zu entgehen, unwillkührlich oder auch willkührlich — denn wer kann diess hindern — gar leicht der Gedanke an eine Verwendung unter, so dass man selbst auf die Ansicht kommen könnte, dass alle Urtheile, die gefällt werden, unter dem Einflusse solcher Nebengedanken gefällt werden, und nicht einmal für die Existenz einer Formwohlgefälligkeit an sich beweisen, geschweige zu nähern Bestimmungen darüber führen können. Doch lässt sich hiegegen Folgendes sagen.

Wenn beispielsweise abstracte Rechtecke von abgeänderten Dimensionsverhältnissen zur Auswahl des wohlgefälligsten vorgelegt werden, so wird man auch vorzugsweise geneigt sein, dabei an einfache rechteckige Gegenstände zu denken. Aber hier hat man die Wahl zwischen Thüren, Fenstern, Büchern, Visitenkarten, Briefen, Schiefertafeln, Bildern, Pfefferkuchen, Würfelflächen u. s. w.; und indem Jeder an das denkt, was ihm zunächst einfällt oder in seinem Anschauungskreise vorwiegt, wird er, insofern er sich überhaupt von bewussten Nebengedanken bestimmen lässt — was doch bei einigem Abstractionsvermögen nicht nothwendig ist — diess oder jenes Verhältniss vorziehen. Sollte nun überhaupt der ganze Erfolg der Versuche auf solchen Nebengedanken beruhen, so wäre zu erwarten, dass die Urtheile bei den unbestimmten schwankenden Anlässen an diess oder jenes zu denken, sich ganz unregelmässig zerstreuen, statt zu einem Maximumwerthe des Vorzuges zu führen, wie es doch der Fall ist, und sich dadurch erklärt, dass durch alle wechselnden Mitbestimmungen der Wohlgefälligkeit an sich diese mit einem constanten Einflusse hindurchwirkt. Nur in dem Falle, dass sich ein Gegenstand von sehr dominirendem Einflusse nachweisen liesse — und ein solcher könnte der Aufmerksamkeit nicht entgehen — dessen durch Zweck oder Bedeutung vielmehr als Wohlgefälligkeit an sich bestimmte Form gerade das im Maximum

bevorzugte Verhältniss einhielte, würde man Verdacht haben können, dass der Gedanke an die Form dieses Gegenstandes das allgemeine Urtheil in der Bevorzugung des betreffenden Verhältnisses wesentlich bestimmt hätte, und es ist in der That bei den Erfolgen der Versuche nach der ersten und zweiten Methode zu überlegen, ob etwas der Art vorliege. Existirt aber überhaupt eine Formwohlgefälligkeit an sich, und ist ein Fall letzter Art nicht nachweisbar, so wird die Unmöglichkeit das Mitspiel von Nebengedanken jener Art bei den Versuchen ganz auszuschliessen, keinen andern Erfolg haben, als dass der Eine nach der einen, der Andre nach der andern Richtung von der an sich wohlgefälligsten Form bei der Wahl oder Feststellung abweicht, die Abweichung aber um so seltener wird, je grösser sie ist, weil die doch immer mitwiegende Rücksicht der Formwohlgefälligkeit an sich dann um so sträker gegengewiegt. Des Näheren kann in dieser Hinsicht auf die im vorigen Abschnitte (IV) gepflogenen Erörterungen zurückverwiesen werden, aus welchen hervorgeht, dass zufällig wechselnde Mitbestimmungen des Urtheiles dem Erfolge unsrer Methoden überhaupt nicht im Wege stehen, vielmehr für die tiefere Deutung derselben selbst wesentlich in Rücksicht kommen. Ja ohne das Mitspiel derselben würde sich zwar der an sich wohlgefälligste Werth aufs Leichteste ohne besondere Versuche ermitteln lassen, Gradationen der Wohlgefälligkeit bei Abweichung davon aber gar nicht.

Sollte endlich doch noch ein Verdacht gegen den Ausfall der beiden ersten Methoden in dieser Hinsicht übrig bleiben, so tritt nun die dritte Methode hinzu, ihm zu begegnen. Es giebt in der That Gegenstände, bei denen Idee, Zweck, Bedeutung, Zusammenstellung so wenig determinirend für eine bestimmte Form sind, dass die Rücksicht auf Wohlgefälligkeit der Form an sich als constantes Moment determinirend übrig bleibt. Haben sich nun auch bei der Verfertigung solcher Gegenstände für das Leben subjective und objective Mitbestimmungen mannichfachster Art zufällig geltend gemacht, was eben so wenig ausgeschlossen ist, als die zufälligen Nebengedanken bei der Methode der Wahl, so werden sie doch eben so nur Abweichungen nach beiden Seiten von einer im Maximum bevorzugten Form darstellen, die um so seltener werden, je grösser sie sind, und den Erfolg der Methode nicht hindern.

Von anderer Seite aber wird man sich doch nicht ganz auf die dritte Methode allein verlassen dürfen, da ohne nachweisbare und starke feste Mitbestimmungen, die der Aufmerksamkeit nicht entgehen könnten, doch leise Mitbestimmungen in gewisser Richtung sich derselben entziehen könnten, wovon man aber auch nur schwache Abweichungen vom Resultate der ganz reinen Methode erwarten dürfte.

Eine sehr wichtige Vorsicht bei Versuchen nach der Methode der Wahl ist die, die zu vergleichenden Probeobjecte in gleicher Vollkommenheit vorzulegen, damit kein anderer Umstand, als der ausdrücklich in Untersuchung gezogene, auf das Vorzugsurtheil Einfluss gewinne. Sollte eins oder das andere in der Form oder Farbe chiffonirt, sollte es schief hergestellt, schmutzig oder fleckig sein, so wird es sofort hiedurch in Nachtheil gegen die andern gerathen und Gefahr laufen, blos desshalb gegen die andern verworfen zu werden. Haben nun durch den wiederholten Gebrauch die Probeobjecte irgendwie gelitten, so sind sie sämmtlich zu erneuern, aber nicht erneuerte zu den alten zu fügen, was ein verschiedenes Aussehen derselben bedingen würde.

Bei der zweiten Methode, der Methode der Herstellung, könnte möglicherweise folgender, als constanter Fehler zu bezeichnende Umstand eine Rolle spielen, und mitunter Abweichungen von den Resultaten der beiden andern Methoden bedingen. Wenn ich beispielsweise den Querbalken eines Kreuzes auf dem Längsbalken dagegen senkrecht vorschieben lasse, bis er die wohlgefälligste Stellung zu haben scheint, so kann es sein, dass Personen von einer gewissen Individualität, als z. B. Männer, bei dem nie fehlenden Schwanken, auf welche Stellung sie sich fixiren sollen, die rechte Stellung lieber etwas überschreiten, als dahinter zurückbleiben, andre, als z. B. Frauen umgekehrt; so dass jene den Balken durchschnittlich etwas höher stellen als diese, indess vielleicht bei der Methode der Wahl, wo die Verhältnisse vorgegeben sind, beide sich in gleicher Bevorzugung derselben Verhältnisse vereinigen. Factisch unterscheiden sich jedenfalls Männer und Frauen durchschnittlich etwas in der Höhenstellung des Querbalkens bei den Herstellungsversuchen des Kreuzes; doch habe ich noch nicht ermittelt, ob diess wirklich von einem solchen constanten Fehler, oder einer Verschiedenheit des Geschmackes an sich abhängt, wozu ein Vergleich mit den Resultaten die Methode der

Wahl nöthig sein wird. Vielleicht reichen die Data, die mir darüber zu Gebote stehen, schon hin, eine Entscheidung zu fällen; doch sind meine Versuchsreihen in dieser Hinsicht noch nicht genau untersucht.

Die Methoden der Wahl und Herstellung mit Verwendung theilen zum Theil die Vortheile und Nachtheile der reinen Methoden, haben aber den ganz besondern Vortheil vor ihnen voraus, dass die Versuchssubjecte sich im Allgemeinen lieber und mit entschiedenerem Urtheile darauf einlassen, da ihnen keine ungeläufige Abstraction dabei zugemuthet wird.

Stimmt endlich der Maximumwerth und Gang der Bevorzugungen, die man nach den verschiedenen Methoden erhält, insoweit überein, als es der unausweichliche Irrthum wegen nicht hinreichender Zahl der Beobachtungen, das mögliche Vorhandensein kleiner fester Mitbestimmungen, die sich nicht auffinden oder berücksichtigen liessen, und das etwaige Mitspiel constanter Fehler zulässt, so hat man darin eine wechselseitige Controle des Resultats dieser Methoden.

Schliesslich ist es mit den ästhetischen Gesetzen wie mit den Naturgesetzen. Dass das Gravitationsgesetz genau dem umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernungen folgt, lässt sich durch keine Beobachtungen, Versuche, Rechnungen beweisen. Es muss genügen, den Beweis mit solcher Approximation zu führen, dass die Abweichung durch die Unsicherheit und Störungen der Beobachtungen erklärlich scheint. Und so muss das Entsprechende auch hinsichtlich des Beweises für die Statthaftigkeit des goldnen Schnitts oder sonst eines Verhältnisses als ästhetisches Normalverhältniss gelten. Die Beobachtungen führen hier wie da nur zu Zahlenverhältnissen, die denen, bei denen man als den wahrhaft gesetzlichen oder normalen stehen bleibt, sehr nahe liegen; und man bleibt zuletzt nur bei diesen stehen, weil man eine grössere Befriedigung darin findet, Verhältnisse, die einen einfachen Ausdruck zulassen, oder sich von einem einfachen Princip abhängig machen lassen, fundamentalen Gesetzen unterzulegen, als motivlos scheinende Abweichungen davon.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

This book should be returned to the Library on or before the last date stamped below.

A fine of five cents a day is incurred by retaining it beyond the specified time.

Please return promptly.

DUE JUN 21 1919

FEB 26 1920

JUN 15 1930

DUE FEB 23 1926

DUE OCT 8 1928

3 2044 092 882 703